

التحضير الجيد لباكوريا 2021

الأستاذ : مزيان محمد

3  
AS

درس مفصل  
و تمارين محلولة  
لجميع الشعب العلمية

[f](#) : Meziane Maths

[@](#) : Meziane Maths

[v](#) : Meziane Maths

[✉](mailto:meziane.probastat@gmail.com) : meziane.probastat@gmail.com

بالتوفيق و النجاح في باكوريا 2021

المجلة الشاملة للدراسة الأسيية النديرة

2	1	الدالة الأسية
3	2	حلول المعادلة : $f' = kf$
4	1.2	دوال تحول المجموع إلى جداء .....
4	3	اتجاه تغير الدالة الأسية
5	1.3	النهايات .....
5	2.3	جدول التغيرات .....
6	3.3	التمثيل البياني .....
6	4	حل معادلات ومتراجحات
7	5	دراسة الدالة $exp \circ u$
7	1.5	النهايات .....
8	2.5	اتجاه التغير .....
8	3.5	المشتقة .....
9	6	تمارين محلولة
9	1.6	تمارين تدريبية .....
31	2.6	تمارين تجريبية .....
52	7	التمارين الواردة في البكالوريا من 2008 إلى 2020
52	1.7	شعبة العلوم التجريبية .....
60	2.7	شعبة التقني الرياضي .....
66	3.7	شعبة الرياضيات .....

الأستاذ : مزيان محمد

### مبرهنة وتعريف

توجد دالة وحيدة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث :  $f' = f$  و  $f(0) = 1$  نرسم إلى هذه الدالة بالرمز " $exp$ " ونسميها الدالة الأسية النييرية

### مبرهنة

الدالة الأسية موجبة تماما على  $\mathbb{R}$ .

### برهان

نعرف الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = exp(x).exp(-x)$

$g$  تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث :  $g'(x) = exp(x).exp(-x) - exp(x).exp(-x) = 0$  و منه  $g$  دالة ثابتة و عليه :  
بما أن :  $exp(0) = 1$  فإن :  $g(x) = 1$  و عليه :  $exp(x).exp(-x) = 1$  و منه :  $exp$  لا تنعدم أبدا .

لنبرهن أن الدالة  $exp$  موجبة تماما بالخلف :

نفرض وجود عدد  $x_0$  بحيث  $exp(x_0) \leq 0$  في المجال  $[0; x_0]$

أو المجال  $[x_0; 0]$  . الدالة  $exp$  قابلة للاشتقاق فهي إذن مستمرة .

ولدينا :  $exp(x_0) < 0$  و  $exp(0) > 0$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $exp(x) = 0$  تقبل حلا في هذا المجال و هذا يناقض الفرض لأن  $exp$  لا تنعدم على  $\mathbb{R}$  .

و منه لا يوجد أي عدد  $x_0$  من  $\mathbb{R}$  بحيث :  $exp(x_0) < 0$  و عليه  $exp(x) > 0$  من أجل كل عدد طبيعي  $x$  .

### نتائج

$$exp(0) = 1$$

$$exp'(x) = exp(x)$$

### خواص جبرية

$$exp(x - y) = \frac{exp(x)}{exp(y)} \quad 4$$

$$exp(x) \neq 0 \quad 1$$

$$exp(-x) = \frac{1}{exp(x)} \quad 2$$

$$exp(nx) = [exp(x)]^n \quad 5$$

$$exp(x + y) = exp(x) \times exp(y) \quad 3$$

### العدد $e$ والترميز $e^x$

العدد  $e$  هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي  $e = exp(1)$  . تعطينا الحاسبة  $e \approx 2.718281828$  . من أجل كل عدد

صحيح نسبي  $n$  ،  $exp(n) = exp(n \times 1) = [exp(1)]^n$  ، لدينا إذن : من أجل كل عدد صحيح نسبي  $n$  ،  $exp(n) = e^n$  .

اصطلاحا نرسم، من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ، إلى  $exp(x)$  بـ  $e^x$  .

•  $e^{x+y} = e^x \times e^y$  4

•  $e^0 = 1$  1

•  $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$  5

•  $\exp'(x) = e^x$  2

•  $e^{nx} = (e^x)^n$  6

•  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$  3

مثال تطبيقي

بسّط العبارات التالية :

1  $(e^x)^3 \times e^{-5x} = e^{3x} \times e^{-5x} = e^{3x-5x} = e^{-2x}$

2  $\frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}} = e^{2x+1-(-2x)} = e^{2x+1+2x} = e^{4x+1}$

3  $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{2x}} = e^{x-2x} + e^{-x-2x} = e^{-x} + e^{-3x}$

4  $\left(\frac{(e^x)^3 \times e^{-6x}}{e^{4-x}}\right)^2 = \left(\frac{(e^{3x}) \times e^{-6x}}{e^{4-x}}\right)^2 = \left(\frac{e^{3x-6x}}{e^{4-x}}\right)^2 = \left(\frac{e^{-3x}}{e^{4-x}}\right)^2 = (e^{-3x-(4-x)})^2 = (e^{-3x-4+x})^2 = (e^{-2x+4})^2 = e^{-4x+8}$

5  $\sqrt{e^x} = (e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{x}{2}}$

6  $\sqrt{\frac{3e^{x-1}}{e^{2x+1}}} = \sqrt{3e^{x-1-(2x+1)}} = \sqrt{3e^{x-1-2x-1}} = \sqrt{3e^{-x-2}} = \sqrt{3} \times \sqrt{e^{-x-2}} = \sqrt{3} \times (e^{-x-2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \times e^{-\frac{x+2}{2}}$

2 حلول المعادلة :  $f' = kf$

$k_1 = 1, k_2 = 2$

مبرهنة وتعريف

توجد دالة وحيدة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث :  $f' = kf$

و  $f(0) = 1$  هي الدالة  $x \mapsto e^{kx}$

برهان

الوجود: لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{kx}$

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) = ke^{kx} = kf(x)$ ، كما أن  $f(0) = e^0 = 1$  وبالتالي الدالة

$f$  تحقق  $f' = kf$  و  $f(0) = 1$

الوحدانية : نفرض وجود دالة ثانية  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث  $g' = kg$  و  $g(0) = 1$ ، نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما

يلي :  $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ ، الدالة  $h$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :

$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{kg(x)f(x) - g(x)kf(x)}{[f(x)]^2} = 0$

كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $h(x) = 1$ ، وعليه  $f(x) = g(x)$  إذن الدالة  $f$  موجودة ووحيدة.

## مبرهنة

الدوال غير المعدومة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث : من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  ،  $f(x+y) = f(x)f(y)$  ، هي الدوال  $e^{kx} \rightarrow x$  حيث  $k$  عدد حقيقي

## 3 إتجاه تغير الدالة الأسية

أخبره بجهت التغير

## خاصية

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $e^x > 0$

## برهان

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2$  ، وبما أن  $e^x \neq 0$  فإن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $e^x > 0$ .

## خاصية

الدالة الأسية متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

## برهان

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $exp'(x) = e^x > 0$  ومنه  $e^x$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

## نتائج

من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  لدينا :  $e^a < e^b$  معناه أن  $a < b$

و  $e^a = e^b$  تعني أن  $a = b$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا :  $0 < e^x < 1$  يعني  $x < 0$

و  $e^x > 1$  يعني  $x > 0$

خوائص

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad 6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad 2$$

برهان

1 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  بـ  $f(x) = e^x - x$  من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $f'(x) = e^x - 1$ ،  
و بما أن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  فإن  $f'(x) \geq 0$  و منه  $f$  متزايدة تماما على  $[0; +\infty[$  و  $f(0) = 1$  و  
إذن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $e^x \geq x$  أي  $e^x \geq x$  لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و منه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

2 من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$  و بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

3 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بـ  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$  لدينا من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $f'(x) = e^x - x$  و  
 $f''(x) = e^x - 1$ ، بما أن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $f''(x) \geq 0$  فإن الدالة  $f'$  متزايدة تماما على  $[0; +\infty[$  و علما  
أن  $f'(0) = 1$  فإن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $f'(x) \geq 0$  و منه فالدالة  $f$  متزايدة تماما على  $[0; +\infty[$  و علما أن  
 $f(0) = 1$  فإن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $f(x) \geq 0$ ، نستنتج أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $e^x - \frac{x^2}{2} \geq 0$ ،  
و بالتالي فإن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$ ، باستعمال النهايات بالمقارنة و علما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$  فإن  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

4 لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  و منه نستنتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

5 نضع  $X = -x$ ، إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$  و منه:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -X e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$

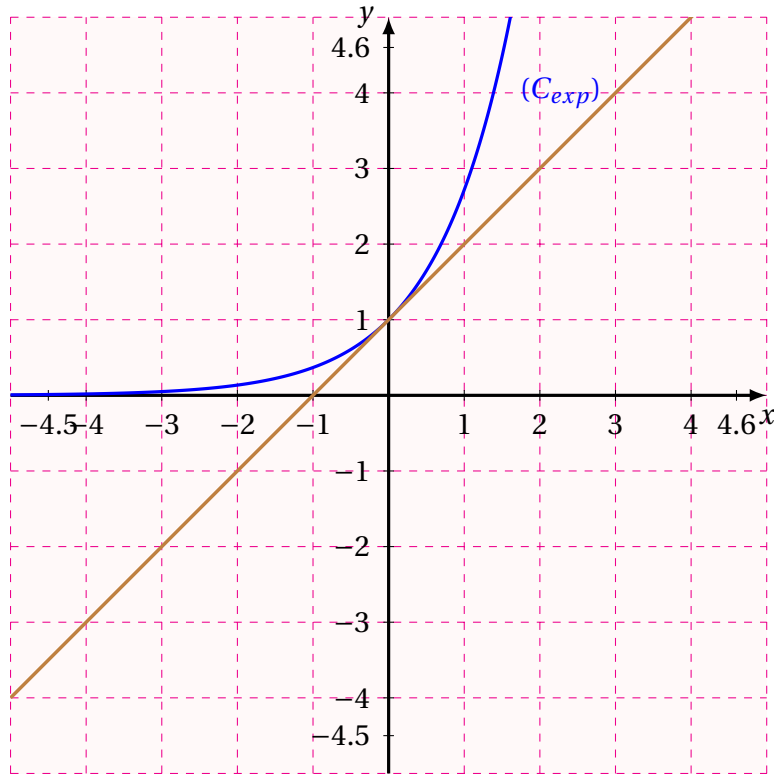
6 من تعريف العدد المشتق لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{0+x} - e^0}{x} = \exp'(0) = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

جدول التغيرات 2.3

جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$e^x$		$+$	
$e^x$		$0$	$+\infty$

التمثيل البياني



المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما  $x$  يؤول إلى  $-\infty$  لدينا  $exp'(0) = exp(0) = 1$  إذن المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا  $y = x + 1$  من تعريف العدد المشتق لدينا  $exp'(0) = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{0+x} - e^0}{x} = exp'(0) = 1$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4 حل معادلات ومتراجحات

حل معادلات ومتراجحات

الطريقة

المعادلة  $e^{u(x)} = e^{v(x)}$  تعني  $u(x) = v(x)$

المتراجحة  $e^{u(x)} < e^{v(x)}$  تعني  $u(x) < v(x)$

مثال تطبيقي

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات و المتراجحات التالية:

1  $e^{2x} + 3 = 0$

2  $e^{-2x+1} - 1 = 0$

3  $e^{-2x-1} - e^x < 0$

### الحل

1. تعني  $e^{2x} = -3$ . هذه المعادلة لا تقبل حولا في  $\mathbb{R}$  لأن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $e^{2x}$ ، إذن  $S = \emptyset$ .

2. تعني  $e^{-2x+1} = 1$  أي  $e^{-2x+1} = e^0$  أي  $-2x+1=0$  ومنه  $\frac{1}{2}$  إذن  $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ .

3. تعني  $e^{-2x-1} < e^x$  أي  $-2x-1 < x$  أي  $x > -\frac{1}{3}$  ومنه  $S = \left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$ .

