

إعداد الأستاذ بن علو - ثانوية ابن رستم تيارت -

- n عدد طبيعي غير معلوم. نرسم بالرمز $n!$ للجداء $1 \times 2 \times \dots \times n$ و يُقرأ " n عاملي "
- اصطلاحاً نكتب: $0! = 1$
- خاصية: من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(n+1)! = (n+1)n!$
- المبادئ الأساسية للعد:

أ- مبدأ المجموع: E مجموعة منتهية ، A_1 ، A_2 ؛ .. ؛ A_p تجزئة من E . $card(A_1) + card(A_2) + \dots + card(A_p) = card(E)$
 ب- مبدأ الجداء: إذا كان وضع يشمل على p مرحلة ذات n_1 ؛ n_2 ؛ .. ؛ n_p إمكانيات، فإن عدد الإمكانيات هو: $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$
 2- قوائم عناصر مجموعة منتهية:

- عدد القوائم ذات p عنصر من E هو n^p
- عدد القوائم ذات p عنصر من E متميزة متى متى هو: $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$ مع $1 \leq p \leq n$
- نسمي توفيق p عنصر من E ، كل جزء من E له p عنصر. عددها $\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

خواص: $C_n^p = C_n^{n-p}$ ، $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ ، المثلث العددي (مثلث باسكال):

- دستور ثنائي الحد: $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$
الاحتمالات

1. قانون الاحتمال: نسمي قانون احتمال p ، كل دالة تفرق بكل حادثة من Ω عدد حقيقي من المجال $[0;1]$ ، تحقق: $p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1$

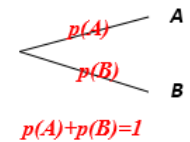
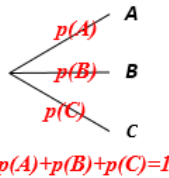
حالة خاصة: عند تساوي الاحتمالات $\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = p(A)$

ج- خواص:

- $0 \leq p(A) \leq 1$ حادثة A
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ ($A \cap B = \emptyset$) أي A و B حادثتان غير متلامتان
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ A و B حادثتان كئيفيتان
- $p(\overline{A}) + p(A) = 1$ و $p(\emptyset) = 0$ و $p(\Omega) = 1$. \overline{A} الحادثة المعاكسة للحادثة A
- 2. الاحتمالات الشرطية: احتمال الحادثة B علماً أن A محققة، هو $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

3. قواعد استعمال شجرة:

■ القاعدة 01 " قانون العقدة " : مجموع الاحتمالات المكتوبة على الفروع المرسومة من نفس العقدة يساوي 1



■ القاعدة 02: احتمال الحادثة الممثلة بمسار تساوي جداء الاحتمالات المكتوبة في فروع هذا المسار.

$p(A) \times p_A(B) = p(A \cap B)$

$p(A) \times p_A(B) \times p_{A \cap B}(C) = p(A \cap B \cap C)$

4. الاحتمالات الكلية: $p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n)p_{A_n}(B)$

القاعدة 03: احتمال الحادثة E هو مجموع احتمالات كل المسارات المؤدية للحادثة E .

5. الاستقلالية: A و B مستقلتان بالنسبة إلى الاحتمال p يعني أن: $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ يعني أن $p_A(B) = p(B)$

6. المتغير العشوائي: نسمي متغير عشوائي، كل دالة عديدة معرفة على Ω . الأمّل الرياضي: $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

التباين: $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$
الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

7. قانون ثنائي الحد: ليكن X متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n, p)$. الأمّل الرياضي: $E(X) = np$ ، $V(X) = np(1-p) = npq$ ، $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ التباين:

تمرين محلولة على الاحتمالات

التمرين 1:

يبدأ لاعب لعبة تشمل عدة جولات متتابعة. احتمال أن يخسر في الجولة الأولى هو $0,2$. تجري اللعبة في ما بعد بالطريقة التالية: إذا ربح في جولة ما فإن احتمال أن يخسر الموالية هو $0,05$ وإذا خسر في جولة ما فإن احتمال أن يخسر الموالية هو $0,1$. نسمي: E_i : الحادثة: "اللاعب يخسر الجولة i " مع i عدد طبيعي غير معدوم و $p_i = p(E_i)$ نسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يخسر اللاعب خلال الجولات الثلاثة الأولى. يمكن الاستعانة بشجرة.

1. أ - ما هي قيم X ؟

ب - بين أن $p(X=2)=0,031$

ج - عين قانون احتمال X .

د - أحسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير X .

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_{n+1}=0,05p_n+0,05$

3. (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = p_n - \frac{1}{19}$

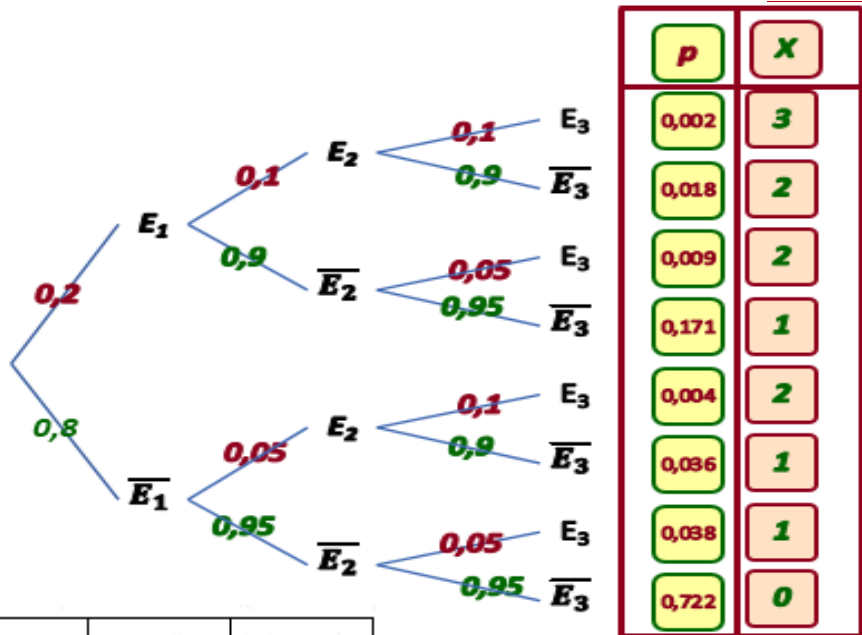
أ- بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- استنتاج، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، u_n ثم p_n بدلالة n .

ج- أحسب النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

الحل المفصل للتمرين الأول

الشجرة المثقلة:



1. أ - قيم X : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

ب - نبين أن احتمال الحادثة $p(X=2)=0,031$:

$$p(X=2)=0,018+0,009+0,004=0,031$$

ج - قانون احتمال X :

د - حساب الأمل الرياضي و التباين للمتغير X :

$$E(X^2)=0,387 \quad , \quad E(X)=0,313$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0,387 - (0,313)^2 = 0,289031$$

2. استنتاج أن: $p_{n+1}=0,05p_n+0,05$

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_{n+1} \cap (E_n \cup \bar{E}_n)) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$$

$$p_{n+1} = 0,1p_n + 0,05(1 - p_n) = 0,05p_n + 0,05 \quad \text{أي}$$

3. أ - نبين أن (u_n) متتالية هندسية:

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = 0,05p_n + 0,05 - \frac{1}{19} = 0,05 \left(u_n + \frac{1}{19} \right) - \frac{0,05}{19} = 0,05u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=0,05$ وحدها الأول $u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0,2 - \frac{1}{19} = \frac{14}{95}$

ب - استنتاج، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، u_n ثم p_n بدلالة n :

$$p_n = u_n + \frac{1}{19} = \frac{14}{95}(0,05)^{n-1} + \frac{1}{19} \quad \text{و} \quad u_n = u_1q^{n-1} = \frac{14}{95}(0,05)^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{19}$$

ج - حساب النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$:

x_i	0	1	2	3	المجموع
p_i	0,722	0,245	0,031	0,002	1
$x_i \cdot p_i$	0	0,245	0,062	0,006	0,313
$x_i^2 \cdot p_i$	0	0,245	0,124	0,018	0,387

التمرين 2: يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء وكرتان سوداوان لا نفرق بينها عند اللمس.
1- نقوم بثلاث سحب متتابعة عشوائيا لكرة حسب الطريقة التالية: بعد كل سحب إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء، نعيدها للكيس وإذا كانت سوداء لا نعيدها إلى الكيس. ليكن X عدد الكرات السوداء المسحوبة بعد كل السحبات. يمكن الاستعانة بشجرة.
 أ - عين قيم X

ب - بين أن احتمال الحصول على الكرة السوداء الوحيدة المسحوبة في السحب الثاني هو $\frac{8}{45}$

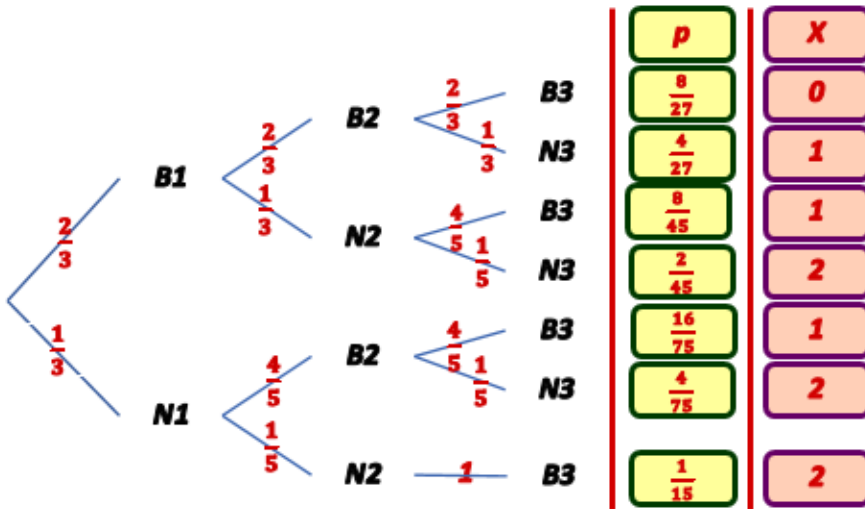
ج - أحسب $p(X=1)$

2- عين قانون احتمال X وأحسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير X

3- نرجع إلى الكيس في حالته الأصلية: 4 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس. ليكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 3 نقوم بـ n سحب متتابعة بنفس الطريقة السابقة. ليكن k عدد طبيعي محصور بين 1 و n .

لتكن E الحادثة: " الكرة المسحوبة ذات الرتبة k سوداء و كل الكرات الأخرى المسحوبة بيضاء" و A الحادثة: " نحصل على كرة بيضاء في كل السحبات $k-1$ الأولى وكرة سوداء في السحبة ذات الرتبة k " و C الحادثة: " نحصل على كرة بيضاء في كل من $(n-k)$ السحبات الأخيرة"
 أحسب $p(A)$ ، $p_A(C)$ و $p(E)$.

الحل المفصل للتمرين الثاني



1- إنشاء شجرة:

أ - قيم X : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

ب - نبين أن احتمال الحصول على الكرة

السوداء الوحيدة المسحوبة في السحب الثاني هو $\frac{8}{45}$

$$p(BNB) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$$

ج - حساب $p(X=1)$:

$$p(X=1) = \frac{4}{27} + \frac{8}{45} + \frac{16}{75} = \frac{364}{675}$$

2- قانون احتمال X والأمل الرياضي والتباين لـ X

x_i	0	1	2	المجموع
$p_i = p(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{364}{675}$	$\frac{37}{225}$	1
$x_i \cdot p_i$	0	$\frac{364}{675}$	$\frac{74}{225}$	$E(X) = 0,868$
$x_i^2 \cdot p_i$	0	$\frac{364}{675}$	$\frac{148}{225}$	$E(X^2) = 1,197$

الأمل الرياضي: $E(X) = 0,868$

التباين: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1,197 - 0,868^2 = 0,444$

الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,666$

3- حساب $p(A)$:

$$p(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2^{k-1}}{3^k}, \quad A = \left(\underset{\text{مرة}(k-1)}{BBB \dots B} N \right)$$

4- حساب $p_A(C)$: نعلم أنه في السحب k ، سحبنا كرة سوداء و بالتالي تبقى كرة سوداء

$$p_A(C) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

5- حساب $p(N)$: $E = A \cap C = \left(\underset{\text{مرة}(k-1)}{BBB \dots B} \underset{\text{مرة}(n-k)}{NBB \dots B} \right)$

$$p(E) = p(A) \times p_A(C) = \frac{2^{k-1}}{3^k} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} = \frac{2^{2n-k-1}}{3^k \times 5^{n-k}} \quad \text{يكافئ} \quad p_A(C) = \frac{p(A \cap C)}{p(A)} = \frac{p(N)}{p(A)} \quad \text{لدينا:}$$

المبرين: 3

- بالنسبة للمربي الأول، بين اليوم الأول والشهر، 20% من الطيور ماتت و 70% تصبح ملونة و 10% تبقى بيضاء.
 - بالنسبة للمربي الثاني، بين اليوم الأول والشهر، 7% من الطيور ماتت و 80% تصبح ملونة و 13% تبقى بيضاء.
- 1- بائع طيور اشترى كتاكيت عمرها يوم واحد: 70% من المربي الأول و 30% من المربي الثاني.

يشترى طفل طائر من عند البائع يوم بعد وصولها إلى محل البائع، أي عمره يومان.

أ - بين أن احتمال أن يكون الطائر حيا بعد شهر هو 0,839.

ب - عين احتمال أن يكون الطائر ملون بعد شهر.

ج - علما أن الطائر بقي أبيض بعد شهر، ما احتمال أن يكون من عند المربي الأول؟

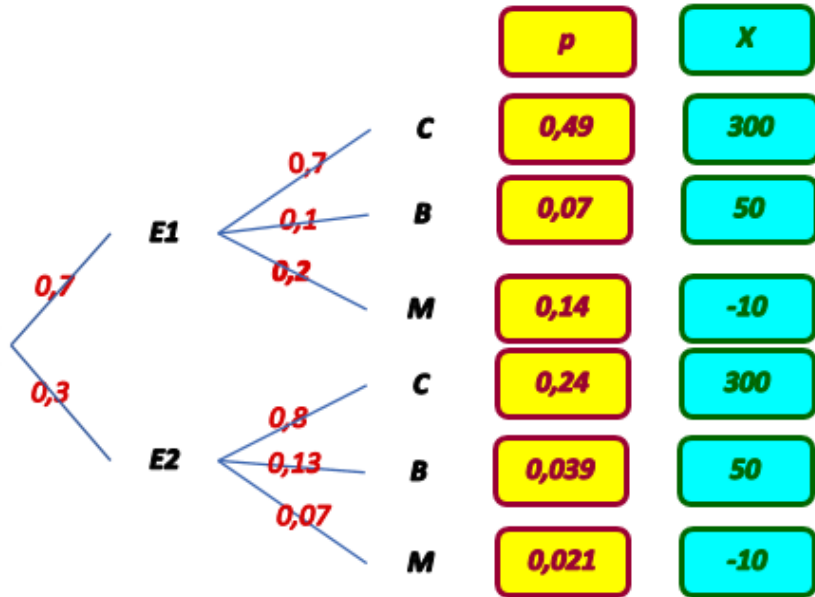
2- يختار شخص عشوائيا وبطريقة مستقلة خمسة طيور من عند البائع يوم بعد وصولها إلى محل البائع.

ما احتمال أن تبقى بعد شهر، ثلاثة فقط حية؟

3- قرر بائع الطيور الاحتفاظ بالطيور حتى يظهر لونها أي بعد شهر لكي يبيعه بلونها النهائي. يربح € 300 عن كل طائر ملون و € 50 عن كل طائر أبيض و يخسر € 10 عن كل طائر مات. نسمي X المتغير العشوائي المساوي للربح الجبري لبائع الطيور عن كل طائر اشتراه. عين قانون الاحتمال لـ X وأمله الرياضي.

الحل المفصل

الشجرة:



1- أ - نبين أن احتمال أن يكون الطائر حي بعد شهر هو 0,839:

$$p(V)=0,8 \times 0,7 + 0,93 \times 0,3 = 0,839$$

ب - احتمال أن يكون الطائر ملون بعد شهر: $p(C)=0,7 \times 0,7 + 0,8 \times 0,3 = 0,73$

ج - علما أن الطائر بقي أبيض بعد شهر، ما احتمال أن يكون من عند المربي الأول؟

$$p_B(E1) = \frac{p(B \cap E1)}{p(B)}$$

$$p(B)=0,1 \times 0,7 + 0,13 \times 0,3 = 0,109 \quad \text{و} \quad p(B \cap E1) = 0,1 \times 0,7 = 0,07$$

$$p_B(E1) = \frac{p(B \cap E1)}{p(B)} = \frac{0,07}{0,109} \approx 0,642$$

2- احتمال أن تبقى بعد شهر، ثلاثة فقط حية:

ليكن Y عدد الطيور التي تبقى حية بعد شهر. Y يتبع قانون ثنائي الحد ذو الوسيطين $n=5$ و $p=p(V)=0,839$.

$$p(Y = 3) = C_5^3 p^3 (1 - p)^2 = 10 (0,839)^3 (0,161)^2 \approx 0,153$$

3- تعيين قانون الاحتمال لـ X وأمله الرياضي:

$$X = \{-10 ; 50 ; 300\}$$

$$p(X=50)=p(B)=0,109 \quad p(X=300)=p(C)=0,730$$

$$p(X = -10) = p(\bar{V}) = 1 - p(V) = 1 - 0,839 = 0,161$$

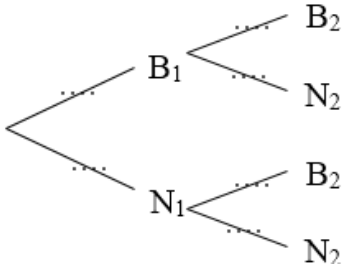
■ قانون الاحتمال:

x_i	-10	50	300	المجموع
p_i	0,161	0,109	0,730	1
$x_i p_i$	-1,61	5,45	219	$E(X)=222,84$

$$E(X)=222,84 \text{ DA} \quad \text{■ الأمل الرياضي:}$$

التمرين 4: صندوقان U_1 و U_2 يحتويان على كرات غير معروفة عند اللبس.

U_1 يحتوي على k كرة بيضاء (k عدد طبيعي أكبر أو يساوي 1) و 4 كرات سوداء. U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء. نسحب عشوائياً كرة من U_1 ونضعها في U_2 . نسحب عشوائياً بعد ذلك كرة من U_2 . مجموع هذه العمليات تمثل اختباراً. نسمي B_1 الحادثة "الكرة المسحوبة من U_1 بيضاء" و N_1 الحادثة "الكرة المسحوبة من U_1 سوداء". نسمي B_2 الحادثة "الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء" و N_2 الحادثة "الكرة المسحوبة من U_2 سوداء".



1- أ- أنقل وأتمم الشجرة.
ب- بين أن احتمال الحادثة B_2 يساوي $\frac{4k+12}{5k+20}$.

2- فيما تبقى نأخذ $k=10$.

راهن أحمد DA 20 وقام باختبار (سحب كرة من U_1 ووضعها في U_2 ثم سحب بعد ذلك كرة من U_2). إذا كانت الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء فيربح 30DA وإلا فلا يحصل على شيء ويخسر رهانه. ليكن X المتغير العشوائي المساوي للربح الجبري لأحمد أي الفرق بين المبلغ المحصل عليه والمبلغ الذي رآه.

أ- عين قيم X

ب- عين قانون احتمال X واحسب أمله الرياضي.

ج- هل اللعبة ملائمة لأحمد؟

3- يشارك أحمد n مرة متتالية لهذه اللعبة. في بداية كل لعبة U_1 يحتوي على 10 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء و بالتالي الاختبارات المتتالية مستقلة. عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون احتمال تحقيق على الأقل مرة الحادثة B_2 يكون أكبر أو يساوي 0,99.

الحل المفصل

1- أ- إتمام الشجرة:

ب- نبين أن احتمال الحادثة B_2 يساوي $\frac{4k+12}{5k+20}$:

باستعمال قانون الاحتمالات الكلية نجد:

$$p(B_2) = \frac{k}{k+4} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{k+4} \times \frac{3}{5} = \frac{4k+12}{5k+20} \text{ (وهو المطلوب)}$$

2- أ- تعيين قيم X : $X(\Omega) = \{-20; +10\}$

ب- قانون احتمال X وحساب أمله الرياضي:

x_i	-20	+10	المجموع
p_i	$\frac{9}{35}$	$\frac{26}{35}$	1
$x_i p_i$	$-\frac{180}{35}$	$\frac{260}{35}$	$E(X) = \frac{80}{35}$

$$E(X) = \frac{80}{35} = \frac{16}{7} \approx 2,29 \text{ DA}$$

ج- هل اللعبة ملائمة لأحمد؟

بما أن $E(X) > 0$ فإن اللعبة ملائمة لأحمد

3- تعيين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون احتمال تحقيق على الأقل مرة الحادثة B_2 يكون أكبر أو يساوي 0,99.

الاختبارات المتتالية هي متطابقة ومستقلة، لدينا مخطط برنولي و المتغير العشوائي Y يتبع قانون ثنائي الحد $B(n, \frac{26}{35})$

لدينا: الحادثة "تحقيق على الأقل مرة الحادثة B_2 " هي الحادثة العكسية للحادثة " B_2 لا تتحقق" أي: $(Y \geq 1) = (Y = 0)$

$$p(Y \geq 1) \geq 0,99 \text{ يكافئ } 1 - p(Y=0) \geq 0,99 \text{ أي } p(Y=0) \leq 0,01 \text{ أي } \left(\frac{9}{35}\right)^n \leq 0,01$$

$$\text{يكافئ } n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{9}{35}\right)} \text{ أي } n \geq 9,01$$

أصغر عدد طبيعي n حتى يكون احتمال تحقيق على الأقل مرة الحادثة B_2 يكون أكبر أو يساوي 0,99 هو 10. تحقيق على الأقل مرة الحادثة B_2 يكون أكبر أو يساوي 0,99 هو 10.

التمرين 5: يحتوي كيس U_1 على 5 كرات بيضاء و 7 كرات سوداء ويحتوي كيس U_2 على كرة بيضاء و 11 كرة سوداء. كل الكرات غير معروفة عند اللمس.

1- لدينا زهرة نرد متجانسة تماما ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.

نرميها مرة: إذا حصلنا على الرقم 6، نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_1 ، وإلا نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_2 .

نرمز بـ: $D6$ للحادثة: "نحصل على الرقم 6"

أ- لتكن B الحادثة: "نحصل على كرة بيضاء". بين أن $p(B) = \frac{5}{36}$.

ب- إذا حصلنا على كرة بيضاء، هل احتمال أن تكون من U_1 أكبر من احتمال أن تكون من U_2 ؟

2- نكرر العملية المعرفة سابقا مرتين في شروط متطابقة ومستقلة (أي بعد الاختبار الأولي، الكيسين يكون لهما نفس التركيبة الأولى).

ليكن x عدد طبيعي غير معدوم. نربح x DA إذا حصلنا على كرة بيضاء ونخسر $20DA$ إذا حصلنا على كرة سوداء.

