



الخليل للرياضيات

التحضير الجيد للبكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

مسائل شاملة حول الدوال اللوغارتمية

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 29

الإصدار الأول

1

المسائل الشاملة

- المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- المسألة الشاملة رقم 11

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶

01

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .(2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسياً.ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.(2) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.(3) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .(4) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x + 1)^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .(5) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها.(6) مثل بياناً المنحني (C_f) .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = 1 + x^2 + \ln x$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

(3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أنه من أجل كل x من D_f :

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(4) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

(5) اثبت أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها.

(6) مثل بيانيا كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحني (C_f) . علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل

في نقطتين x_0 و x_1 حيث: $0.1 < x_0 < 0.2$ و $1.5 < x_1 < 1.6$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = -x + 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال D_h :

$$h(x) = f(x+1) + 2$$

ب/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

(2) أ/ بين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه .
ب/ مثل بيانيا المنحني (C_h) .

(3) m وسيط حقيقي غير معدوم، (T_m) مستقيم معادلته:

$$y = \ln(|m|) x + 1$$

أ/ برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$h(x) = \ln(|m|) x + 1 \dots (E)$$

03

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} + x; x \in \mathbb{R}_-^* - \{-1\} \\ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}; x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ 0; x = 0 \end{cases}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$ ، فسر النتيجة هندسياً.
- (2) ادرس تغيرات الدالة f .
- (3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.
ب/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_-^* - \{-1\}$.
- (4) حل المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟
- (5) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-2; -\frac{3}{4}[$.
- (6) مثل بيانياً (Δ) والمنحني (C_f) .
- (7) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$f(x) = -(m^2 - e) \dots (E)$$
 - ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = (\ln x)^3 + 1$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) حل المعادلة $g(x) = 0$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ يكون:

$$f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

(3) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = (\ln x)^2 + 1$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة h .

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

(3) ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) .

(4) بين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف يُطلب احداثيتها.

(5) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

(6) احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

(7) مثل بيانياً في نفس المعلم كلا من (C_f) ، (C_h) و (T) .

(8) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m (\ln x)^3 + e^m (\ln x) - \ln x - 2e^m = 0 \dots (E)$$

- ناقش بيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

05

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	...	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	...	0	-		...	0	+
$f(x)$		$-\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$					$+\infty$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.(1) علما أن الدالة f فردية:أ/ عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .ب/ بيّن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$ و $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$ ج/ أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.(2) نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$.أ/ مثّل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحني (C_f) . نأخذ: $f(\sqrt{3}) \cong 3$ و $\sqrt{3} \cong 1.7$ (3) نفرض أن عبارة الدالة f هي من الشكل:

$$f(x) = ax + b + \ln\left(c + \frac{2}{x-1}\right)$$

حيث: a, b, c أعداد حقيقية.- باستعمال نتائج الجدول أعلاه، بيّن أن: $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$.(4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0 \quad \dots (E)$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \ln(f(x))$$

- ادرس تغيرات الدالة g .

06

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، مبينا المستقيبات المقاربة لـ (C_f) .ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.(2) m عدد حقيقي موجب تاماً.لتكن النقط A_m ذوات الفاصلة m ، والمستقيم (T_m) مماس (C_f) في النقط A_m .أ/ اكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m) .ب/ عين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0; 0)$.ج/ اكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها.(3) مثل بيانياً المستقيمات (T_m) والمنحني (C_f) .(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{(\ln|x|)^2}{x}$$

(1) بيّن أن الدالة g فردية.(2) بيّن أنه يمكن رسم (C_g) منحنى الدالة g انطلاقاً من (C_f) ، ثم ارسمه.

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) أ/ بين أن لكل x من المجال $]0; 1]$ $(x - 1) + \ln x \leq 0$ وأن لكل x من المجال $[1; +\infty[$:

$$(x - 1) + \ln x \geq 0.$$

ب/ بين أنه من أجل كل من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ والمنحنى (C_f) .

(4) عين احداثي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازياً للمستقيم (D) ، ثم اكتب معادلة المستقيم (T) .

(5) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها.

(6) مثل بيانياً كلا من (D) ، (T) و (C_f) .

(7) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$f(x) = x - 2m$$

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)$$

(1) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ/ احسب $g(0)$.

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72 < \alpha < -0.71$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال: $]0; +\infty[\cup]-1; 0[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسياً.

(2) أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(3) بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

ثم أعط حصر للعدد $f(\alpha)$ بالتدوير إلى 10^{-2} .

(4) مثل بيانياً (C_f) .

(5) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث: $m > 0$.

$$f(x) = \ln m \dots (E)$$

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ بين أن:

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$$

ج/ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحني (C_f) .

(4) بين أن ω نقطة تقاطع مقاربي المنحني (C_f) تنتمي إلى (C_f) .

(5) اكتب معادلة للمماس (T) عند المبدأ.

(6) مثل بيانياً كلا من (D) ، (T) و (C_f)

(7) m وسيط حقيقي حيث: $m > 0$.

ناقش بيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) حيث:

$$x - \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{me^x + 2m} \right) = 0 \dots (E)$$

10

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = \ln x + x - 3$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .(2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.2 < \alpha < 2.21$.(3) عين إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.(1) احسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.(2) أ/ احسب $f'(x)$ ، ثم ادرس اشارتها.ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) عين دون حساب النهاية التالية:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$$

ثم فسر النتيجة هندسيا.

(4) بين أن:

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

(5) حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.(6) بأخذ: $f(\alpha) \cong -0.66$ ، مثل بيانيا المنحني (C_f) على المجال $]0; 10]$.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$.

ب/ تحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$

(3) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) بين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$

(5) استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(III) نسمي (C_h) التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$h(x) = \ln x$$

ولتكن النقطة A ذات الإحداثيات $(0; 2)$ و M نقطة من المنحني (C_h) فاصلتها x_m .

(1) بين أن المسافة AM تُعطى بـ:

$$AM = \sqrt{f(x)}$$

(2) نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$

أ/ برهن أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ برهن أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) ، يُطلب تعيين إحداثيها.

ج/ برهن أن: $AB = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$

(3) هل المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحني (C_h) في النقطة B ؟ برر اجابتك.

2

حلول المسائل الشاملة

- حل المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 11

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶

01

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -1} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + 2 + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(2x+2)(x+1) + 1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 + 1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 3}{x+1} \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

- جدول التغيرات:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نجد:

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\underbrace{x}_{-1} - \frac{\overbrace{\ln(x+1)}^{-\infty}}{\underbrace{x+1}_{0^+}} \right] = +\infty$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] \\ &= +\infty - 0 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

(2) تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مقائل بجوار $+\infty$.

(3) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} -\ln(x+1) = 0 &\Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^0 \\ &\Rightarrow x+1 = 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

- الوضعية:

• المنحني (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1; 0[$.

- المنحني (C_f) يقطع (Δ) في $O(0; 0)$.
- المنحني (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$.

4 تبين أنه من أجل كل x من المجال $] - 1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 + 2x - 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

5 تبين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(2x + 2 + \frac{1}{x+1}\right)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^4} \\ &= \frac{\left(2(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)(x+1) - 2(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2(x+1)^2 + 1 - 2x^2 + 4x + 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^3 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

$$3 - 2\ln(x+1) = 0 \Rightarrow 2\ln(x+1) = 3$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) = \frac{3}{2}$$

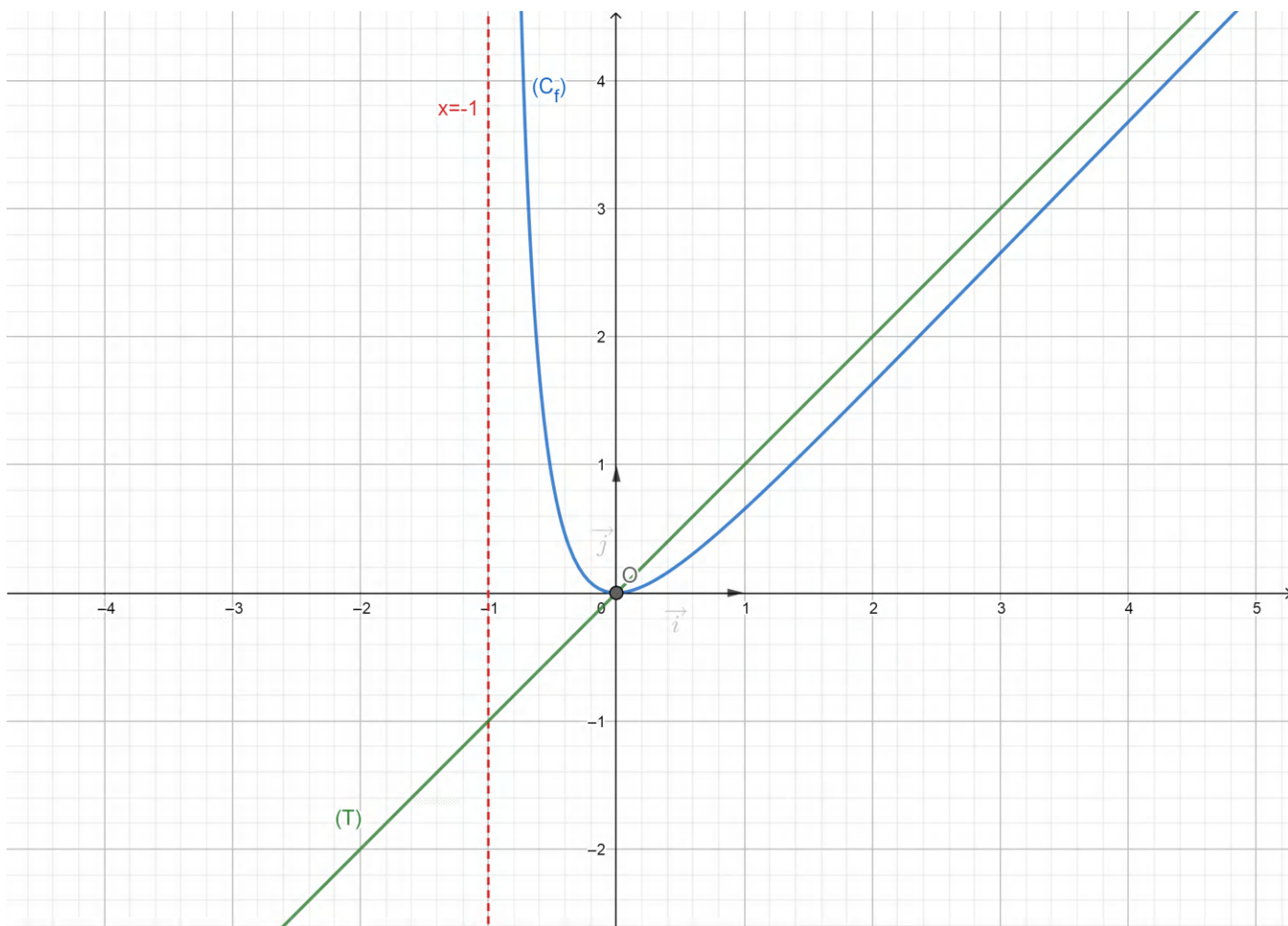
$$\Rightarrow x+1 = e^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

لدينا الدالة f'' تنعدم وتغير إشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $e^{\frac{3}{2}} - 1$

6 التمثيل البياني:

- **نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = -1$**
- **نرسم المماس (T)**
- **ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)**



02

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + x^2 + \ln x] \\
 &= 0 - \infty \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + x^2 + \ln x] \\
 &= +\infty + \infty \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2x + \frac{1}{x} \\
 &= \frac{2x^2 + 1}{x}
 \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :لدينا: الدالة g مستمرة ومنتزعة على مجال تعريفهاولدينا: $g(0.32) = -0.03$ و $g(0.33) = 0.0002$ ولدينا: $g(0.33) \times g(0.32) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.(3) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

(1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-x + \frac{\overbrace{2 + \ln x}^{-\infty}}{\underbrace{x}_{0^+}} \right] = -\infty$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}}{1} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = 0 \text{ لأن}$$

(2) تبين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{\frac{1}{x}x - (2 + \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 - 1 - \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{x^2 + 1 + \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول التغيرات:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) تبين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 1 + \ln \alpha = 0 \\ \Rightarrow \ln \alpha = -(\alpha^2 + 1)$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha} \\ = \frac{-\alpha^2 + 2 - (\alpha^2 + 1)}{\alpha} \\ = \frac{-2\alpha^2 + 1}{\alpha} \\ = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33 \\ -0.33 < -\alpha < -0.32 \dots (1)$$

ولدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33 \\ 0.64 < 2\alpha < 0.66 \\ \frac{1}{0.66} < \frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{0.64} \\ 1.51 < \frac{1}{2\alpha} < 1.66 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$1.18 < \frac{1}{2\alpha} - \alpha < 1.34 \\ 2.18 < 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right) < 2.34$$

إذن:

$$2.18 < f(\alpha) < 2.34$$

(4) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} + x \right] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 + \ln x}{x} \right] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right]$$

$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2 + \ln x}{x}$$

لدينا $x > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$\begin{aligned} 2 + \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = -2 \\ &\Rightarrow x = e^{-2} \end{aligned}$$

ومنه:

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	+

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; e^{-2}[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e^{-2} .
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]e^{-2}; +\infty[$.

5 اثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) :

(T) يوازي (Δ) معناه: $f'(a) = -1$ ومنه:

$$\begin{aligned} f'(a) = -1 &\Rightarrow -\frac{a^2 + 1 + \ln a}{a^2} = -1 \\ &\Rightarrow a^2 + 1 + \ln a = a^2 \\ &\Rightarrow 1 + \ln a = 0 \\ &\Rightarrow \ln a = -1 \\ &\Rightarrow a = e^{-1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ &= -x + e^{-1} - e^{-1} + \frac{2 + \ln e^{-1}}{e^{-1}} \\ &= -x + e \end{aligned}$$

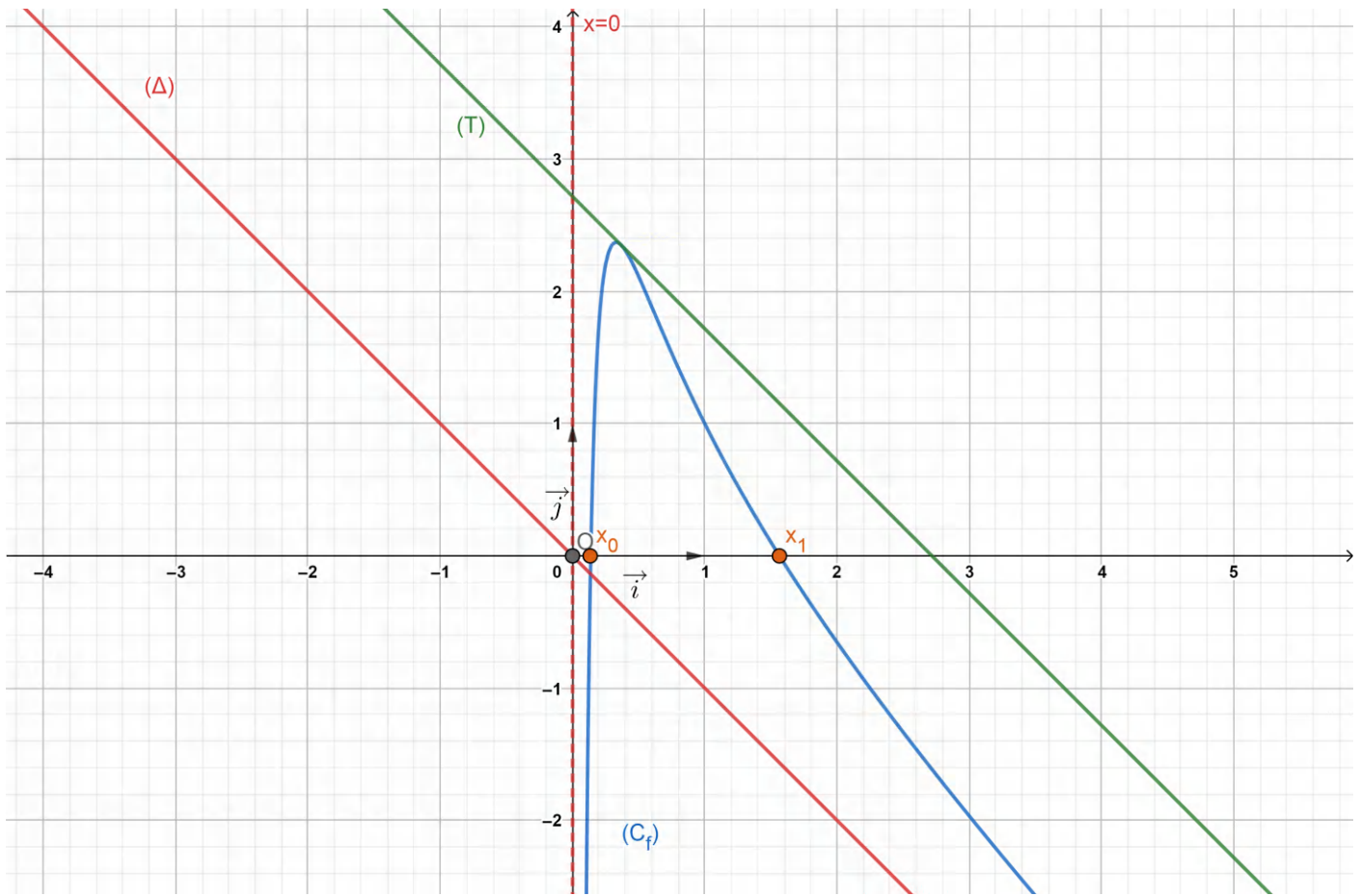
6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = 0$
- نعين x_0 و x_1 نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل : (Δ)

• نرسم المماس (T)

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(III)

1) أ/ تبين أنه من أجل كل x من المجال D_h : $h(x) = f(x+1) + 2$

$$\begin{aligned} f(x+1) + 2 &= -(x+1) + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} + 2 \\ &= -x - 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} + 2 \\ &= -x + 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ب/ تبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (-x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} - (-x + 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right]$$

$$= 0$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

(2) أ/ تبين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه :

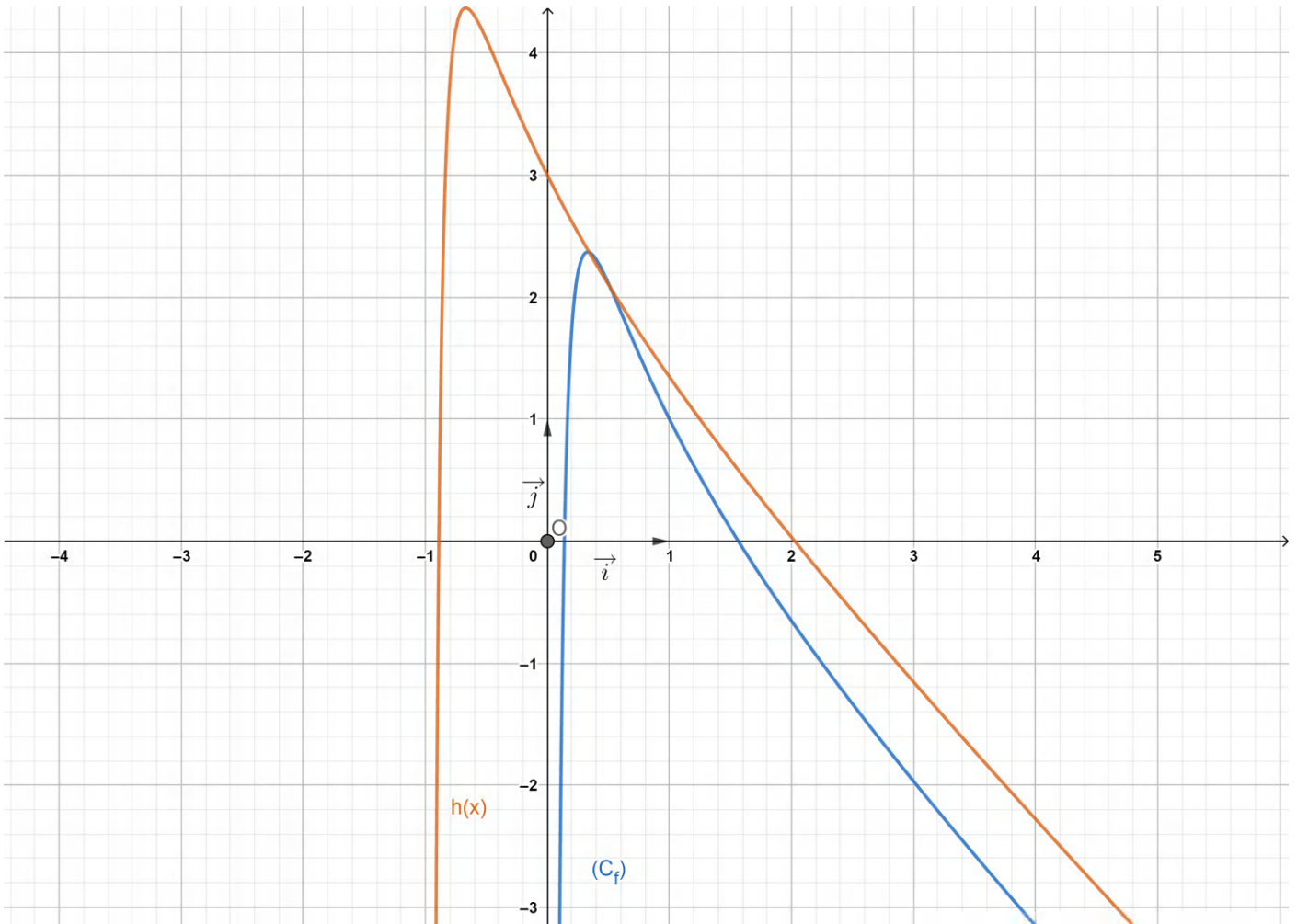
$$h(x) = f(x+1) + 2$$

$$= f(x - (-1)) + 2$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{u}(-1; 2)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :

تمثيل (C_f) و (C_h) :



(3) أ/ برهان أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها:

نفرض أن النقطة $A(x_1; y_1)$ تنتمي إلى المستقيم (T_m) ونبرهن أنها ثابتة:

لدينا: A تنتمي إلى (T_m) معناه:

$$y_1 = \ln(|m|) x_1 + 1$$

$$\Rightarrow \ln(|m|) x_1 - y_1 + 1 = 0 \dots (3)$$

المعادلة (3) عبارة عن كثير حدود متغيره $\ln(|m|)$ وينعدم اذا انعدمت جميع معاملاته

أي:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -y_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

اذن: المستقيمات (T_m) تشمل النقطة $A(0; 1)$

ب/ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_h) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m = \ln(|m|)x + 1$$

ومنه:

المعادلة تقبل حلا وحيدا	$m = -e^{-1}$ و $m = e^{-1}$	أي	$ m = e^{-1}$	أي	$\ln m = -1$	لما
المعادلة تقبل حلا وحيدا	$-e^{-1} < m < e^{-1}$	أي	$ m < e^{-1}$	أي	$\ln m < -1$	لما
المعادلة تقبل حلا	$m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[$	أي	$ m > e^{-1}$	أي	$\ln m > -1$	لما

03

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\frac{1}{\ln|x|} + x - 0}{x - 0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{x \ln|x|} + \frac{x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{x \ln(-x)} + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{-1}{-x \ln(-x)} + 1 \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [-x \ln(-x)] = 0^+ \text{ لأن}$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليسار

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} - 0}{x - 0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{2x(\ln x)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x \ln x} \left(1 - \frac{1}{2 \ln x} \right) \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليمين

- التفسير الهندسي:

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ومنه (C_f) يقبل مماس عمودي معادلته $x = 0$

(2) دراسة تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\ln|x|} + x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{0^+} + x \right] \\
&= +\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{0^-} + x \right] \\
&= -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] \\
&= \frac{1}{0^-} - \frac{1}{2(0^-)^2} \\
&= -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} \left(1 - \frac{1}{2 \ln x} \right) \right] \\
&= \frac{1}{0^+} \left(1 - \frac{1}{2(0^+)} \right) \\
&= -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = -1$ بجوار $\pm \infty$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = 1$ بجوار $-\infty$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $y = 0$ بجوار $+\infty$.

- حساب $f'(x)$:

لما $x \in \mathbb{R}_* - \{-1\}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)}{(\ln(-x))^2} + 1 \\
&= \frac{-1}{x(\ln(-x))^2} + 1
\end{aligned}$$

لاحظ أن $x < 0$ ومنه: $f'(x) > 0$

اذن:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$

لما $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left(\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right) - \left(-\frac{4\left(\frac{1}{x}\right)\ln x}{4(\ln x)^4}\right) \\ &= -\frac{1}{x(\ln x)^2} + \frac{1}{x(\ln x)^4} \\ &= \frac{-\ln x + 1}{x(\ln x)^3} \\ &= \frac{-\ln x + 1}{[x(\ln x)^2] \ln x} \end{aligned}$$

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $\frac{-\ln x + 1}{\ln x}$:

لدينا:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} -\ln x + 1 = 0 &\Rightarrow \ln x = 1 \\ &\Rightarrow x = e \end{aligned}$$

ومنه:

x	0	1	e	$+\infty$
$-\ln x + 1$	$+$	$+$	0	$-$
$\ln x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$

ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	0

(3) أ/ تبين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $-\infty$:



إذا استطعنا كتابة عبارة دالة f على الشكل:

$$f(x) = y + \varphi(x)$$

حيث:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\varphi(x)] = 0$$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته y

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{\ln(-x)} \\ &= y + \varphi(x) \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{\ln(-x)} \\ y = x \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_*^+ - \{-1\}$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= x + \frac{1}{\ln(-x)} - x \\ &= \frac{1}{\ln(-x)} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \ln(-x) &= 0 \Rightarrow -x = e^0 \\ &\Rightarrow -x = 1 \\ &\Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	0
$f(x) - y$	$+$	$ $	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$.
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-1; 0[$.

4 حل المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $\mathbb{R}_*^+ - \{1\}$:

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x - 1}{2(\ln x)^2} = 0$$

لدينا: $2(\ln x)^2 > 0$ ومنه:

$$2 \ln x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 1$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{e}$$

- الاستنتاج:

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$

5 تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-1.77; -1.76[$:

المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-1.77; -1.76[$ معناه

المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا في نفس المجال

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1.77; -1.76[$

لدينا: $f(-1.77) = -0.01$ و $f(-1.76) = 0.008$

لدينا: $f(-1.77) \times f(-1.76) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا في المجال $]-1.77; -1.76[$

6 التمثيل البياني:

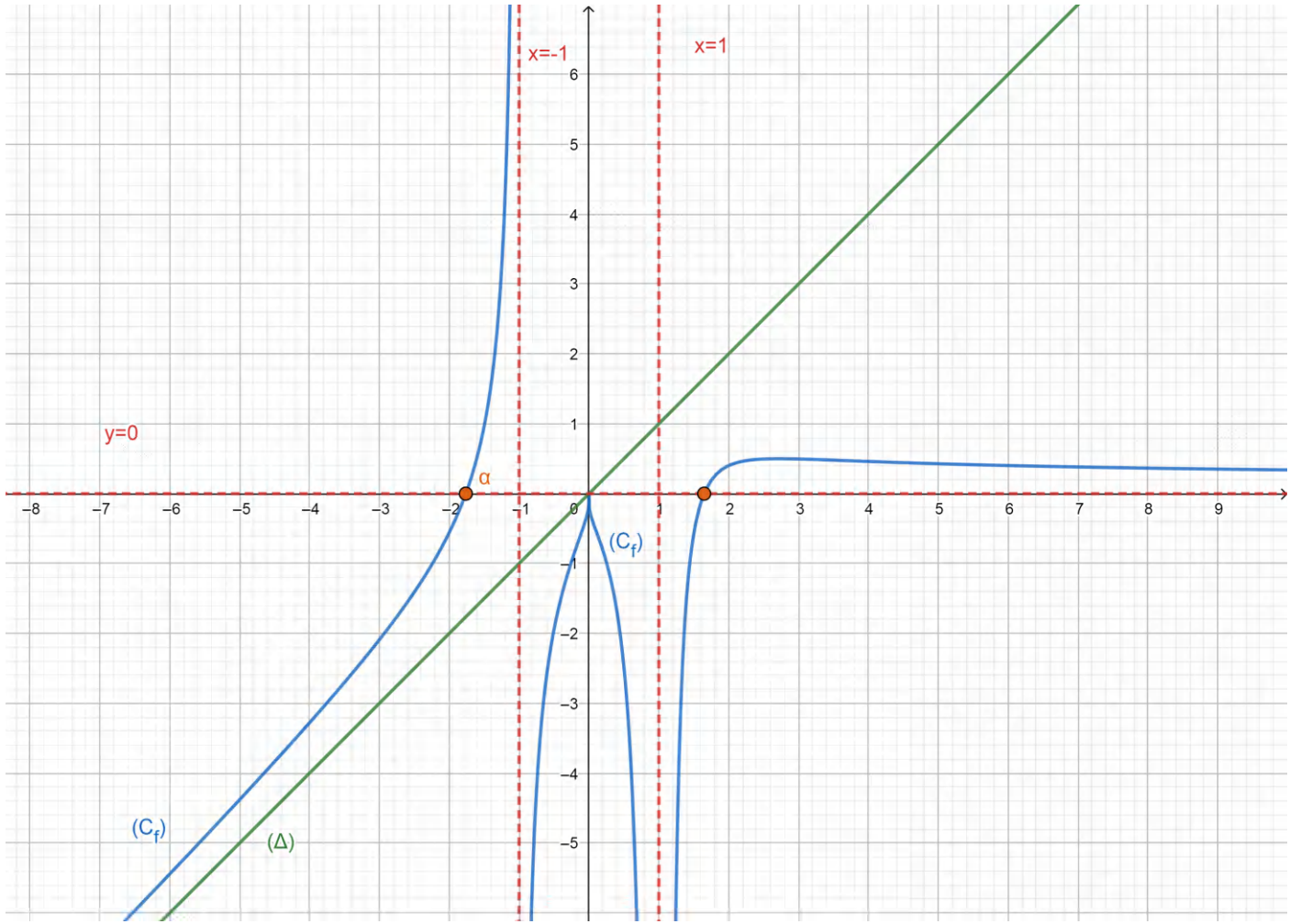
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمات المقاربة: $x = -1$ و $x = 1$ و $y = 0$

• نعين نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل

• نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ)

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -(m^2 - e)$

- لما $-(m^2 - e) < 0$ أي $m^2 - e > 0$ أي $m^2 > e$ أي $|m| > \sqrt{e}$ أي $m \in]-\infty; -\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين وحلين سالبين.
 - لما $-(m^2 - e) = 0$ أي $m^2 - e = 0$ أي $m^2 = e$ أي $|m| = \sqrt{e}$ أي $m = -\sqrt{e}$ و $m = \sqrt{e}$ المعادلة تقبل حل موجب وحل معدوم وحل سالب.
 - لما $0 < -(m^2 - e) < \frac{1}{2}$ أي $-\frac{1}{2} < m^2 - e < 0$ أي $e - \frac{1}{2} < m^2 < e$ أي $|m| > \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ و $|m| < \sqrt{e}$ أي $-\sqrt{e} < m < \sqrt{e}$ و $m \in]-\infty; -\sqrt{e - \frac{1}{2}}[\cup]\sqrt{e - \frac{1}{2}}; +\infty[$ أي
- $$m \in \left] -\sqrt{e - \frac{1}{2}}; -\sqrt{e} \right[\cup \left] \sqrt{e}; \sqrt{e + \frac{1}{2}} \right[$$
- المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

$$\bullet \text{ لما } |m| = \sqrt{e - \frac{1}{2}} \text{ أي } m^2 = e - \frac{1}{2} \text{ أي } m^2 - e = -\frac{1}{2} \text{ أي } -(m^2 - e) = \frac{1}{2}$$

$$\text{أي } m = -\sqrt{e - \frac{1}{2}} \text{ و } m = \sqrt{e - \frac{1}{2}} \text{ المعادلة تقبل حل مضاعف وحل سالب}$$

$$\bullet \text{ لما } |m| < \sqrt{e - \frac{1}{2}} \text{ أي } m^2 < e - \frac{1}{2} \text{ أي } m^2 - e < -\frac{1}{2} \text{ أي } -(m^2 - e) > \frac{1}{2}$$

$$\text{أي } -\sqrt{e - \frac{1}{2}} < m < \sqrt{e - \frac{1}{2}} \text{ أي } m \in \left] -\sqrt{e - \frac{1}{2}}; \sqrt{e - \frac{1}{2}} \right[$$