4. تعني  $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$ . بوضع  $e^x = X$  نحصل على  $X^2 + X - 2 \leq 0$  جذرا كثيرا الحدود  $X = 2 + X - 2$  هما  $-2$  و  $1$

ومنه  $X^2 + X - 2 \leq 0$  تعني  $X < -2$  أو  $X > 1$

$X < -2$  تعني  $e^x < -2$ . هذه المتراجحة لا تقبل حولا في  $\mathbb{R}$ .

$X > 1$  تعني  $e^x > 1$  أي  $x > 0$ . إذن مجموعة حلول المتراجحة هي  $S = ]0; +\infty[$ .

### دراسة الدالة $\exp \circ u$

5

### 1.5 النهايات

### مراجعة

$a, b, c$  تمثل أعدادا حقيقية أو  $+\infty$  أو  $-\infty$

نعتبر الدوال التالية  $u$ ،  $e^x$  و  $f$  حيث  $f = \exp \circ u$

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$  و  $\lim_{x \rightarrow b} e^x = c$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

### مثال

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = e^{-x+2}$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+2) = +\infty$  و بما أن  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+2} = +\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+2) = -\infty$  و بما أن  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+2} = 0$  أي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

### مثال تطبيقي

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{-3x^3+2}$

أدرس نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ .

- لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2) = +\infty$  و بما أن  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x^3+2} = +\infty$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + 2) = -\infty$  و بما أن  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x^3+2} = 0$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

## 2.5 اتجاه التغير

### خاصية

إذا كانت  $u$  دالة معرفة على مجال  $I$  فإن للدالتين  $u$  و  $\exp \circ u$  نفس اتجاه التغير على المجال  $I$

### برهان

نعلم أن الدالة " $\exp$ " متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ . إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين  $u$  و  $\exp \circ u$  نفس اتجاه التغيرات على المجال  $I$ .

### مثال

- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{x^2-3}$
- نلاحظ أن  $f = \exp \circ u$  حيث  $u$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $u(x) = x^2 - 3$
- بما أن الدالة  $u$  متناقصة تماما على المجال  $] -\infty; 0]$  فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $] -\infty; 0]$ .
- وبما ان الدالة  $u$  متزايدة تماما على المجال  $] 0; +\infty[$  فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $] 0; +\infty[$

## 3.5 المشتقة

### خاصية

إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإن للدالة  $\exp \circ u$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا من أجل كل  $x$  من  $I$ ,

$$(\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}$$

### برهان

- إذا كانت الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و علما ان الدالة " $\exp$ " قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  فإن الدالة المركبة  $\exp \circ u$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:
- من أجل كل  $x$  من  $I$ ,  $(\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times (\exp)'[u(x)] = u'(x) \times (\exp)[u(x)]$
- أي من أجل كل  $x$  من  $I$ ,  $(\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

### أمثلة

- مشتقة الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{2x}$  هي  $f'(x) = 2.e^{2x}$
- مشتقة الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = e^{-5x+3}$  هي  $g'(x) = -5.e^{-5x+3}$

مشتقة الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $h(x) = e^{x^2+x+1}$  هي  $h'(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$   
 • مشتقة الدالة  $k$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $k(x) = e^{\frac{1}{x}}$  هي  $k'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

## 6 تمارين محلولة

### 1.6 تمارين تدريبية

#### التمرين 01

ضع العلامة ✓ أمام كل جملة صحيحة و العلامة ✗ أمام كل جملة خاطئة.

1  $e^{-3} < 0$

2  $e^{-5} = -e^5$

3 التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto e^x$  يقطع حامل محور الفواصل .

4  $\sqrt{e^{2x}} = e^x$

5  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

6 الدالة المشتقة للدالة  $x \mapsto e^{3x}$  هي  $x \mapsto e^{3x}$  .

7  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$

8 إذا كان  $x \geq 2$  فإن  $e^x \geq e^2$

9 إذا كان  $x \leq 0$  فإن  $e^x \leq 0$

10 من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^x \cdot e^{-x} = 1$

11 إشارة :  $(x-1)e^x$  هي نفس إشارة  $x-1$

12 من أجل  $x < 1$  :  $e^{x-1} < 0$

13  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = 0$

14  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ex}{x^3} = +\infty$

15  $e^x - e = e^{x-1}$

16  $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$

17 الدالة :  $x \mapsto e^{-1}x + 3$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

18 ليس للمترابحة  $e^{x^2-4x} < 0$  حل في  $\mathbb{R}$

19 الدالة :  $x \mapsto e^{x^2-4}$  هي حل للمعادلة :  $y' = y$

20  $e^{-\frac{1}{2}} < 1$

الحل

✓ 17

. ✗ 13

. ✗ 9

✓ 5

. ✗ 1

. ✗ 18

✓ 14

✓ 10

. ✗ 6

. ✗ 2

. ✗ 19

. ✗ 15

✓ 11

✓ 7

. ✗ 3

. ✓ 20

. ✓ 16

. ✗ 12

. ✓ 8

. ✓ 4

التمرين 02

بسط ما يلي :

$$\frac{e^{-4x+5}}{(e^x-2)^2} \quad 5$$

$$\frac{1}{(e^{-x})^2} \quad 3$$

$$e^{3x} \cdot e^{-2x} \quad 1$$

$$e^x(e^{-x} + e^{2x}) \quad 6$$

$$\frac{e^{4x+1}}{e^{2x} \cdot e^{-1}} \quad 4$$

$$e^x \cdot e^2 \quad 2$$

الحل

التبسيط :

$$1 \quad e^{3x} \cdot e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x$$

$$2 \quad e^x \cdot e^2 = e^{x+2}$$

$$3 \quad \frac{1}{(e^{-x})^2} = \frac{1}{e^{-2x}} = e^{2x}$$

$$4 \quad \frac{e^{4x+2}}{e^{2x} \cdot e^{-1}} = e^{4x+1} \cdot e^{-2x} \cdot e^1 = e^{4x-2x+1} = e^{2x+2}$$

$$5 \quad \frac{e^{-4x+5}}{(e^x-2)^2} = \frac{e^{-4x+5}}{e^{2x-4}} = e^{-4x+5} \cdot e^{-2x+4} = e^{-6x+9}$$

$$6 \quad e^x(e^{-x} + e^{2x}) = e^x \cdot e^{-x} + e^x \cdot e^{2x} = e^{x-x} + e^{x+2x} = 1 + e^{3x}$$

التمرين 03

\* بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad * \text{ نبين أن :}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \times \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

## التمرين 04

بين أن الدوال  $f$  المعرفة كما يلي هي دوال معرفة على  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 3} \quad 4$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 4}} \quad 3$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1} \quad 2$$

$$f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x}} \quad 1$$

1 لدينا :  $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x}}$  ومنه :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + e^{-x} \geq 0\}$  وهي محققة دوماً لأن  $e^x > 0$  و  $e^{-x} > 0$  ،  
 $D_f = \mathbb{R}$

2 لدينا :  $f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$  ومنه :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} + 1 \neq 0\}$  تكافئ  $e^{2x} = -1$  وهذا مستحيل إذن :  
 $D_f = \mathbb{R}$

3 لدينا :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 4}}$  ومنه :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + 4 > 0\}$  محققة دوماً لأن  $e^x > 0$  ومنه :  $D_f = \mathbb{R}$

4 لدينا :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$  ومنه :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + 3 \neq 0\}$  تكافئ :  $e^x = -3$  وهذا مستحيل ومنه :  $D_f = \mathbb{R}$

## التمرين 05

\* نعتبر الدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$   
 إذا علمنا أن :  $0 \leq x \leq 1$  عين حصراً للعبارة  $f(x)$

\* تعيين حصراً للعبارة :  $f(x)$   
 لدينا :  $0 \leq x \leq 1$  ومنه :  $e^0 \leq e^x \leq e^1$  إذن :  $2 \leq e^x + 1 \leq 1 + e$   
 وبالتالي :  $\frac{1}{1+e} \leq \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}$   
 ومنه :  $0 \leq f(x) \leq 1 + e$  إذن :  $0 \times \frac{1}{1+e} \leq x \times \frac{1}{e^x + 1} \leq 1(e+1)$

## التمرين 06

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1 بين أن الدالة  $f$  فردية.