نرمز بـ X للمتغير العشوائي المرفق بالربح الجبري بعد الانتهاء من الاختبارين.

أ- عين قيم X .

ب- عين قانون احتمال X .

ج- عين الأمل الرياضي $E(X)$ بدلالة x .

د- من أجل أي قيم للعدد x يكون $E(X) \geq 0$ ؟

الحل المفصل

1- الشجرة:

أ- نبين أن $p(B) = \frac{5}{36}$

باستعمال قوانين الاحتمالات الكلية نجد: $p(B) = \frac{5}{72} + \frac{5}{72} = \frac{5}{36}$

ب- إذا حصلنا على كرة بيضاء، هل احتمال أن تكون من U_1 أكبر

من احتمال أن تكون من U_2 ؟

$$p_B(U_1) = \frac{p(B \cap U_1)}{p(B)} = \frac{\left(\frac{5}{72}\right)}{\left(\frac{10}{72}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$p_B(U_2) = \frac{p(B \cap U_2)}{p(B)} = \frac{\left(\frac{5}{72}\right)}{\left(\frac{10}{72}\right)} = \frac{1}{2} = p_B(U_1)$$

2- الشجرة:

أ- تعيين قيم X :

$$X(\Omega) = \{-40; x-20; 2x\}$$

ب- قانون احتمال X :

x_i	-40	$x-20$	$2x$	المجموع
p_i	$\frac{961}{1296}$	$\frac{310}{1296}$	$\frac{25}{1296}$	
$x_i p_i$	$-\frac{51840}{1296}$	$\frac{310x-6200}{1296}$	$\frac{50x}{1296}$	$E(X) = \frac{360x-58040}{1296}$

ج- عين الأمل الرياضي $E(X)$ بدلالة x : $E(X) = \frac{360x-58040}{1296} = \frac{45x-7255}{162}$

د- تعيين قيم للعدد x حيث: $E(X) \geq 0$: $E(X) \geq 0$ يكافئ $45x - 7255 \geq 0$ يكافئ $x \geq 161,2$ قيم x حيث: $E(X) \geq 0$ هي الأعداد الطبيعية الأكبر أو تساوي 162.

المرحلة 6:

لدينا زهرة نرد ذات ستة أوجه متجانسة مرقمة من 1 إلى 6 وكييس يحتوي على 10 كرات غير معروفة عند اللمس: 6 خضراء و 4 حمراء. تجري لعبة بمرحلتين:

المرحلة الأولى: نرمي زهرة النرد ونكتب الرقم المحصل عليه.

المرحلة الثانية:

- إذا كان الرقم المحصل عليه I ، نسحب كرة من الكيس: نربح إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء و يخسر في الحالة الأخرى.
 - إذا كان الرقم المحصل عليه 3 أو 5، نسحب كرتين عشوائيا و في آن واحد من الكيس: نربح إذا كانت الكرتين المسحوبتين خضراوين و يخسر في الحالات الأخرى.
 - إذا كان الرقم المحصل عليه زوجي، نسحب ثلاث كرات عشوائيا و في آن واحد من الكيس: نربح إذا كانت الكرات الثلاث المسحوبة خضراء و يخسر في الحالات الأخرى.
- في آخر كل لعبة، نعيد في الكيس الكرة أو الكرات المسحوبة.

نعرف الحوادث التالية:

D_1 : "ظهور الرقم 1 في زهرة النرد" ؛ D_2 : "ظهور الرقم 3 أو 5 في زهرة النرد"

D_3 : "ظهور رقم زوجي في زهرة النرد" ؛ G : "السيد أحمد ربح اللعبة"

نذكر أن: $p_A(B)$ هو احتمال الحصول على B علما أن A محققة مع $p(A) \neq 0$.

1- أ - أنشئ شجرة مثقطة.

ب - عين الاحتمالات $p_{D_1}(G)$ ، $p_{D_2}(G)$ و $p_{D_3}(G)$.

ج - بين إذن أن $p(G) = \frac{157}{180}$

2- ربنا اللعبة. أحسب احتمال أن نحصل على الرقم 1 بزهرة النرد.

3- نجري ستة مرات نفس اللعبة. أحسب احتمال أن نربح بالضبط لعبتين فقط (تعطى النتيجة بتقريب 10^{-2}).

4- كم لعبة على الأقل نجريها حتى يكون احتمال أن نربح على الأقل واحدة أكبر تماما من 0,9؟

الحل المفصل

قبل البدء في الحل لنحسب بعض الاحتمالات المهمة

نسحب كرتين في آن واحد: احتمال سحب كرتين خضراوين في آن واحد من الكيس هو: $p = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$

نسحب ثلاث كرات في آن واحد: احتمال سحب ثلاث كرات خضراء في آن واحد من الكيس هو: $p = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$

لنبدأ في الحل:

1- أ - انشاء الشجرة:

ب - تعين الاحتمالات $p_{D_1}(G)$ ، $p_{D_2}(G)$ و $p_{D_3}(G)$:

$$p_{D_3}(G) = \frac{1}{6} ، p_{D_2}(G) = \frac{1}{3} ، p_{D_1}(G) = \frac{3}{5}$$

ج - نبين إذن أن: $p(G) = \frac{157}{180}$

$$\begin{aligned} p(G) &= p(G \cap D_1) + p(G \cap D_2) + p(G \cap D_3) \\ &= p_{D_1}(G)p(D_1) + p_{D_2}(G)p(D_2) + p_{D_3}(G)p(D_3) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{53}{180} \end{aligned}$$

2- احتمال أن نحصل على الرقم 1 بزهرة النرد علما أننا ربنا اللعبة:

$$p_G(D_1) = \frac{p(D_1 \cap G)}{p(G)} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{\left(\frac{53}{180}\right)} = \frac{18}{53}$$

3- احتمال أن نربح بالضبط لعبتين فقط

ليكن X المتغير العشوائي المساوي لعدد اللعاب التي نربحها. X يتبع قانون ثنائي الحد $B\left(6; \frac{53}{180}\right)$.

$$p(X = 2) = C_6^2 \left(\frac{53}{180}\right)^2 \left(1 - \frac{53}{180}\right)^4 = 15 \left(\frac{53}{180}\right)^2 \left(\frac{127}{180}\right)^4 \cong 0,32$$

4- كم لعبة على الأقل نجريها حتى يكون احتمال أن نربح على الأقل واحدة أكبر تماما من 0,9؟

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X = 0) = 1 - C_n^0 \left(\frac{53}{180}\right)^0 \left(1 - \frac{53}{180}\right)^n = 1 - \left(\frac{127}{180}\right)^n \\ \left(\frac{127}{180}\right)^n &< 0,1 \quad \text{يكافئ} \quad 1 - \left(\frac{127}{180}\right)^n > 0,9 \quad \text{يكافئ} \quad p(X \geq 1) > 0,9 \end{aligned}$$

$$\text{يكافئ} \quad n \ln\left(\frac{127}{180}\right) > \ln(0,1) \quad \text{يكافئ} \quad n > 6,9$$

لا بد من 7 لعبات على الأقل حتى يكون احتمال أن نربح على الأقل واحدة أكبر تماما من 0,9

المبرين:7 مؤسسة تجارية أوكلت لشركة صبر الآراء بالهاتف تحقيقا حول نوعية منتجاتها. نقبل أنه عند المكالمة الأولى، احتمال أن لا يرفع الشخص السماعه هو 0,4 و إذا رفع السماعه فأن احتمال أ، يرد على الأسئلة هو 0,3 . يمكن إنشاء شجرة متقله.

1- نرّمز بـ: D_1 للحادثه: "الشخص يرفع السماعه عند الاتصال الأول"، R_1 للحادثه: "الشخص يجيب على الأسئلة عند المكالمه الأولى" أحسب احتمال الحادثه R_1 .

