

تمرين جيد في الحساب للمراجعة و التدريب

نص التمرين :

- نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $a_n = 2 \times 5^n + 7$.
- (1) أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : a_n فردي .
 ب - عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 8 .
 ج - إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $a_n \equiv 1[8]$.
- (2) أ - برهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x \equiv 257[1000]$.
 ب - بين أنه من أجل كل $n \geq 3$ يكون : $a_n \equiv 257[1000]$.
 ج - ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2 \times 5^{2021} + 7)(2 \times 5^{2020} + 7)$ ؟
- (3) أ - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.
 ب - نعتبر $PGCD(a_{2n}; a_{2n+1}) = d$ ، بين أن d يختلف عن 7 .
 ج - جد عندئذ d .

حل مقترح للتمرين :

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

- (1) أ - نلاحظ أن a_n هو عبارة عن مجموع عددين أحدهما زوجي (2×5^n) و الآخر فردي (7) إذن : هو فردي .
أو بطريقة أخرى لدينا : $a_n = 2 \times 5^n + 7$ أي : $a_n = 2 \times 5^n + 2 \times 3 + 1$ و منه : $a_n = 2(5^n + 3) + 1$ و هذا ما يدل على أن a_n فردي .

ب - نجد : $5^0 \equiv 1[8]$ ، $5^1 \equiv 5[8]$ ، $5^2 \equiv 1[8]$.

إذن : من أجل $n = 2k$ يكون : $5^n \equiv 1[8]$ و من أجل $n = 2k + 1$ يكون : $5^n \equiv 5[8]$.

ج - نميز حالتين :

- حالة : $n = 2k$ (زوجي) فإن : $5^n \equiv 1[8]$ أي : $2 \times 5^n \equiv 2[8]$ أي : $2 \times 5^n + 7 \equiv 9[8]$ و منه : $a_n \equiv 1[8]$.
 حالة : $n = 2k + 1$ (فردي) فإن : $5^n \equiv 5[8]$ أي : $2 \times 5^n \equiv 10[8]$ أي : $2 \times 5^n + 7 \equiv 17[8]$ و منه : $a_n \equiv 1[8]$.
 من الحاتين السابقتين نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $a_n \equiv 1[8]$.

(2) أ- لنبرهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x \equiv 257[1000]$.

لدينا : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \times 125 \\ x \equiv 7[125] \times 8 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 125x \equiv 125[1000] \\ 8x \equiv 56[1000] \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} 125x \equiv 125[1000] \\ 128x \equiv 896[1000] \end{cases}$ بالطرح نجد : $3x \equiv 771[1000]$

بضرب هذه الأخيرة في 3 نجد : $9x \equiv 2313[1000]$ و نعلم أن : $2313 \equiv 313[1000]$ أي : $9x \equiv 313[1000]$
و منه تصبح : $\begin{cases} 9x \equiv 313[1000] \\ 8x \equiv 56[1000] \end{cases}$ بالطرح نتحصل على : $x \equiv 257[1000]$ هو المطلوب .

أو بطريقة أخرى :

لدينا : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 8\alpha + 1 \\ x = 125\beta + 1 \end{cases}$ و منه : $8\alpha + 1 = 125\beta + 1$ أي : $8\alpha = 125\beta$ أي : $8\alpha \equiv 0[125]$ و منه : $8\alpha \equiv 6[125]$ أي : $8\alpha \equiv 6[125]$ و منه : $4\alpha \equiv 3[125]$ أي : $124\alpha \equiv 93[125]$ و نعلم أن : $125\alpha \equiv 0[125]$ بالطرح نجد : $\alpha \equiv -93[125]$ و منه : $\alpha \equiv 32[125]$ أي : $\alpha = 125k + 32$ نعوض قيمة α في : $x = 8\alpha + 1$ نجد : $x = 8(125k + 32) + 1$ أي : $x = 1000k + 257$ و هذا ما يدل على أن : $x \equiv 257[1000]$.

ب - لدينا من أجل $n \geq 3$ يكون : 5^n مضاعفا لـ 125 مثلا $(5^3 = 125)$.

إذن : من أجل $n \geq 3$ فإن : $5^n \equiv 0[125]$ أي : $2 \times 5^n + 7 \equiv 7[125]$ و بالتالي يكون : $a_n \equiv 7[125]$.

لدينا مما سبق أن : $a_n \equiv 1[8]$ و $a_n \equiv 7[125]$ إذن حسب السؤال (أ) فإن : $a_n \equiv 257[1000]$ هو المطلوب .

ج - لدينا : $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7) = a_{2020} \times a_{2021}$.

حسب ما سبق لدينا : $\begin{cases} a_{2020} \equiv 257[1000] \\ a_{2021} \equiv 257[1000] \end{cases}$ أي : $a_{2020} \times a_{2021} \equiv 257^2[1000]$ و منه : $a_{2020} \times a_{2021} \equiv 66049[1000]$

إذن : $a_{2020} \times a_{2021} \equiv 49[1000]$ و هذا ما يدل على أن آخر ثلاث أرقام للعدد $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$ هي : $\boxed{049}$

(3) أ - لدينا : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 5(2 \times 5^{2n} + 7) - (2 \times 5^{2n+1} + 7)$ أي : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 2 \times 5^{2n+1} + 35 - 2 \times 5^{2n+1} - 7$ إذن : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.

ب - لدينا : $PGCD(a_{2n}, a_{2n+1}) = d$ أي أن : $d \mid a_{2n}$ و $d \mid a_{2n+1}$ ، لكن : $a_{2n} = 2 \times 5^{2n} + 7$ و نعلم أن : (2×5^{2n}) ليس مضاعفا لـ 7 إذن : a_{2n} فردي و لا يقبل القسمة على 7 إذن : $d \neq 7$.

ج - إيجاد قيم d :

لدينا : $PGCD(a_{2n}, a_{2n+1}) = d$ أي أن : $d \mid a_{2n}$ و $d \mid a_{2n+1}$ إذن : $d \mid 5a_{2n} - a_{2n+1}$ و منه : $d \mid 28$.

و بالتالي قيم d الممكنة هي : 1, 2, 4, 7, 14, 28 لكن $d \neq 7$ و أيضا حسب السؤال (1) (أ) فإن : a_n فردي بالتالي فحسب الشروط السابقة نستنتج أن : $d = 1$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق