

الاشتقاقية

✧ الاشتقاقية: f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي x_0 و (C_f) تمثيلها البياني .

♠ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$ (حيث l عدد حقيقي)

فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0
♠ التفسير البياني : المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماسا معامل توجيهه $f'(x_0)$
و معادلة هذا المماس هي من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

♠ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0

♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y = f(x_0)$

♠ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0

♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس يوازي حامل محور الترتيب معادلته $x = x_0$

♠ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$ وكان $l_1 \neq l_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0

♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل نصفين مماسين عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ وتدعى A نقطة زاوية .

✧ مشتقات دوال مألوفة :

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (k عدد حقيقي)	0	\mathbb{R}
x	1	\mathbb{R}
x^n ($n \geq 2; n \in \mathbb{N}$)	nx^{n-1}	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}

✧ المشتقات والعمليات على الدوال : f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من \mathbb{R} و k عدد حقيقي

الدالة	$f + g$	kf	$f \times g$	$g = \frac{1}{f}$ (مع $f \neq 0$)	$\frac{f}{g}$ (مع $g \neq 0$)	$g = \sqrt{f}$ (مع $f \geq 0$)
المشتقة	$f' + g'$	kf'	$f' \times g + g' \times f$	$g' = -\frac{f'}{f^2}$	$\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$	$g' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

✧ مشتقة بعض الدوال :

الدالة	f^n	$f(x) = g(ax + b)$	$f(x) = \sin(ax + b)$	$f(x) = \cos(ax + b)$	$(g \circ f)(x)$
المشتقة	$nf'f^{n-1}$	$f'(x) = ag'(ax + b)$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$	$f'(x) \times g'(f(x))$

✧ نقطة الانعطاف :

إذا انعدمت المشتقة الثانية $f''(x)$ من أجل x_0 مغيرة إشارتها بجوار x_0 فإن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(x_0; f(x_0))$
♠ التفسير الهندسي : المماس (T) للمنحني (C_f) عند نقطة الانعطاف $A(x_0; f(x_0))$ يخترق المنحني (C_f) .

سلسلة تمارين الاشتقاقية

✓ التمرين 01

♠ ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند x_0 ماذا تستنتج ؟ ثم فسر النتيجة هندسيا في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{array}{ll} x_0 = -1 & ; \quad f(x) = x^2 - x \quad \blacklozenge [1] \\ x_0 = 0 & ; \quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 2 \quad \blacklozenge [2] \\ x_0 = 2 & ; \quad f(x) = \sqrt{x-2} \quad \blacklozenge [3] \\ x_0 = 1 & ; \quad f(x) = 2x|x-1| \quad \blacklozenge [4] \end{array}$$

✓ التمرين 02

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم .

- 1] \blacklozenge اكتب f دون رمز القيمة المطلقة .
2] \blacklozenge احسب $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ و $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟ ثم اعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة .
2] \blacklozenge اكتب معادلتَي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فصلتها $x_0 = 0$.

✓ التمرين 03

♠ ادرس تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها (D_f) في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{array}{ll} D_f = \mathbb{R} - \{-1\} ; \quad f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1} \quad \blacklozenge [3] & D_f = \mathbb{R} ; \quad f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7 \quad \blacklozenge [1] \\ D_f =] - 1; +\infty[; \quad f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \blacklozenge [4] & D_f = \mathbb{R} - \{-1\} ; \quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} \quad \blacklozenge [2] \end{array}$$

♠ احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \blacklozenge [4] \quad g(x) = f(x^3) \quad \blacklozenge [3] \quad g(x) = f(x^2) \quad \blacklozenge [2] \quad g(x) = f(3x+1) \quad \blacklozenge [1]$$

✓ التمرين 04

♠ نعتبر الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي : $f(x) = a + \frac{b}{x-3}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1] \blacklozenge عين العددين a و b إذا علمت أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الترتيب في النقطة

التي ترتيبتها $\frac{4}{3}$ ويقبل المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحني (C_f) .

♠ نفرض فيما يلي أن : $a = 2$ و $b = 2$.

2] \blacklozenge ادرس تغيرات الدالة f

3] \blacklozenge عين أحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الأحداثيات .

4] \blacklozenge بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كلا منهما يساوي -2 .

✓ التمرين 05 ◀

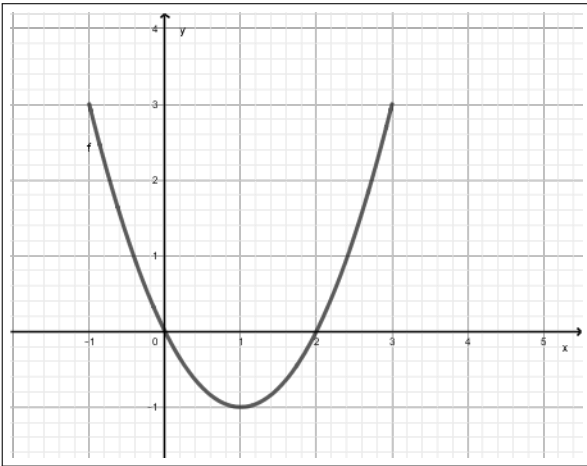
♠ f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = ax^3 + bx + c$. حيث a, b, c أعداد حقيقية .
[1] عين الأعداد الحقيقية a, b, c علما أن التمثيل البياني (C_f) الممثل للدالة f يشمل النقطة $A(1; -3)$ ويقبل في النقطة $B(0; 1)$ مماسا يوازي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -6x + 1$

♠ g هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$. حيث a و b عدنان حقيقيان .
[1] عين العددين a و b علما أن التمثيل البياني (C_g) الممثل للدالة g يقبل في النقطة $A(1; 2)$ مماسا يوازي محور الفواصل .
[2] بين أن للمنحنى (C_g) نقطة إنعطاف w يطلب تعيينها , ثم اكتب معادلة المماس ل (C_g) عندها .

♠ h هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$. حيث a و b عدنان حقيقيان .
[1] عين العددين a و b علما أن التمثيل البياني (C_h) الممثل للدالة h يقبل في النقطة $A(0; 3)$ مماسا معامل توجيهه 4 .

✓ التمرين 06 ◀

♠ f الدالة المعرفة على المجال $[-1; 3]$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



♠ بقراءة بيانية ♠

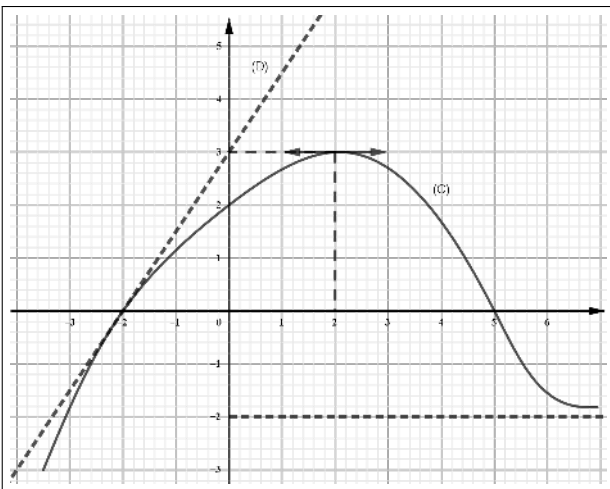
- [1] شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-1; 3]$
[2] عين إشارة $f(x)$ على المجال $[-1; 3]$.
[3] عين إشارة $f'(x)$ على المجال $[-1; 3]$.
♠ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-1; 3]$ كما يأتي : $g(x) = [f(x)]^2$
[4] احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g'(x)$.
[5] شكل جدول تغيرات الدالة g .
♠ نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[-1; 3]$ كما يأتي : $h(x) = [f(x)]^3$
[5] احسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.
[7] شكل جدول تغيرات الدالة h .

✓ التمرين 07 ◀

♠ المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} .