2- عندما لا يرفع شخص السماعه عند المكالمه الأولى، نعيد الاتصال به مرة ثانية. احتمال أن لا يرفع الشخص السماعه مرة ثانية هو 0,3 واحتمال أن يجيب عن الأسئلة علما أنه رفع السماعه هو 0,2 . بعد الاتصال الثاني إن لم يرفع السماعه فلا نحاول الاتصال به.

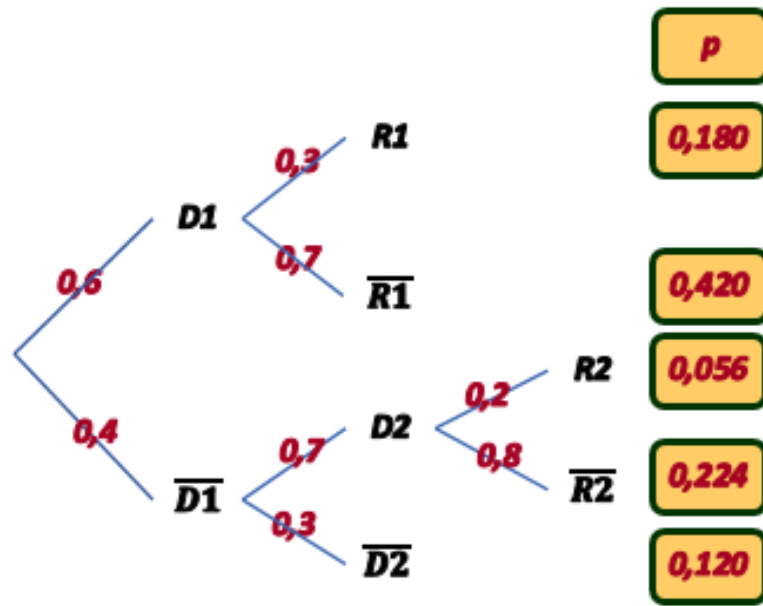
نرّمز بـ: D_2 للحادثه: "الشخص يرفع السماعه عند الاتصال الثاني"، R_2 للحادثه: "الشخص يجيب على الأسئلة عند المكالمه الثانية" R للحادثه: " الشخص يجيب على الأسئلة " بين أن احتمال الحادثه R هو 0,236.

3- علما أن الشخص رد عن الأسئلة، أحسب احتمال أن تكون الأجوبه قدمت عند الاتصال الأول. (يعطى الجواب بمدور 10^{-3})

4- لدى محقق قائمه بـ 25 شخص للاتصال بهم. صبر الآراء لدى أشخاص من نفس القائمه مستقله. ما احتمال أن يكون 20% من الأشخاص تجيب عن أسئله المحقق؟ (يعطى الجواب بمدور 10^{-3}).

الحل المفصل

إنشاء الشجرة:



1- حساب احتمال الحادثه R_1 :

$$p(R_1) = 0,180$$

2- بين أن احتمال الحادثه R هو 0,236.

$$p(R) = p(R_1) + p(R_2) = 0,180 + 0,056 = 0,236$$

3- علما أن الشخص رد عن الأسئلة، حساب احتمال أن تكون الأجوبه قدمت عند الاتصال الأول:

$$p_R(D_1) = \frac{p(R \cap D_1)}{P(R)} = \frac{0,180}{0,236} \cong 0,763$$

4- احتمال أن يكون 20% من الأشخاص تجيب عن أسئله المحقق:

20% من 25 شخص يساوي 5 أشخاص.

ليكن X عدد الأشخاص اللذين أجابوا عن أسئله المحقق.

بما أن صبر الآراء لدى أشخاص من نفس القائمه مستقله، فإن X يتبع قانون ثنائي الحد ليرنولي $B(25; 0,236)$

$$p(X = 5) = C_{25}^5 (0,236)^5 (1 - 0,236)^{20} = 53130 (0,236)^5 (0,764)^{20} \cong 0,179$$

المبرهن 8: عدد تلاميذ ثانوية ما موزعين على الشكل التالي: 40% سنة أولى و 35% سنة ثانية. البنات تمثل 60% من تلاميذ السنة الأولى، 70% تلاميذ السنة الثانية و 80% من تلاميذ السنة الثالثة.

1- نختار عشوائياً تلميذ من الثانوية.
نرمز بـ: S الحادثة: " التلميذ المختار من السنة الأولى"
 T الحادثة: " التلميذ المختار من السنة الثالثة"
 P الحادثة: " التلميذ المختار من السنة الثانية"
 F الحادثة: " التلميذ المختار بنت"

أ - أنشئ الشجرة المثقلة المرفقة بالمعطيات.

ب - أحسب احتمال أن نختار:

- تلميذ من السنة الثالثة.
- بنت من السنة الثالثة.

ج - بين أن احتمال اختيار بنت هو 0,685.

2- يوجد من بين تلاميذ السنة الثالثة ثانوي من يمارسون التربية البدنية و من لا يمارسون التربية البدنية.

قررت إدارة الثانوية أن تجري امتحان كتابي اختياري في مادة التربية البدنية لتلاميذ السنة الثالثة ثانوي.

• احتمال أن يكون التلميذ المختار لم يمتحن ويمارس التربية البدنية هو 0,02 .

• احتمال أن يكون التلميذ المختار امتحن ولا يمارس التربية البدنية هو 0,03 .

• احتمال أن يكون التلميذ المختار امتحن هو 0,4 .

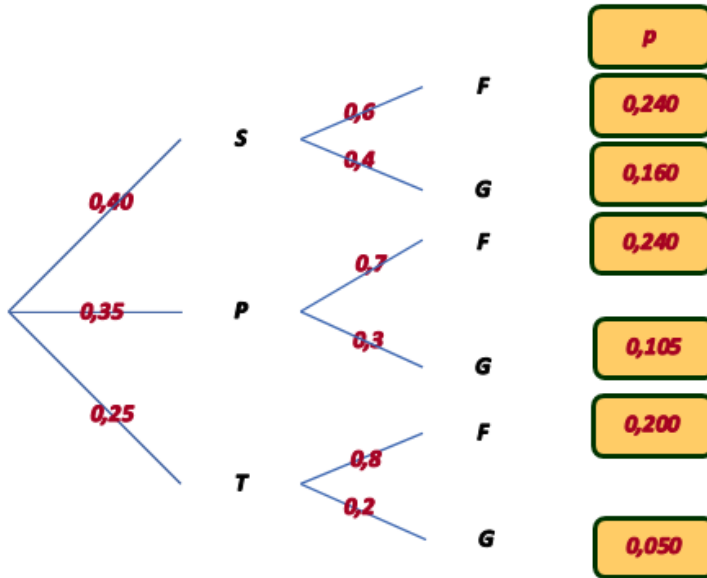
نرمز بـ: A الحادثة: " التلميذ المختار يمارس التربية البدنية" B الحادثة: " التلميذ المختار امتحن"

أ - بين أن احتمال أن يمارس التربية البدنية ويمتحن هو 0,37

ب - أحسب احتمال أن يمارس التربية البدنية.

ج - أحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار أمتحن علماً أنه يمارس التربية البدنية

الحل المفصل



1- أ - الشجرة:

ب - حساب احتمال أن نختار:

تلميذ من السنة الثالثة: $P(T)=0,25$

• بنت من السنة الثالثة: $P(F \cap T)=0,2$

ج - نبين أن احتمال اختيار بنت هو 0,685:

$$P(F) = 0,24 + 0,245 + 0,2 = 0,685$$

2- أ - بين أن احتمال أن يمارس التربية البدنية و يمتحن هو 0,37:

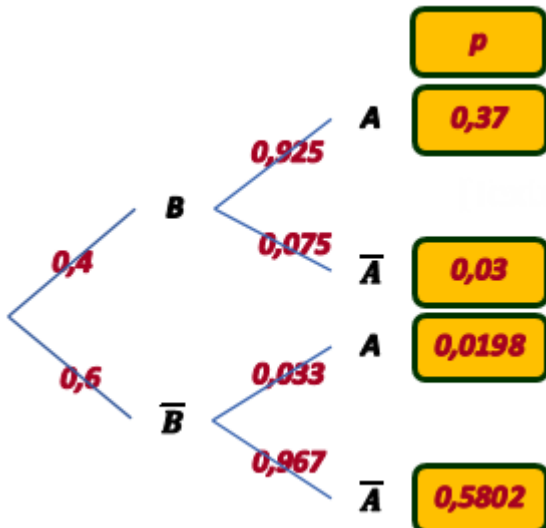
$$P(A \cap B) = 0,4 \times 0,925 = 0,37$$

ب - احتمال أن يمارس التربية البدنية:

$$P(A) = 0,37 + 0,02 = 0,39$$

ج - احتمال أن يكون التلميذ المختار أمتحن علماً أنه يمارس التربية البدنية:

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,37}{0,39} = 0,9487$$



جواب واحد صحيح فقط أذكر الجواب الصحيح. التبرير مطلوب.

تذكير: الترميز $p_A(B)$ يرمز إلى احتمال الحادثة B علما أن الحادثة A محققة.

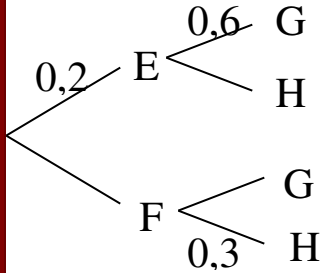
1- A و B حادثتان مستقلتان حيث $p(A)=0,7$ و $p(B)=0,2$:

ج1: $p(A \cap B) = 0,14$ ج2: $p(A \cup B) = 0,9$ ج3: $p_A(B) = 0,5$

2- قطعة نقدية هي بحيث احتمال ظهور "وجه" يساوي $\frac{1}{3}$. نرميها 4 مرات متتابة. ما احتمال الحصول على الأقل مرة "وجه" :

ج1: $\frac{18}{81}$ ج2: $\frac{72}{81}$ ج3: $\frac{65}{81}$

3- نعتبر الشجرة المثقلة التالية:



ما احتمال $p_H(F)$ ؟ ج1: $p_H(F)=0,75$ ج2: $p_H(F)=0,56$ ج3: $p_H(F)=0,856$

4- يحتوي صندوق 5 كريات بيضاء و 5 كريات سوداء. نسحب ، مع الإعادة ،

كرة عشوائيا n مرة متتابة ($n > 1$). ما احتمال الحصول على كريات ليست كلها من نفس اللون ؟

ج1: $1 - \frac{1}{2^n}$ ج2: $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ ج3: $1 - \frac{1}{2^{2n}}$

الحل المفصل

1- الجواب الصحيح هو: ج1: $p(A \cap B) = 0,14$

التبرير: بما أن A و B حادثتان مستقلتان فإن $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$

ملاحظة: $p_A(B) = p(B) = 0,2$ و $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,7 + 0,2 - 0,14 = 0,76$

2- الجواب الصحيح هو: ج3: $\frac{65}{81}$

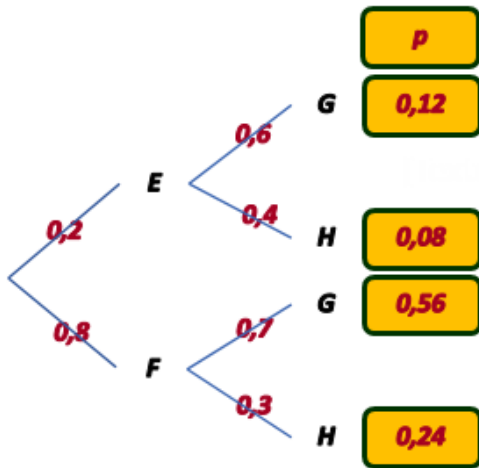
التبرير: لدينا: $p(F) = \frac{1}{3}$ و $p(P) = \frac{2}{3}$

لتكن A الحادثة: "الحصول على الأقل مرة "وجه" و \bar{A} الحادثة: "الحصول على أربع مرات "ظهر"

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}$$

3- الجواب الصحيح هو: ج1: $p_H(F)=0,75$

التبرير: لدينا: $p_H(F) = \frac{p(H \cap F)}{p(F)} = \frac{0,24}{0,24+0,08} = \frac{0,24}{0,32} = 0,75$



4- الجواب الصحيح هو: ج2: $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

التبرير: لدينا: $p(N) = \frac{1}{2}$ و $p(B) = \frac{1}{2}$

لتكن A الحادثة: "الحصول على كريات ليست كلها من نفس اللون" و \bar{A} الحادثة: "الحصول على كريات كلها من نفس اللون"

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

مدة صلاحية، معبرة بالساعات، لمفكرة إلكترونية هي متغير عشوائي X يتبع قانون أسي ذو الوسيط λ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx, \quad t \geq 0$$

الدالة R المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $R(t) = P(X > t)$ تسمى دالة وفاء. - *Fiabilité* -

1- *Restitution organisée des connaissances* - إعادة استثمار المفاهيم -

أ - برهن أنه من أجل كل $t \geq 0$ لدينا: $R(t) = e^{-\lambda t}$

ب - برهن أن المتغير X يتبع قانون مدة حياة بدون شيخوخة، أي أنه من أجل كل عدد حقيقي $s \geq 0$ ، الاحتمال الشرطي

$$P_{X>t}(X > t + s)$$

مستقل عن العدد $t \geq 0$.

2- في هذا السؤال، نأخذ $\lambda = 0,00026$

أ - أحسب $P(X \leq 1000)$ و $P(X > 1000)$.

ب - علما أن الحادثة $(X > 1000)$ محققة، أحسب احتمال الحادثة $(X > 2000)$

ج - علما أن مفكرة اشغلت 2000 ساعة، ما احتمال أن تتعطل قبل 3000 ساعة؟ هل يمكن توقع هذه النتيجة؟

الحل المفصل

مدة صلاحية؛ مَعْبَرَة بالساعات، لمفكرة إلكترونية هي متغير عشوائي X يتبع قانون أسي ذو الوسيط λ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx, \quad t \geq 0$$

الدالة R المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $R(t) = P(X > t)$ تسمى دالة وفاء. - *Fiabilité* -

1- *Restitution organisée des connaissances* - إعادة استثمار المفاهيم -

أ - نبرهن أنه من أجل كل $t \geq 0$ لدينا: $R(t) = e^{-\lambda t}$

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

ب - نبرهن أن المتغير X يتبع قانون مدة حياة بدون شيخوخة:

أي نبرهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $s \geq 0$ ، الاحتمال الشرطي $P_{X>t}(X > t + s)$ مستقل عن العدد $t \geq 0$.

$$P_{X>t}(X > t + s) = \frac{P(\{X>t+s\} \cap \{X>t\})}{P(X>t)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

ومنه: من أجل كل عدد حقيقي $s \geq 0$ ، الاحتمال الشرطي $P_{X>t}(X > t + s)$ مستقل عن العدد $t \geq 0$.

2- في هذا السؤال، نأخذ $\lambda = 0,00026$

أ - حساب $P(X < 1000)$ و $P(X > 1000)$

$$P(X > 1000) = e^{-0,26}, \quad P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0,00026(1000)} = 1 - e^{-0,26}$$

ب - حساب $P_{X>1000}(X > 2000)$

علما أن الحادثة $(X > 1000)$ محققة، أحسب احتمال الحادثة $(X > 2000)$

$$P_{X>1000}(X > 2000) = P_{X>1000}(X > 1000 + 1000) = P(X > 1000) = e^{-0,26}$$

ج - علما أن مفكرة اشغلت 2000 ساعة، ما احتمال أن تتعطل قبل 3000 ساعة؟

$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = \frac{P(2000 < X \leq 3000)}{P(X > 2000)} = \frac{\int_{2000}^{3000} \lambda e^{-\lambda x} dx}{R(2000)} = \frac{[-e^{-\lambda x}]_{2000}^{3000}}{e^{-2000\lambda}} = \frac{e^{-2000\lambda} - e^{-3000\lambda}}{e^{-2000\lambda}}$$

$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = 1 - e^{-1000\lambda} = 1 - e^{-0,26}$$

د - هل يمكن توقع هذه النتيجة؟

نعم يمكن توقع هذه النتيجة لأن المتغير العشوائي لأن X يتبع قانون مدة حياة بدون شيخوخة (بدون ذاكرة) وبالتالي:

$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = P_{X>0}(X \leq 1000) = P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0,26}$$

التمرين 12:

إليك شجرة الاحتمالات التالية:

أ - أنقل وأتمم الشجرة

ب - جواب صحيح واحد فقط، عينه مع التبرير.

1- الاحتمال $p(A \cap B \cap C) =$

ج1: 1,3 ج2: 0,4 ج3: 0,072

2- الاحتمال $p(C) =$

ج1: 0,1344 ج2: 0,2064 ج3: 0,072

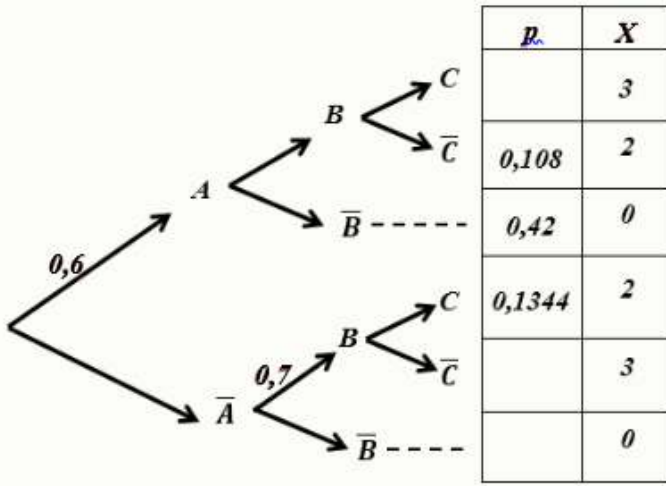
3- الاحتمال $p(\bar{B}) =$

ج1: 0,54 ج2: 0,42 ج3: 0,072

4- الاحتمال $p_{A \cap B}(\bar{C}) =$

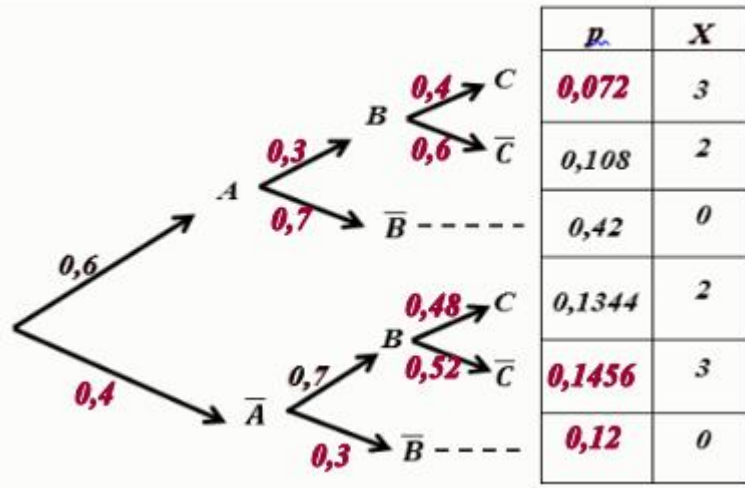
ج1: 0,2536 ج2: 0,6 ج3: 0,88

5- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X : ج1: 1,1376 ج2: 1 ج3: 3,1020 $E(X) =$



الحل المفصل

أ - الشجرة:



ب - جواب صحيح واحد فقط، عينه مع التبرير.

1- الجواب الصحيح هو: ج3

التبرير: $p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p_A(B) \times p_{A \cap B}(C) = 0,6 \times 0,3 \times 0,4 = 0,072$

2- الجواب الصحيح هو: ج2

التبرير: $p(C) = 0,072 + 0,1344 = 0,2064$

3- الجواب الصحيح هو: ج1

التبرير: $p(\bar{B}) = 0,42 + 0,12 = 0,54$

4- الجواب الصحيح هو: ج2

التبرير: $p_{A \cap B}(\bar{C}) = 0,6$

5- الجواب الصحيح هو: ج1

التبرير: $E(X) = 3(0,072 + 0,1456) + 2(0,108 + 0,1344) + 0(0,42 + 0,12) = 1,1376$

العمرين: 13

- يتكون قسم A من 40 تلميذ: 15 ذكور كلهم خارجيين و 25 بنت منهن 5 داخليات ويتكون قسم B من 30 تلميذ: 10 ذكور كلهم خارجيين و 20 بنت منهن 3 داخليات. نختار عشوائيا تلميذ من كل قسم.
- 1- ما احتمال الحصول على تلميذين من نفس الجنس؟
 - 2- ما احتمال الحصول على داخليتين؟
 - 3- ما احتمال الحصول على تلميذين خارجيين؟
 - 4- نرفق بكل بنت داخلية نقطة واحدة وبكل بنت خارجية نقطتان وبكل ولد خارجي ثلاثة نقط ولين X مجموع النقط المحصل عليها عند اختيار التلميذين؛ عين قانون احتمال X واحسب أمله الرياضي.

الحل المفصل

A : 40 تلميذ: 15GE و 25F و 5FI

B : 30 تلميذ: 10GE و 20F و 3FI

نختار عشوائيا تلميذ من كل قسم.

1- احتمال الحصول على تلميذين من نفس الجنس:

$$p = \frac{15 \times 10 + 25 \times 20}{40 \times 30} = \frac{13}{24}$$

2- احتمال الحصول على داخليتين :

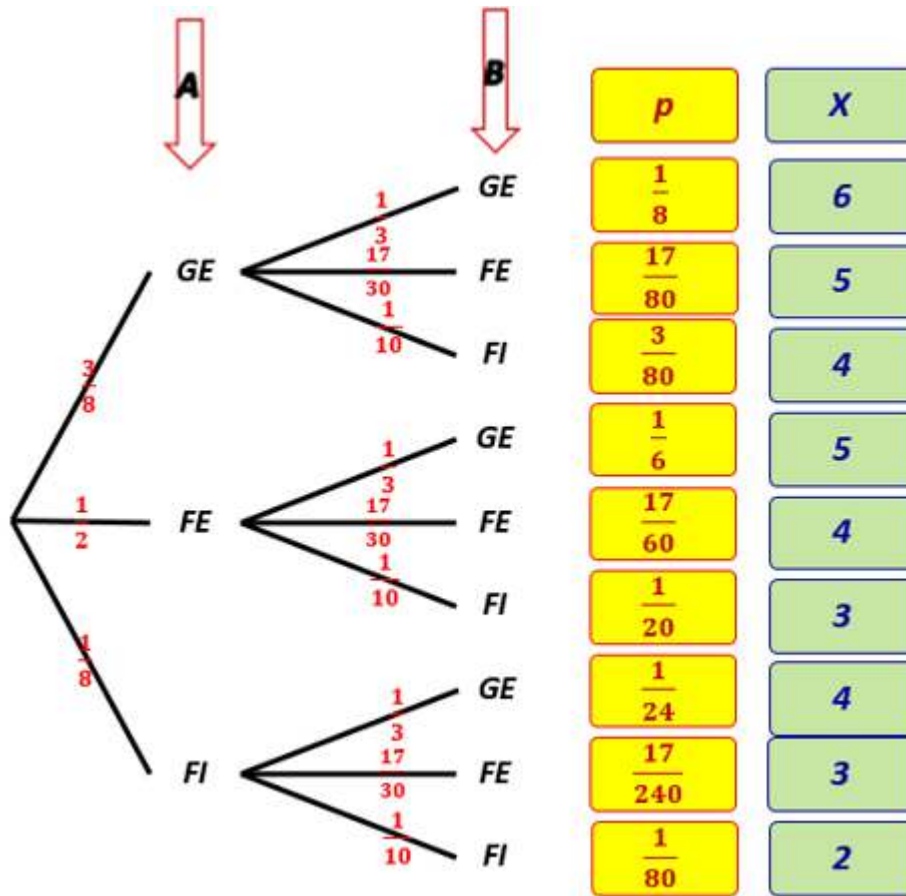
$$p = \frac{5 \times 3}{40 \times 30} = \frac{1}{80}$$

3- احتمال الحصول على تلميذين خارجيين:

$$p = \frac{35 \times 27}{40 \times 30} = \frac{63}{80}$$

4- قانون احتمال X وأمله الرياضي:

الشجرة:



$$p_i = p(X=x_i)$$

x_i	2	3	4	5	6	المجموع
p_i	$\frac{1}{80}$	$\frac{29}{240}$	$\frac{29}{80}$	$\frac{91}{240}$	$\frac{1}{8}$	1
$x_i p_i$	$\frac{1}{40}$	$\frac{29}{80}$	$\frac{29}{20}$	$\frac{91}{48}$	$\frac{3}{4}$	$E(X) = \frac{12823}{4800} \cong 2,67$

$$E(X) = \frac{12823}{4800} \cong 2,67 \text{ الأمل الرياضي:}$$

تمارين غير محلولة على الاحتمالات

التمرين 14: Baccalauréat S Antilles-Guyane, Juin 2005

جواب واحد صحيح فقط من بين اقتراحات ثلاث، أذكر الجواب الصحيح. التبرير مطلوب
تحتوي مكتبة على 150 كتاب قصص بوليسية و 50 كتاب أدبي. 40% من مؤلفي القصص البوليسية هم فرنسيون و 70% من مؤلفي الكتب الأدبية هم فرنسيون. نختار عشوائيا كتابا من بين 200 كتاب.

- 1- احتمال أن نختار كتاب قصص بوليسية هو: $0,4$:1ج $0,75$:2ج $\frac{1}{150}$:3ج
- 2- اخترنا كتاب قصص بوليسية، احتمال أن يكون المؤلف فرنسي هو: $0,3$:1ج $0,8$:2ج $0,4$:3ج
- 3- احتمال أن نختار كتاب قصص بوليسي فرنسي هو: $1,15$:1ج $0,4$:2ج $0,3$:3ج
- 4- احتمال أن نختار كتاب لمؤلف فرنسي هو: $0,9$:1ج $0,7$:2ج $0,475$:3ج
- 5- احتمال أن نختار كتاب قصص بوليسية علما أن المؤلف فرنسي هو: $\frac{4}{150}$:1ج $\frac{12}{19}$:2ج $0,3$:3ج
- 6- جاء شخص 20 مرة للمكتبة احتمال أن يختار على الأقل كتاب قصص بوليسية هو: $1-(0,25)^{20}$:1ج $20 \times 0,75$:2ج $0,75(0,25)^{20}$:3ج

التمرين 15: Baccalauréat S Centres Etrangers, Juin 2007

جواب واحد صحيح فقط من بين الاقتراحات الثلاث، أذكر الجواب الصحيح. التبرير غير مطلوب
يحتوي صندوق على 8 كرات غير معروفة عند اللمس، 5 حمراء و 3 سوداء.

- 1- نسحب 3 كرات في آن واحد. أ - احتمال سحب ثلاث كرات سوداء هو: $\frac{1}{56}$:1ج $\frac{1}{120}$:2ج $\frac{1}{3}$:3ج
- ب - احتمال سحب ثلاث كرات من نفس اللون هو: $\frac{11}{56}$:1ج $\frac{16}{24}$:2ج $\frac{16}{24}$:3ج
- 2- نسحب عشوائيا كرة من الكيس، نكتب لونها ثم نعيدها للكيس؛ نعيد هذه العملية 5 مرات متتالية و مستقلة متتالية.
أ - احتمال الحصول خمس مرات كرة سوداء هو: $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)$:1ج $\left(\frac{3}{8}\right)^5$:2ج $\left(\frac{1}{5}\right)^5$:3ج
ب - احتمال الحصول على كرتان سوداوين و 3 كرات حمراء هو:
 $5 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{3}{8}$:2ج $10 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$:3ج $\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$:1ج
- 3- نسحب بالتتابع و بدون إرجاع كرتين من الكيس. نرمز بـ R_i : " الكرة i المسحوبة حمراء " و N_i : " الكرة i المسحوبة سوداء "
أ - الاحتمال الشرطي $p_{R_1}(R_2)$ هو: $\frac{5}{8}$:1ج $\frac{4}{7}$:2ج $\frac{5}{14}$:3ج
ب - احتمال الحادثة $N_1 \cap R_2$ هو: $\frac{16}{49}$:1ج $\frac{15}{64}$:2ج $\frac{15}{56}$:3ج
ج - احتمال سحب كرة حمراء في السحب الثاني هو: $\frac{5}{8}$:1ج $\frac{5}{7}$:2ج $\frac{3}{28}$:3ج
د - احتمال سحب كرة حمراء في السحب الأول علما أننا حصلنا على كرة سوداء في السحب الثاني هو: $\frac{5}{8}$:1ج $\frac{3}{8}$:2ج $\frac{15}{56}$:3ج

التمرين 16: Baccalauréat S Liban, Mai 2011

جواب واحد صحيح فقط، أذكر الجواب الصحيح. التبرير غير مطلوب

1- محل عتاد إعلام آلي يبيع نوعان من الكمبيوتر بنفس السعر و نفس المميزات و العلامتين M_1 و M_2 . الحاسبان مقترحان بلونين أبيض وأسود. حسب دراسة على مبيعات النموذجين، 70 % من الزبائن يختارون الحاسوب M_1 من بينهم، 60 % يفضلون اللون الأسود. من جهة أخرى 20 % من الزبائن الذين اشتروا حاسوب M_2 ، اختاروه باللون الأبيض. نستعمل قائمة الزبائن الذين اشتروا حاسوب و نختار عشوائيا زبون.

- أ - احتمال أن نختار زبون اشترى حاسوب M_2 لونه أسود هو: $\frac{3}{5}$:1ج $\frac{4}{5}$:2ج $\frac{3}{50}$:3ج $\frac{6}{25}$:4ج
- ب - احتمال أن نختار زبون اشترى حاسوب لونه أسود هو: $\frac{21}{50}$:1ج $\frac{33}{50}$:2ج $\frac{3}{5}$:3ج $\frac{12}{25}$:4ج
- ج - الزبون اختار حاسوب أسود، احتمال أن يكون من العلامة M_2 هو: $\frac{4}{11}$:1ج $\frac{6}{25}$:2ج $\frac{7}{11}$:3ج $\frac{33}{50}$:4ج
- 2- يحتوي كيس 4 كرات صفراء، كرتان حمراوان و 3 كرات زرقاء غير معروفة عند اللمس. نسحب عشوائيا ثلاث كرات في آن واحد
أ - احتمال أن نسحب ثلاث كرات من نفس اللون هو: $\frac{11}{81}$:1ج $\frac{2}{7}$:2ج $\frac{5}{84}$:3ج $\frac{4}{63}$:4ج
ب - احتمال أن نسحب ثلاث كرات مختلفات اللون هو: $\frac{2}{7}$:1ج $\frac{1}{7}$:2ج $\frac{1}{21}$:3ج $\frac{79}{84}$:4ج
ج - نعيد العملية عدة مرات بطرق مستقلة و بإعادة في كل مرة الكرات الثلاث للكيس. الحد الأدنى لعدد العمليات حتى يكون احتمال الحادثة: " الحصول على الأقل مرة ثلاث كرات صفراء " أكبر أو يساوي 0,99 هو: 76 :1ج 71 :2ج 95 :3ج 94 :4ج