المعادلة تقبل حل وحيد سالب

04

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} [(\ln x)^3 + 1] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln x)^3 + 1] = +\infty \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3 \frac{1}{x} (\ln x)^2$$

لدينا: $g'(1) = 0$ و $g'(x) > 0$ ومنه

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2) حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (\ln x)^3 + 1 = 0 \\ &\Rightarrow (\ln x)^3 = -1 \\ &\Rightarrow \ln x = -1 \\ &\Rightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة $g(x) = 0$ هي $s = \{e^{-1}\}$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] = -\frac{2}{0^-} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] = -\frac{2}{0^+} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] = +\infty$$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$

(2) تبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ يكون: $f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \frac{1}{x} \ln x - \left(\frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x)^2} \right) \\ &= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2} \\ &= 2 \left[\frac{(\ln x)^3 + 1}{x(\ln x)^2} \right] \\ &= \frac{2g(x)}{x(\ln x)^2} \end{aligned}$$

(3) استنتاج إشارة $f'(x)$:

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$ $+\infty$	$\nearrow$ $+\infty$
		4		$-\infty$

(III)

1) دراسة تغيرات الدالة h :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty \end{aligned}$$

- دراسة $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{2}{x} \ln x$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه :

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول تغيرات الدالة h :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

2) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} - (\ln x)^2 - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{\ln x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

 (C_h) و (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$ 3) دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين (C_h) و (C_f) :ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x)$:

$$f(x) - h(x) = \frac{2}{-\ln x}$$

لدينا:

$$-\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - h(x)$	+	-	

- الوضعية:

• (C_f) فوق (C_h) لما $x \in]0; 1[$.

• (C_f) تحت (C_h) لما $x \in]1; +\infty[$.

4 تبين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف:

لدينا:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{-2}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \times \frac{2}{x} \\ &= \frac{-2 \ln x + 2}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2} (1 - \ln x) \end{aligned}$$

لدينا $\frac{2}{x^2} > 0$ ومنه الإشارة من $(1 - \ln x)$:

$$1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$

$$\Rightarrow x = e$$

x	0	e	$+\infty$
$h''(x)$	+	0	-

لدينا $h''(x)$ انعدمت وغيّرت إشارتها ومنه المنحني (C_h) يقبل نقطة انعطاف احداثيها $A(e; 2)$

5 كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A :

$$\begin{aligned} (T): y &= h'(e)(x - e) + h(e) \\ &= \frac{2}{e} \ln e (x - e) + (\ln e)^2 + 1 \\ &= \frac{2}{e} x \end{aligned}$$

6 حساب $f(e)$:

$$f(e) = (\ln e)^2 + 1 - \frac{2}{\ln e} = 0$$

- الاستنتاج:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة e .

7 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$ و $x = 0$

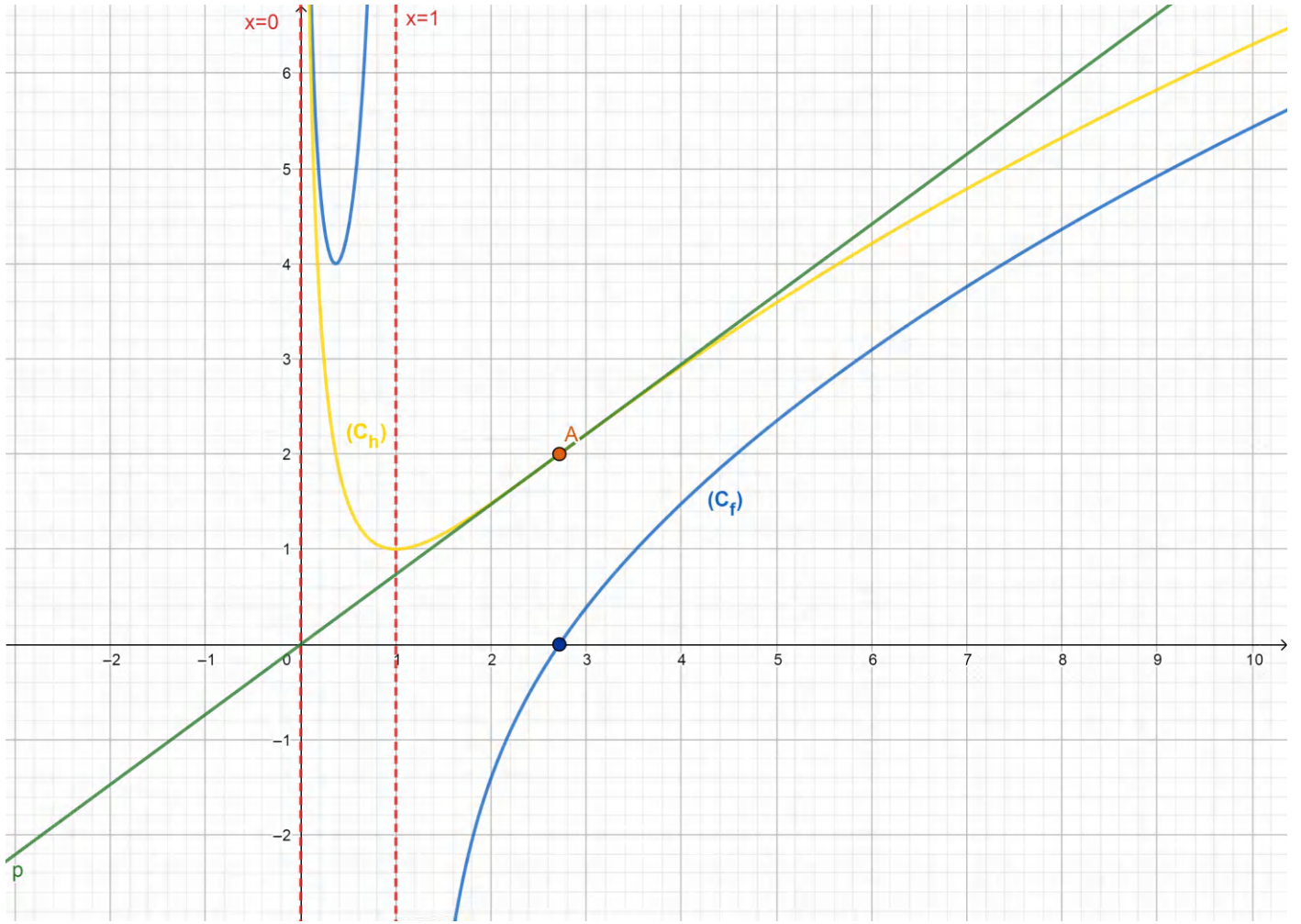
• نرسم المماس (T)

• نعين نقطة انعطاف المنحني (C_h)

• باستعمال جدول تغيرات الدالة h نرسم (C_h)

• نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل

• ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(8) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 e^m (\ln x)^3 + e^m \ln x - \ln x - 2e^m &= 0 \\
 \Rightarrow e^m [(\ln x)^3 + \ln x - 2] &= \ln x \\
 \Rightarrow e^m \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] &= 1 \\
 \Rightarrow e^m [f(x)] &= 1 \\
 \Rightarrow f(x) &= e^{-m}
 \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = e^{-m}$ اذن:

لما $e^{-m} < 4$ أي $-m < \ln 4$ أي $m > -\ln 4$ المعادلة تقبل حل وحيد
لما $e^{-m} = 4$ أي $-m = \ln 4$ أي $m = -\ln 4$ المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف
لما $e^{-m} > 4$ أي $-m > \ln 4$ أي $m < -\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

05

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1) أ/ تعيين إشارة $f'(x)$ مع التبرير:

نضع α, β, γ حيث:

x	$-\infty$	α	β	1	$\sqrt{3}$	γ
$f'(x)$	...	0	-		0	+

لدينا الدالة f فردية ، معناه:

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

ومنه:

$$-f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

لدينا من جدول التغيرات (المُعطى):

$$x \in]\alpha; \beta[\text{ لما } f'(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{لما } \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} < 0 \quad \text{لما } -x \in]\alpha; \beta[$$

$$\Leftrightarrow f'(x) < 0 \quad \text{لما } x \in]-\beta; -\alpha[$$

ولدينا كذلك:

$$x \in]\sqrt{3}; \gamma[\text{ لما } f'(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} > 0 \quad \text{لما } -x \in]\sqrt{3}; \gamma[$$

$$\Leftrightarrow f'(x) > 0 \quad \text{لما } x \in]-\gamma; -\sqrt{3}[$$

$$\text{ولدينا: } x = \sqrt{3} \text{ لما } f'(x) = 0 \quad \text{معناه} \quad -x = \sqrt{3} \text{ لما } f'(-x) = 0 \quad \text{ومنه } x = -\sqrt{3}$$

$$\text{ومنه: } \alpha = -\sqrt{3} \quad \text{و} \quad \beta = -1 \quad \text{و} \quad \gamma = +\infty$$

اذن:

$$f'(x) > 0 \quad \text{لما: } x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{لما: } x \in]-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}[$$

$$\text{ب/ تبين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty$$

$$\text{لدينا من الجدول السابق: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$$

نضع $x = -t$ (الدالة f فردية أي: $f(-t) = -f(t)$)
ومنه:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{-t \rightarrow -\infty} [f(-t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(-t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [-f(t)] \\ &= - \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] \\ &= - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]}_{= +\infty} \\ &= -(+\infty) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

- تبين أن: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$

بنفس الفكرة السابقة (نضع $x = -t$) نجد: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$

- تبين أن: $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$

لدينا:

$$\begin{aligned}\underbrace{f(-\sqrt{3})}_{f(-\sqrt{3}) = -f(\sqrt{3})} &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\ \Rightarrow -f(\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\ \Rightarrow f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

ج/ اكمال جدول تغيرات الدالة f السابق:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$		$+\infty$	$\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$	$+\infty$

(2) التمثيل البياني:

قبل أن نشرع في التمثيل البياني، نستخرج من جدول التغيرات المستقيمات المقاربة

لدينا:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$.

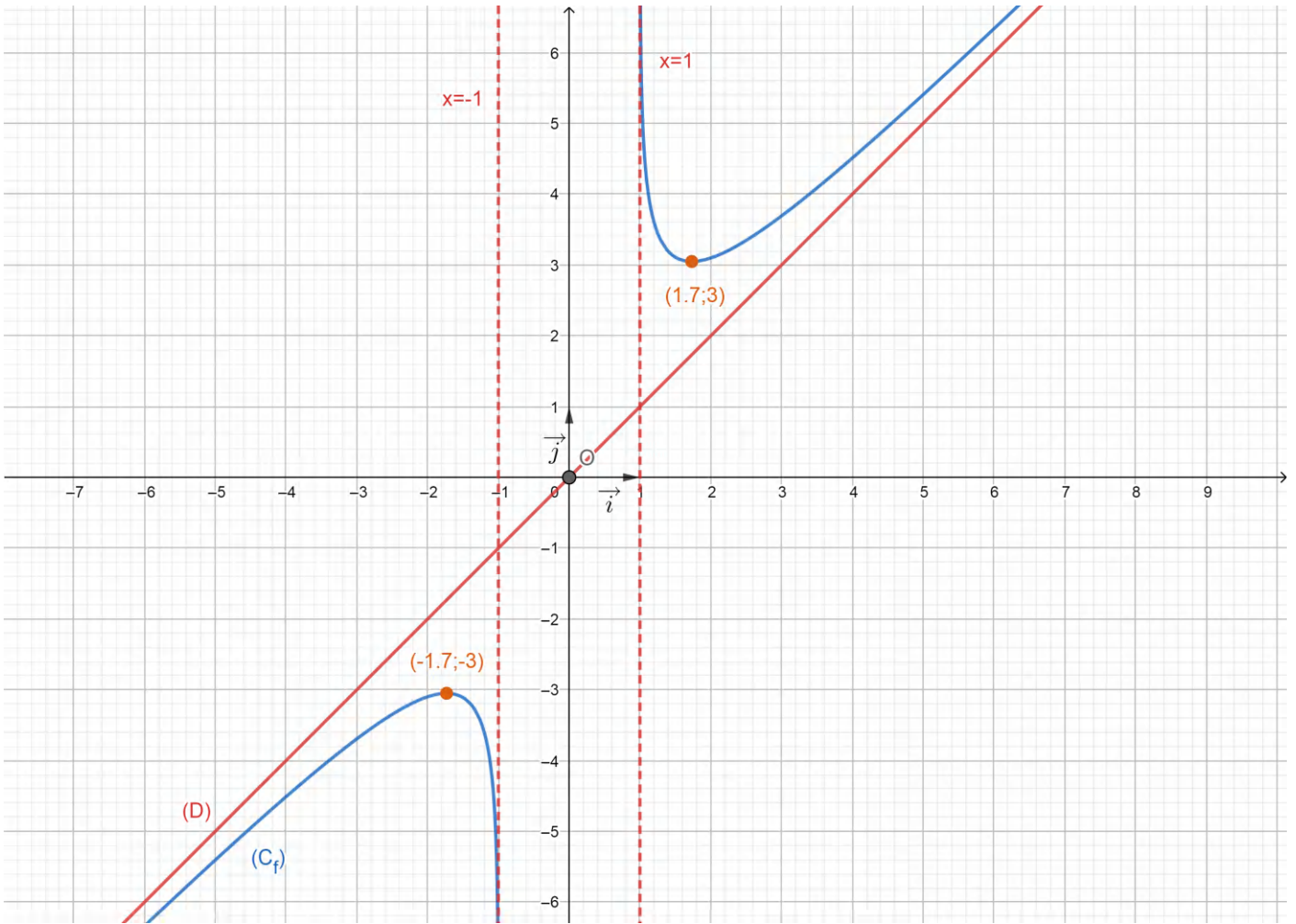
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = -1$ و $x = 1$

• نرسم القارب المائل (D)

• نعين النقط الحدية

• ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(3) تبين أن: $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a + \frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{c + \frac{2}{x-1}} \\ &= a - \frac{\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{c(x-1) + 2}{x-1}} \\ &= a - \frac{\frac{2}{x-1}}{c(x-1) + 2} \end{aligned}$$

$$= a - \frac{2}{c(x-1)^2 + 2(x-1)}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} f'(\sqrt{3}) = 0 \\ f'(-\sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \\ a - \frac{2}{c(-\sqrt{3}-1)^2 + 2(-\sqrt{3}-1)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \dots (*) \\ a - \frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} = 0 \dots (**) \end{cases}$$

ب طرح (*) من (**): نجد:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} + \frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} &= 0 \\ \Rightarrow c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1) &= c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1) \\ \Rightarrow c(4 + 2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} - 2 &= c(4 - 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2 \\ \Rightarrow c(4 + 2\sqrt{3}) - c(4 - 2\sqrt{3}) - 4\sqrt{3} &= 0 \\ \Rightarrow c(4\sqrt{3}) &= 4\sqrt{3} \\ \Rightarrow \boxed{c = 1} \end{aligned}$$

نعوض قيمة c في (*) نجد:

$$\begin{aligned} a - \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} &= 0 \Rightarrow a = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} \\ &\Rightarrow \frac{2}{4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2} \\ &\Rightarrow a = \frac{2}{4 - 2} \\ &\Rightarrow \boxed{a = 1} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{3} + b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) \\
&\Rightarrow b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right) = \ln(2 + \sqrt{3}) \\
&\Rightarrow b = \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln\left(\frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2\sqrt{3} - 2 + 3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln(1) \\
&\Rightarrow \boxed{b = 0}
\end{aligned}$$

4) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} &= 0 \Rightarrow \frac{xe^m - xe^x - e^m - e^x}{e^m - e^x} = 0 \\
&\Rightarrow xe^m - xe^x - e^m - e^x = 0 \\
&\Rightarrow e^m(x - 1) - e^x(x + 1) = 0 \\
&\Rightarrow e^m(x - 1) = e^x(x + 1) \\
&\Rightarrow e^m = e^x \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \\
&\Rightarrow m = \ln\left[e^x \times \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)\right] \\
&\Rightarrow m = \ln(e^x) + \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(\frac{x+1+1-1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$ ومنه:

لما	$m < f(-\sqrt{3})$	أي	$m \in]-\infty; f(-\sqrt{3})[$	للمعادلة حلان سالبان
لما	$m = f(-\sqrt{3})$			للمعادلة حل مضاعف هو $x = -\sqrt{3}$
لما	$f(-\sqrt{3}) < m < f(\sqrt{3})$	أي	$m \in]f(-\sqrt{3}); f(\sqrt{3})[$	للمعادلة لا تقبل حلول
لما	$m = f(\sqrt{3})$			للمعادلة حل مضاعف هو $x = \sqrt{3}$
لما	$m > f(\sqrt{3})$	أي	$m \in]f(\sqrt{3}); +\infty[$	للمعادلة حلان موجبان

(II) دراسة تغيرات الدالة g :

لدينا: $g(x) = \ln(f(x))$

نلاحظ أن: $g(x) = k \circ f = k(f(x))$ حيث: $k(x) = \ln x$

- حساب النهايات:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x)] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$

اذن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)] = +\infty$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x)] = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

لدينا: $f(x) > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\sqrt{3})$	$+\infty$

06

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

(1) / حساب $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right] = +\infty$$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right]$$

نضع $t = \ln x$ نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^2}{e^t} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^n}{e^t} \right] = 0 \text{ لأن}$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $x = 0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :- دراسة $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(2 \frac{1}{x} \ln x\right)(x) - (\ln x)^2}{x^2} \\ &= \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} \\ &= \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

$$\begin{aligned} 1) \ln x = 0 &\Rightarrow x = 1 \\ 2) 2 - \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = 2 \\ &\Rightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$2 - \ln x$	+		+	0
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$	0	$4e^{-2}$	0

(2) أ/ كتابة معادلة المماس (T_m) :

$$\begin{aligned}
 (T_m): y &= f'(m)(x - m) + f(m) \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) (x - m) + \frac{(\ln m)^2}{m} \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x - \frac{(2 - \ln m) \ln m}{m} + \frac{(\ln m)^2}{m} \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x + \frac{2(\ln m)^2 - 2 \ln m}{m} \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x + \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m}
 \end{aligned}$$

ب/ تعيين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0; 0)$:

(T_m) يشمل المبدأ معناه:

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) (0) + \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} \\
 &\Rightarrow \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} = 0 \\
 &\Rightarrow 2 \ln m (\ln m - 1) = 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 2 \ln m = 0 \\ \ln m - 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \ln m = 0 \\ \ln m = 1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = e \end{cases}
 \end{aligned}$$

ج/ كتابة معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها:

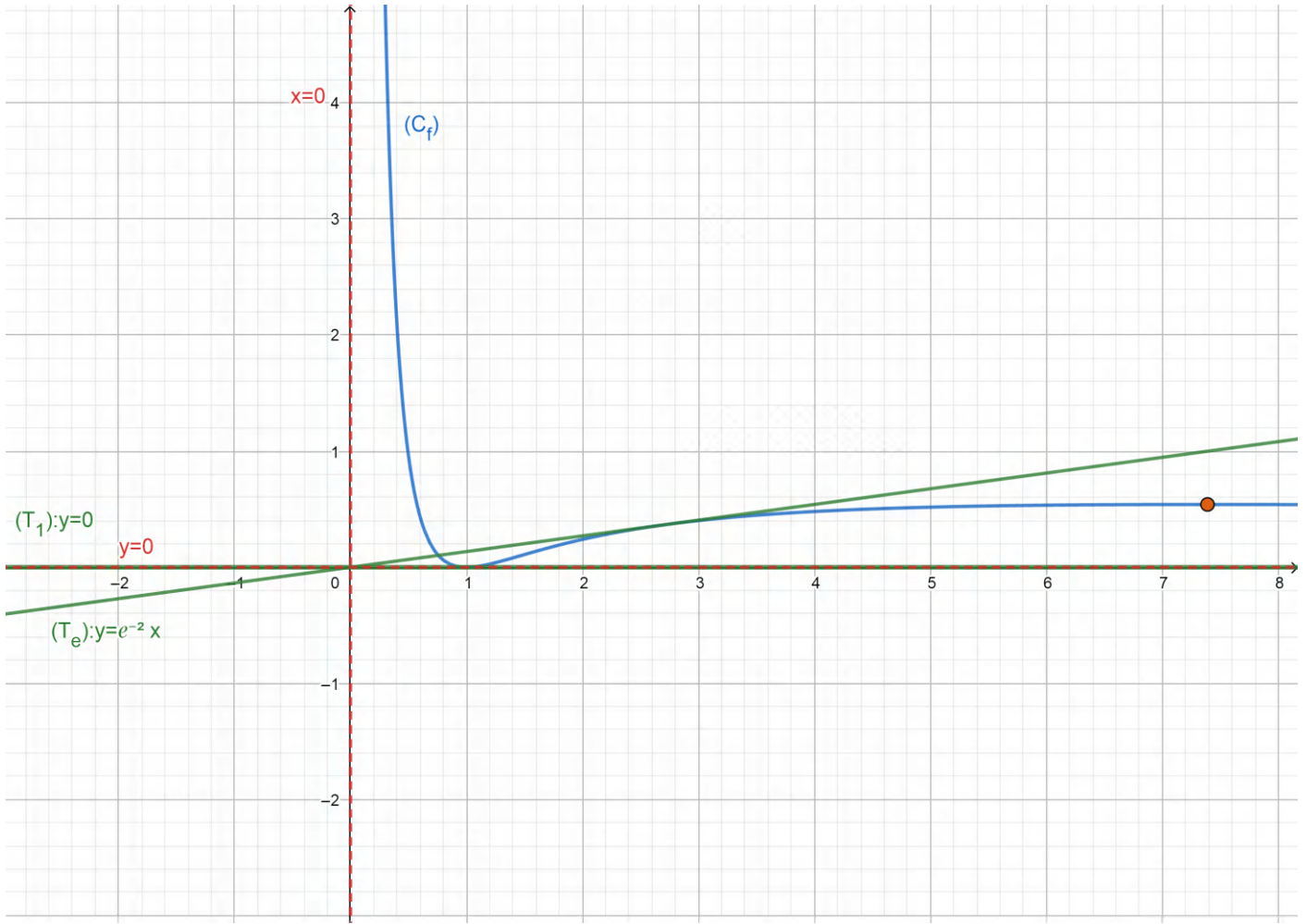
$$\begin{aligned}
 (T_1): y &= 0x + 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (T_e): y &= \left(\frac{(2 - 1) \times 1}{e^2} \right) x + \frac{2(1 - 1)}{e} \\
 &= \frac{1}{e^2} x \\
 &= e^{-2} x
 \end{aligned}$$

