

المدة : 04 سا

اختبار في مادة الرياضيات

اختر احد الموضوعين الاتيين
الموضوع الاول

التمرين الأول (4.5 نقاط)

$$\begin{cases} \ln V_0 + \ln V_2 = 2 \ln 2 \\ e^{V_0} \times e^{V_1} = e^6 \end{cases}$$

1/ (V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدها الأول V_0 و أساسها q حيث

(أ) احسب V_0 و V_1 ثم استنتج قيمة الأساس q

(ب) نضع $V_0 = 4$ و $q = \frac{1}{2}$ عبر عن V_n بدلالة n ثم احسب $\lim V_n$

(ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \ln V_0 + \ln V_1 + \dots + \ln V_n$

2/ نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة \mathbb{N} على $U_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \sqrt{9U_n + 10}$

(أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $6 \leq U_n \leq 10$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

(ج) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(10 - U_n)$

(د) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 10 - U_n \leq V_n$

(هـ) استنتج نهاية المتتالية (U_n)

التمرين الثاني (4 نقاط)

اختر الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الاتية

1/ - صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و 4 سوداء و صندوق U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 1 كرية زرقاء

جميع الكرات متماثلة. نسحب عشوائيا كرية واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة فان امله الرياضي هو :

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) 1

- نضيف n كرية سوداء الى الصندوق U_1 و n كرية حمراء الى الصندوق U_2

ونسحب كرية من الصندوق U_1 و كرية من الصندوق U_2

فان قيمة n بحيث يكون احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين $\frac{7}{12}$ هي

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3

2/ - الشكل الاسي للعدد المركب $Z = \sin \theta + i \cos \theta$ هو

(أ) $e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$ (ب) $2e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$ (ج) $e^{i(\pi - \theta)}$

- العدد : $(1 + i)^{1442}$ يساوي

(أ) 2^{721} (ب) $i 2^{721}$ (ج) $2^{721}(1 + i)$

التمرين الثالث (4.5 نقاط)

1/ نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) ذات المجهول (x, y) التالية (E) $2021x - 2020y = 5 \dots$

(ا) بين ان العددين 2020 و 2021 اوليان فيما بينهما و استنتج ان المعادلة (E) تقبل حولا

(ب) بين انه اذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فان $x \equiv 0 [5]$

(ج) استنتج حلا خاصا (x_0, y_0) حيث $2022 \leq x_0 \leq 2027$ ثم حل المعادلة (E)

2/ عين الاعداد الصحيحة النسبية a بحيث :
 $\begin{cases} a \equiv 5 [2020] \\ a \equiv 0 [2021] \end{cases}$

3/ (ا) ادرس و حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 9

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0 [9]$

(ج) عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث : $5^{y-x} \equiv 8 [9]$

التمرين الرابع (7 نقاط)

I - g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 1 - (2x + 1)\ln x$

1/ (ا) احسب $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g'

(ب) بين انه من اجل كل x من $]0; +\infty[$ $g'(x) < 0$

(ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و 0 ثم شكل جدول تغيراتها

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.83 < \alpha < 1.84$

3/ حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II - f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول

(على محور الفواصل 1cm و على محور الترتيب 4cm)

1/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و فسر النتيجةن هندسيا

2/ (ا) بين انه من اجل كل x من $]0; +\infty[$ $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3/ بين ان $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ و استنتج حصر $f(\alpha)$

4/ اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5/ أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f)

6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

7/ نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$: $h(x) = [f(x)]^2$

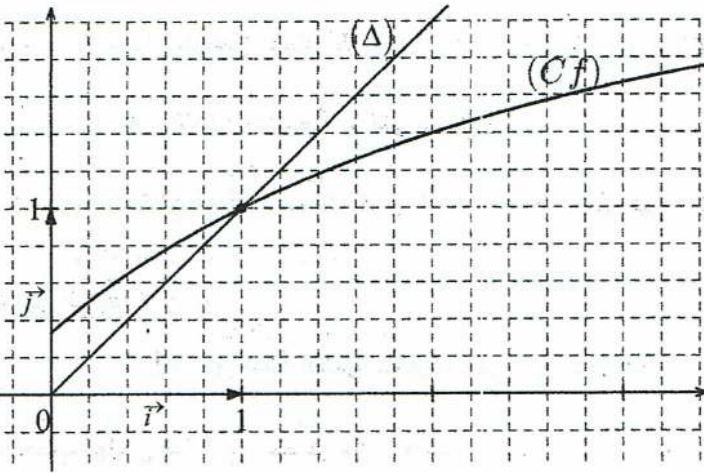
ادرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها

التمرين الأول (4,5 ن):

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$$

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على $[0; +\infty[$ بالعلاقة :

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعظم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$



و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$.

α عدد حقيقي موجب . المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول u_0

حيث $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = f(u_n)$

(I) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

(II) نضع في كل ما يلي $\alpha = 0$

(1) (أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود

u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حساب الحدود)

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

(2) (أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 1$

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً ، ثم برر تقاربها

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بالعلاقة : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

(أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول

(ب) عبر بدلالة n عن v_n ، ثم استنتج بدلالة n . احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = 1 + \frac{v_{2021}}{v_{2020}} + \dots + \frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$

(5) احسب بدلالة n المجموع T حيث : $T = \ln(|v_n|) + \ln(|v_{n+1}|) + \dots + \ln(|v_{n+2019}|)$

التمرين الثاني (4 ن):

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :

و 5 كريات خضراء مرقمة كما يلي : 2, 2, 1, 0, 0

5 كريات حمراء مرقمة كما يلي : 2, 2, 1, 1, 0

نسحب عشوائياً من الكيس 4 كريات في آن واحد

(1) احسب احتمال كلا من الأحداث التالية :

A : الحصول على 4 كريات من نفس اللون

B : الحصول على 4 كريات أرقامها يمكن أن تشكل العدد 2020

C : الحصول على 4 كريات مجموع أرقامها يساوي 4

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب 4 كريات الرقم الأكبر من بين الأرقام الأربعة

(أ) عين قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون احتماله

(ب) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

(ج) احسب احتمال الحدث : $|X - 1| = 1$

التمرين الثالث (4,5 ن):

- (1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5
 (2) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على 5
 (3) بين أن العدد 131 أولي

(4) a و b عدنان طبيعيين حيث $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$

$$\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ a \times b = 5m \end{cases}$$

(أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق :

(ب) استنتج قيمة n بحيث يكون $7 < n < 15$ ؛ ثم عين الثنائيات (a, b)

التمرين الرابع (7 ن):

$$g(x) = 1 - (1 + 2x)e^{2x}$$

(I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة :

- (1) أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$
 (2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها
 (3) أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}

$$f(x) = x + 3 - xe^{2x}$$

(II) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة :

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- (1) أحسب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$
 (2) أ- بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مانلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له
 ب- أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)
 (3) أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = g(x)$
 ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها
 (4) أ- بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاها على الترتيب α و β حيث:
 $-3,05 < \alpha < -3$ و $0,75 < \beta < 0,8$
 ب- بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له
 ج- أنشئ (T) ؛ (Δ) و (C_f)

(5) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = x + m$

$$h(x) = \frac{1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}}{x}$$

(6) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* بالعلاقة :

أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

ب- أحسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها (دون حساب عبارة الدالة h')