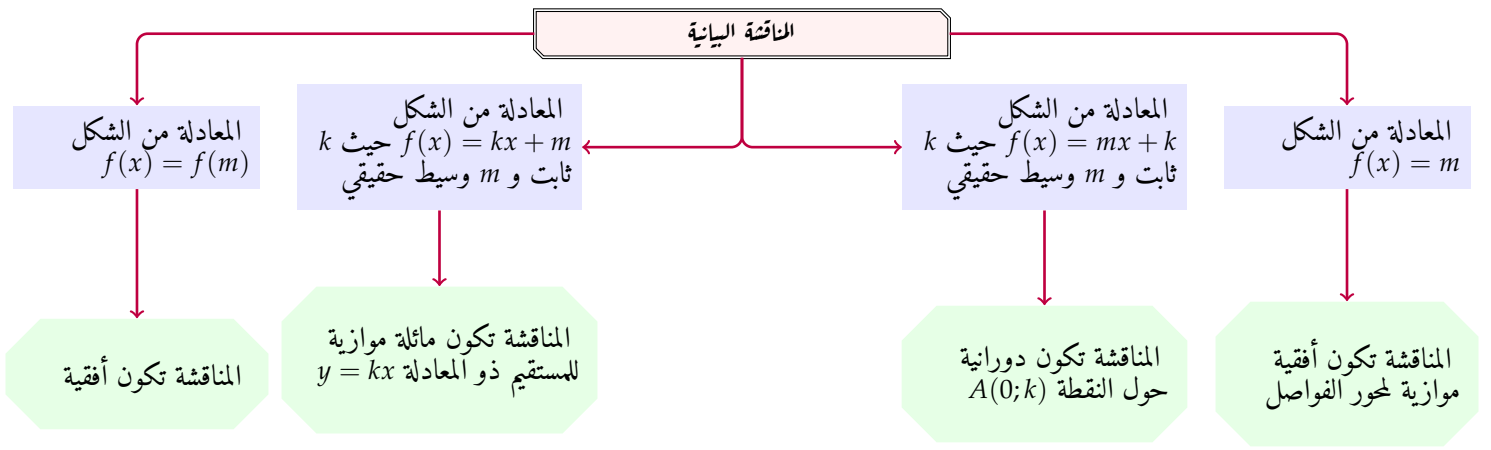
♠ بقراءة بيانية عين ♠

- [1] $f(0) = \dots\dots\dots$ $f(5) = \dots\dots\dots$ ♠
[2] $f(-2) = \dots\dots\dots$ $f(2) = \dots\dots\dots$ ♠
[3] $f'(-2) = \dots\dots\dots$ $f'(2) = \dots\dots\dots$ ♠
[4] $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$ ♠



- [5] معادلة المماس (D) : $y = \dots x + \dots$ ♠
[6] وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ♠
[7] حسب قيم x إشارة $f(x)$ ♠
[8] حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ♠
[9] شكل جدول تغيرات الدالة f ♠
[10] حلول المعادلة : $f(x) = 2$ ♠
[11] حلول المتراجحة : $f(x) \geq 2$ ♠

[12] ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m : عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = m$.



الدالة الزوجية:

إذا كانت $f(x) = f(-x)$ نقول أن الدالة f زوجية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب .

الدالة الفردية:

إذا كانت $f(-x) = -f(x)$ نقول أن الدالة f فردية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمركز المعلم .

الدالة الدورية:

إذا كانت $f(x+p) = f(x)$ نقول أن الدالة f دورية وتمثيلها البياني يعيد نفسه عند كل مجال طوله p .

مركز تناظر:

إذا كانت $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل مركز تناظر هو النقطة $A(\alpha; \beta)$.

محور التناظر:

إذا كانت $f(2\alpha - x) = f(x)$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$.

التقاطع مع محور الفواصل:

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ونجد فواصل هذه النقط مع العلم أن ترتيباتها معدومة .

التقاطع مع محور الترتيب:

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الترتيب نحسب $f(0)$ ونجد ترتيبات هذه النقط مع العلم أن فواصلها معدومة .

استنتاج تمثيل بياني من آخر:

① إذا كانت $h(x) = |f(x)|$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل .

و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل .

② إذا كانت $h(x) = f(|x|)$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) لما يكون $x > 0$.

و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب لما يكون $x < 0$.

③ إذا كانت $h(x) = -f(x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .

④ إذا كانت $h(x) = f(-x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب .

⑤ إذا كانت $h(x) = f(x+a) + b$ فإن (C_h) هو صورة (C_f) بالإسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a, b)$.

⑥ إذا كانت $h(x) = -f(-x)$ فإن (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمركز المعلم .