(3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=0$ و $y=0$
- نعين النقطة الحدية ذات الاحداثيات $(e^2; 4e^{-2})$
- نرسم المماسين: (T_e) و (T_1)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(II)

1) تبين أن الدالة g فردية:



دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية):

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \quad \text{لتبيين أن الدالة } f \text{ فردية} \quad \text{نبين أن}$$

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \quad \text{لتبيين أن الدالة } f \text{ زوجية} \quad \text{نبين أن}$$

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(\ln|-x|)^2}{-x} \\ &= -\frac{(\ln|x|)^2}{x} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة g فردية.

(2) تبين أنه يمكن رسم (C_g) منحنى الدالة g انطلاقاً من (C_f) :

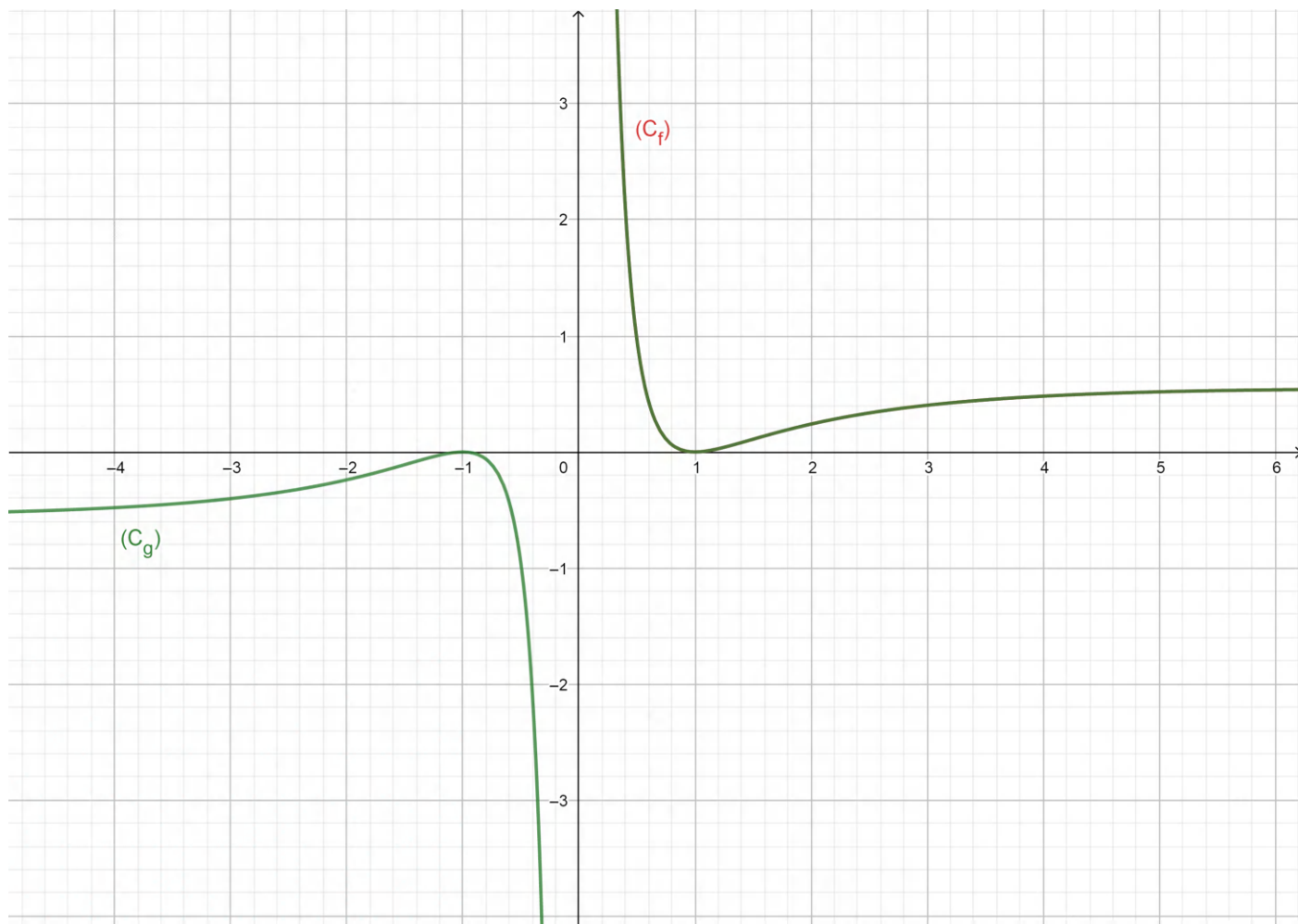
لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ \frac{(\ln(-x))^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ -\frac{(\ln(-x))^2}{-x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$: (C_g) ينطبق على (C_f)

ولما $x < 0$: (C_g) يناظر (C_g) بالنسبة للمبدأ

- تمثيل (C_g)



07

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{-\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right)}_{-\infty} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$.

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{x}_{+\infty} + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right)}_{+\infty} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

(2) أ/ تبين أن لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$ وأن لكل x من $]1; +\infty[$:

$$(x - 1) + \ln x \geq 0$$

نضع: الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $h(x) = x - 1 + \ln x$

لدينا:

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x}$$

لدينا: $h'(x) > 0$ ولدينا: $h(1) = 0$ ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نجد أن: لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$

وأن لكل x من المجال $[1; +\infty[$: $(x - 1) + \ln x \geq 0$

ب/ تبين أنه من أجل كل من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{2}{x} \ln x$$

$$= \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

$x > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة $h(x)$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

(3) دراسة الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحني (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln x \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \frac{1}{2} \ln x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

ومنه:

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$\frac{1}{2} \ln x - 1$	-	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	-	+

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما: $]0; 1[\cup]e^2; +\infty[$
- (C_f) يقطع (D) في النقطتين: $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ و $B\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$
- (C_f) تحت (D) لما: $]1; e^2[$.

(4) تعيين احداثي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيه المماس (T) موازيا للمستقيم (D) :

المماس (T) يوازي المستقيم (D) معناه:

$$\begin{aligned}
 f'(a) = 1 &\Rightarrow \frac{a - 1 + \ln a}{a} = 1 \\
 &\Rightarrow a - 1 + \ln a = a \\
 &\Rightarrow \ln a = 1 \\
 &\Rightarrow a = e
 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
 (T): y &= f'(e)(x - e) + f(e) \\
 &= x - e + e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

اذن المستقيم (T) مماس لـ (C_f) في النقطة $\omega(e; e)$

(5) أ/ تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x - (x - 1 + \ln x)}{x^2} \\
 &= \frac{x + 1 - x + 1 - \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{2 - \ln x}{x^2}
 \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها:

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2 - \ln x)$

$$\begin{aligned}
 2 - \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = 2 \\
 &\Rightarrow x = e^2
 \end{aligned}$$

ومنه:

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

لدينا $f''(x)$ تنعدم وتغير اشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $B\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $x = 0$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D)
- نعين A و B نقط تقاطع (D) مع (C_f)
- نرسم المماس: (T)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = x - 2m$ ومنه:

المعادلة لا تقبل حلول	$m > 0$	أي	$-2m < 0$	لما
المعادلة تقبل حل مضاعف	$m = 0$	أي	$-2m = 0$	لما
المعادلة تقبل حلان	$-\frac{1}{4} < m < 0$	أي	$0 < -2m < \frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حلان أحدهما مضاعف	$m = -\frac{1}{4}$	أي	$-2m = \frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حلان	$m < -\frac{1}{4}$	أي	$-2m > \frac{1}{2}$	لما

(I)

(1) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1) \right]$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{x}{x+1} \right] = -\frac{1}{0^+} = -\infty \text{ لأن:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1) \right]$$

$$= -\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2 \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1-2x-2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط

$$-(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-\infty$

(3) / حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

ب/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72 < \alpha < -0.71$:

$$h(0) = 0$$

اذن منحنى الدالة g يقطع محور الفواصل في المبدأ

$$g(-0.72) = -0.02 \quad \text{و} \quad g(-0.71) = 0.02$$

$$g(-0.72) \times g(-0.71) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.72; -0.71[$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$:

x	-1	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها وتفسير النتائج:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right]$$

$$\text{نضع: } k(x) = \ln(x+1)$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x+1)] \\ &= k'(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] &= \frac{1}{0^-} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] \\ &= \frac{1}{0^+} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$.

(2) أ/ تبين أنه من أجل كل x من D_f $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+1}x^2 - 2x \ln(x+1)}{x^4} \\ &= \frac{\frac{1}{x+1}x - 2 \ln(x+1)}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	-1	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$-$
x^3	$-$	$+$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	0

(3) تبين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2 \ln(\alpha+1) \\ &\Rightarrow 2 \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{\alpha+1} \\ &\Rightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2} \\ &= \frac{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha^2(\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} -0.72 < \alpha < -0.71 \\ 0.28 < \alpha + 1 < 0.29 \dots (*) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$-1.44 < 2\alpha < -1.42 \dots (**)$$

بضرب (*) في (**) نجد:

$$\begin{aligned} -0.41 < 2\alpha(\alpha + 1) < -0.39 \\ -2.56 < \frac{1}{2\alpha(\alpha + 1)} < -2.43 \end{aligned}$$

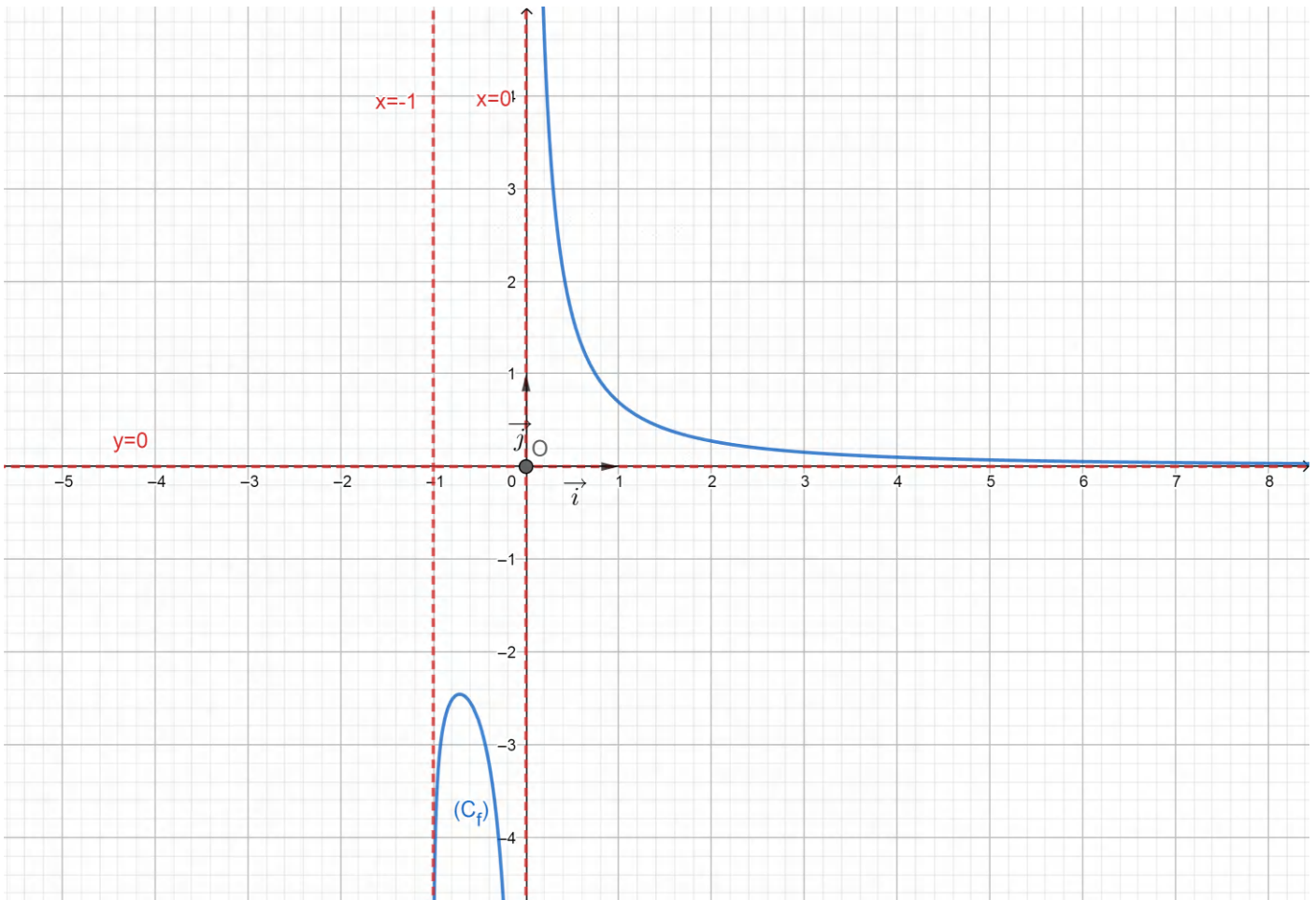
اذن:

$$-2.56 < f(\alpha) < -2.43$$

(4) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=0$ و $x=-1$ و $y=0$
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(5) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \ln m$ ومنه:

لما	$\ln m < f(\alpha)$	أي	$m < e^{f(\alpha)}$	للمعادلة حلان سالبان
لما	$\ln m = f(\alpha)$	أي	$m = e^{f(\alpha)}$	للمعادلة حل مضاعف
لما	$f(\alpha) < \ln m < 0$	أي	$e^{f(\alpha)} < m < 1$	للمعادلة لا تقبل حلول
لما	$\ln m > 0$	أي	$m > 1$	للمعادلة حل وحيد موجب

09

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) \right] \\ &= \ln \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= -\ln 2\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = -\ln 2$ ب/ تبين أن: $f(x) = x + \ln 2 + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{2e^{2x} \left(1 + \frac{1}{2e^{2x}} \right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)} \right) \\ &= \ln \left(\frac{2e^{2x}}{e^x} \right) + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2e^{2x}}}{1 + \frac{2}{e^x}} \right) \\ &= \ln(2e^x) + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right) \\ &= \ln 2 + x + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)\end{aligned}$$

ج/ استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln 2 + \underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)}_0 \right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

- دراسة $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{4e^{2x}(e^x + 2) - e^x(2e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)^2} \right)}{\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right)} \\ &= \frac{4e^{2x}(e^x + 2) - e^x(2e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)} \\ &= \frac{4e^{3x} + 8e^{2x} - 2e^{3x} - e^x}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)} \\ &= \frac{e^x(2e^{2x} + 8e^x - 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{cases} e^x > 0 \\ e^x + 2 > 0 \\ 2e^{2x} + 1 > 0 \end{cases}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^{2x} + 8e^x - 1)$:

$$2e^{2x} + 8e^x - 1 = 0$$

نضع $e^x = t$ أي $x = \ln t$

فنجد:

$$2t^2 + 8t - 1 = 0$$

لدينا:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(2)(-1) = 72 = (6\sqrt{2})^2$$

لدينا: $\Delta > 0$ ومنه:

$$\begin{aligned} \begin{cases} t_1 = \frac{-8 + 6\sqrt{2}}{4} = -2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ t_2 = \frac{-8 - 6\sqrt{2}}{4} = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ln t_1 = \ln \left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right) \\ x_2 = \ln t_2 \text{ (غير ممكن)} \end{cases} \end{aligned}$$

ولدينا أيضا $f(0) = 0$ ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$\ln\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\ln 2$	$f\left(\ln\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right)$	0	$+\infty$

3) أ/ تبين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته:

◀ شاهد هذا التذكير ▶

(اثبات ان منحني يقبل مستقيم مقارب مائل)

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right) \\
 &= x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) \\
 &= y + \varphi(x)
 \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases}
 \varphi(x) = \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) \\
 y = x + \ln 2
 \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$\begin{aligned}
 f(x) - y = 0 &\Rightarrow \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} = 1 \\
 &\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}e^{-2x} = 1 + 2e^{-x} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{-x} - 2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-x} - 2 &= 0 \\ \Rightarrow e^{-x} &= 4 \\ \Rightarrow -x &= \ln 4 \\ \Rightarrow x &= -\ln 4 \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} x &> -\ln 4 \\ \Rightarrow -x &< \ln 4 \\ \Rightarrow e^{-x} &< 4 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-x} &< 2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-x} - 2 &< 0 \\ \Rightarrow e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{-x} - 2 \right) &< 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-2x} - 2e^{-x} &< 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-x} + 1 &< 2e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

لدينا: $2e^{-x} + 1 > 0$ يمكن القسمة عليه

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1} &< 1 \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{\frac{1}{2} e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1} \right) &< 0 \end{aligned}$$

ومنه لما $x > -\ln 4$: $f(x) - y < 0$

بنفس الطريقة نجد: لما $x < -\ln 4$: $f(x) - y > 0$

ومنه:

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما $x \in]-\infty; -\ln 4[$.
- (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الاحداثيات: $(-\ln 4; -\ln 2)$.
- (C_f) تحت (D) لما $x \in]-\ln 4; +\infty[$.

4) تبين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) تنتمي إليه - أي إلى (C_f) -

نحدد أولاً نقطة تقاطع المستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مع المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = -\ln 2$.
لدينا:

$$\begin{cases} y = x + \ln 2 \\ y = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \ln 2 = -\ln 4 \\ y = -\ln 2 \end{cases}$$

ومنه نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي $\omega(-\ln 4; -\ln 2)$

ولدينا: $f(-\ln 4) = -\ln 2$ ومنه $\omega \in (C_f)$

(5) كتابة معادلة للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا:

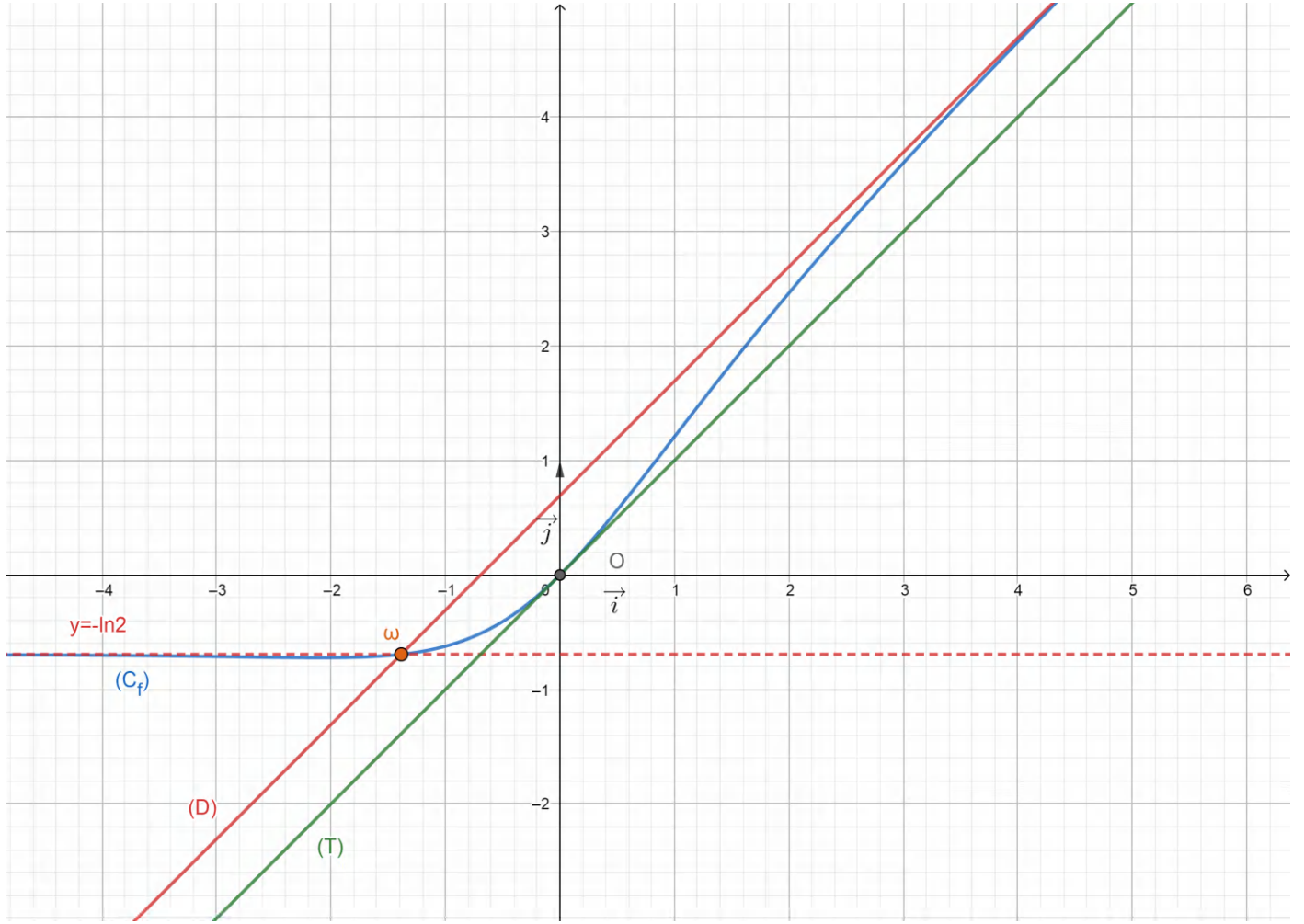
$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0) \\ = x$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مماس للمنحني (C_f) عند المبدأ.

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي: $y = -\ln 2$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D)
- نعيّن ω نقطة تقاطع المستقيمتين المقاربتين.
- نرسم المماس (T).
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 x - \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{me^x + 2m} \right) &= 0 \\
 \Rightarrow x &= \ln \left(\frac{1}{m} \frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) \\
 \Rightarrow x &= \ln \left(\frac{1}{m} \right) + \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) \\
 \Rightarrow x &= -\ln m + f(x) \\
 \Rightarrow f(x) &= x + \ln m
 \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m = x + \ln m$$

ومنه:

لما $\ln m < 0$ أي $m < 1$ المعادلة لا تقبل حلول
لما $\ln m = 0$ أي $m = 1$ للمعادلة حل مضاعف
لما $0 < \ln m < \ln 2$ أي $1 < m < 2$ للمعادلة حلان

لما	$\ln m = \ln 2$	أي	$m = 2$	للمعادلة حل مضاعف
لما	$\ln m > \ln 2$	أي	$m > 2$	للمعادلة حل وحيد

10

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{\ln x}_{-\infty} + \underbrace{x}_{0} - 3 \right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\ln x}_{+\infty} + \underbrace{x}_{+\infty} - 3 \right] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) تبين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا: $g(2.2) = -0.01$ و $g(2.11) = 0.002$

ولدينا: $g(2.2) \times g(2.11) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.2 < \alpha < 2.21$

3) تعيين إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

(1) حساب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(\underbrace{\ln x}_{+\infty} - 2 \right) \right]$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(\underbrace{\ln x}_{-\infty} - 2 \right) \right]$$

$$= +\infty$$

(2) أ/ حساب $f'(x)$ ، ودراسة اشارتها:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} (\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} (\ln x - 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} (\ln x - 2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{x^2} (\ln x + x - 3) \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) تعيين دون حساب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha^2} = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماس مواز لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α .

(4) تبين أن: $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \ln \alpha + \alpha - 3 = 0 \\ &\Rightarrow \ln \alpha = 3 - \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln \alpha - 2) \\
&= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(3 - \alpha - 2) \\
&= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(1 - \alpha) \\
&= \frac{(\alpha - 1)(1 - \alpha)}{\alpha} \\
&= \frac{-(\alpha - 1)^2}{\alpha}
\end{aligned}$$

(5) حل المعادلة $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = 0 \\ \ln x - 2 = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

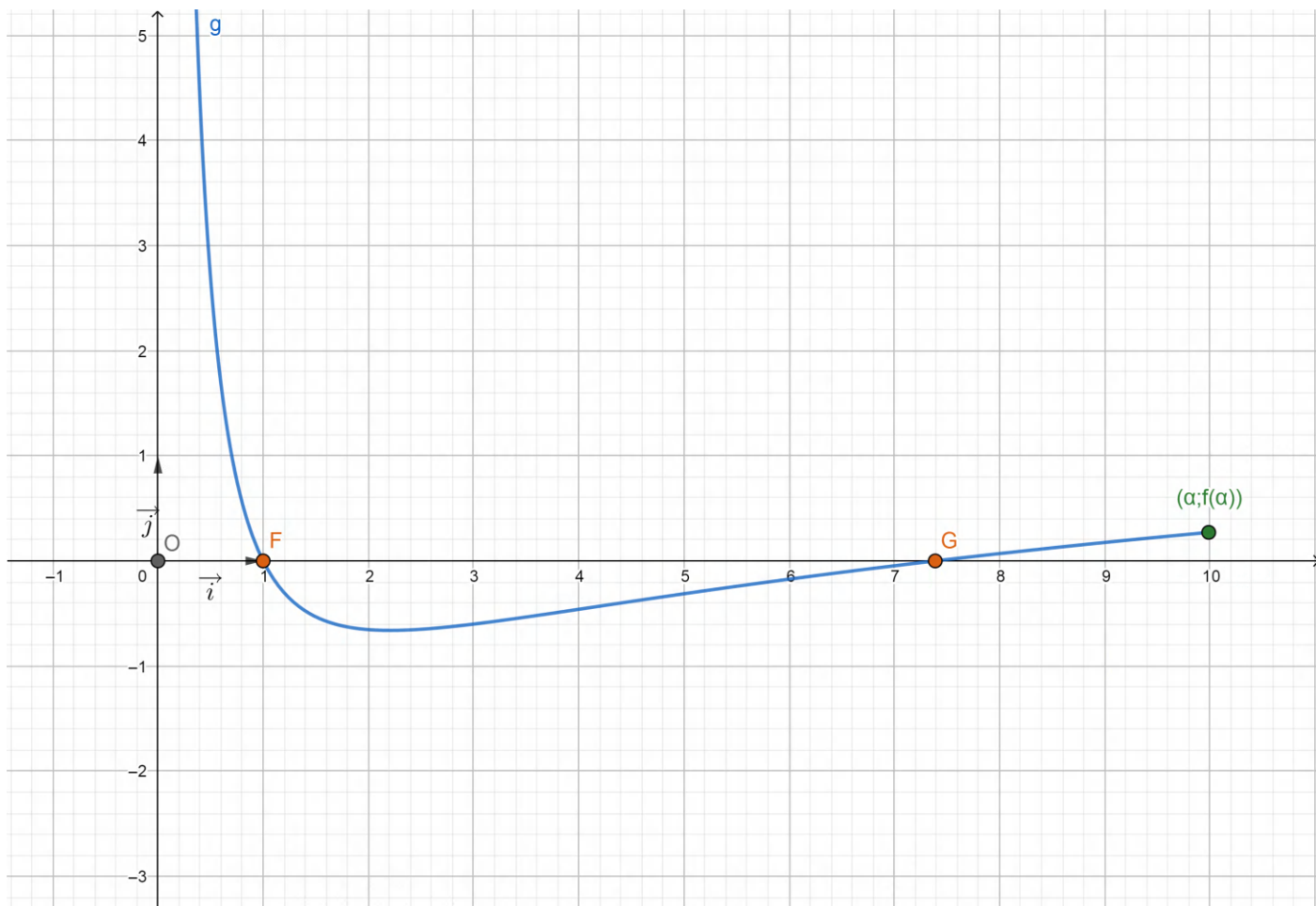
- التفسير الهندسي:

 (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين: $A(1; 0)$ و $B(e^2; 0)$.

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$
- نعين النقطتين A و B
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



11

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{x^2}_{+\infty} - 2 + \underbrace{\ln x}_{+\infty} \right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{x^2}_0 - 2 + \underbrace{\ln x}_{-\infty} \right] = -\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

لدينا: الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ومنه:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

لدينا $x > 0$ و $2x^2 + 1 > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) / تبين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$:

لدينا الدالة g مستمرة ومنتزعة على المجال $]0; +\infty[$

$$\text{ولدينا: } \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

ب/ التحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$:

لدينا: $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) = 0.02$

ولدينا: $g(1.31) \times g(1.32) < 0$ ، إذن $1.31 < \alpha < 1.32$

(3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

(1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{x^2}_{+\infty} + \left(2 - \underbrace{\ln x}_{+\infty} \right)^2 \right]$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{x^2}_0 + \left(2 - \underbrace{\ln x}_{-\infty} \right)^2 \right]$$

$$= +\infty$$

(2) تبين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$:

لدينا: الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

$$f'(x) = 2x + 2 \left(-\frac{1}{x} \right) (2 - \ln x)$$

$$= 2x - \frac{2(2 - \ln x)}{x}$$

$$= \frac{2(x^2 - 2 + \ln x)}{x}$$

$$= \frac{2}{x} g(x)$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

(3) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) تبين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2$$

$$= \alpha^2 + (2 - 2 - \alpha^2)^2$$

$$= \alpha^2 + \alpha^4$$

$$= \alpha^2(1 + \alpha^2)$$

وهو المطلوب.

(5) استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال: $]0; +\infty[$:

لدينا $f(\alpha) > 0$ ومنه نجد:

x	0	$+\infty$
$f(x)$		+

(III)

(1) تبين أن المسافة AM تُعطى بـ $AM = \sqrt{f(x)}$:

لدينا M نقطة من المنحني (C_h) فاصلتها x_m أي تكتب على الشكل:

$M(x; h(x))$ أي: $M(x; \ln x)$ ومنه المسافة AM تُعطى بـ:

$$AM = \sqrt{(x - 0)^2 + (\ln x - 2)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (-2 - \ln x)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2}$$

$$= \sqrt{f(x)}$$

(2) / برهان أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$:

نلاحظ أن:

$$k(x) = (u \circ f)(x)$$

حيث:

$$u(x) = \sqrt{x}$$

لدينا الدالة u متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$

والدالة f موجبة تماماً على $]0; +\infty[$

اذن $(u \circ f)(x)$ متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$

ومنه للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$

ب/ برهان أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) :

بما أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير في المجال $]0; +\infty[$

فإن الدالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي $x = \alpha$

ومنه المسافة أصغرية لما $x = \alpha$

إذن:

$$B(\alpha; \ln \alpha) \Leftrightarrow B(\alpha; 2 - \alpha^2)$$

ج/ برهان أن: $AB = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$:

$$AB = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2}$$

f دالة معرفة على مجال I
و g دالة معرفة على المجال (I)
• إذا كانت الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متزايدة على I
• إذا كانت الدالتين f و g متعاكستان في اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متناقصة على I

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} \\
&= \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} \\
&= |\alpha|\sqrt{1 + \alpha^2} \\
&= \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}
\end{aligned}$$

(3) تبرير أن المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (C_h) في النقطة B :

لدينا:

ميل المستقيم المماس لـ (C_h) في النقطة B هو:

$$h'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AB) هو :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\
&= \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha - 0} \\
&= -\frac{\alpha^2}{\alpha} \\
&= -\alpha
\end{aligned}$$

| تذكر أنه | ◀ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 ▶

لدينا:

$$-\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -1$$

ومنه المستقيم (AB) عمودي على مماس المنحنى (C_h) في النقطة B.