2 بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$  ،

### الحل

1 من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $(-x)$  ينتمي إلى  $\mathbb{R}$  ولدينا:

• إذن الدالة  $f$  دالة فردية.  $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$

2  $\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2} = \frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2} = \frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}} = \frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{2(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}} = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) \frac{(e^x+1)^2}{(e^{2x}+1)}$

• و منه  $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2} = \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^{2x}+1)} = \frac{(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)} = f(2x)$

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$  ،

### التمرين 07

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = \frac{3e^x-1}{e^x+1}$

1 بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(-x) + f(x) = 2$  ، فسر بياننا النتيجة.

2 بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+1} - 1$  ،

### الحل

ليكن  $x$  عددا حقيقيا كيفيا.

1  $f(-x) + f(x) = \frac{e^x(3e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)} + \frac{3e^x-1}{e^x+1} = \frac{3-e^x}{1+e^x} + \frac{3e^x-1}{e^x+1} = \frac{2e^x+2}{e^x+1} = \frac{2(e^x+1)}{e^x+1}$

• و منه  $f(-x) + f(x) = 2$

المنحني الممثل للدالة  $f$  متناظر بالنسبة على النقطة  $A(0,1)$ .

2  $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+1} - 1 = \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x+1} = \frac{3e^x-1}{e^x+1}$

### التمرين 08

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية :

7  $e^{3x} - \frac{1}{e^x} = 0$

4  $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

1  $e^{2x-1} = 1$

5  $(x^2 - 4)e^x = (9x + 10)e^x$

2  $e^{x^2-1} = e$

6  $e^x - e^{-x} = 0$

3  $(x^2 - 4x + 3)e^x = 0$

حل المعادلات :

1 لدينا :  $e^{2x-1} = 1$  وهي تكافئ :  $e^{2x-1} = e^0$  وعليه :  $2x-1=0$  ومنه :  $x = \frac{1}{2}$  وعليه :  $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

2 لدينا :  $e^{x^2-1} = e$  وهي تكافئ :  $x^2-1=1$  ومنه :  $x^2=2$  إذن :  $x = \sqrt{2}$  أو  $x = -\sqrt{2}$  وبالتالي :  $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

3 لدينا :  $(x^2-4x+3)x=0$  وهي تكافئ :  $\Delta' = 4, x^2-4x+3=0$  للمعادلة حلين :  $x_2=3, x_1=1$  إذن :  $S = \{1; 3\}$

4 لدينا :  $e^{2x}-2e^x+1=0$

بوضع  $e^x = y$  نجد :  $\begin{cases} y^2-2y+1=0 \\ y=e^x \end{cases}$  إذن :  $\begin{cases} (y-1)^2=0 \\ y=e^x \end{cases}$  ومنه :  $\begin{cases} y=1 \\ e^x=1 \end{cases}$  أي :  $\{y=1, e^x=e^0\}$  إذن :

$x=0$  أي :  $S = \{0\}$

5 لدينا :  $(x^2-4)e^x = (9x-18)e^x$

وهي تكافئ :  $x^2-4=9x-18$  ومنه :  $\Delta = 25, x^2-9x+14=0$  ومنه للمعادلة حلين  $x_1=2$  و  $x_2=7$  إذن :

$S = \{2; 7\}$

6 لدينا :  $e^x - e^{-x} = 0$  وهي تكافئ :  $e^x - \frac{1}{e^x} = 0$

وعليه :  $\frac{e^{2x}-1}{e^x} = 0$  إذن :  $e^{2x}-1=0$  وعليه :  $e^{2x}=1$  أي :  $e^{2x}=e^0$  وبالتالي :  $2x=0$  ومنه :  $x=0$  إذن :

$S = \{0\}$

7 لدينا :  $e^{3x} - \frac{1}{e^x} = 0$  وهي تكافئ :  $\frac{e^{4x}-1}{e^x} = 0$

ومنه :  $e^{4x}-1=0$  إذن :  $e^{4x}=1$  وعليه :  $4x=0$  ومنه :  $x=0$  إذن :  $S = \{0\}$

## التمرين 09

حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحات التالية :

5  $e^{2x}-2e^x+1 \leq 0$

3  $e^{x^2-4} \leq e^{7x-16}$

1  $xe^{2x}-x^2e^{2x} \leq 0$

6  $x^2e^{4x}+4e^x > 0$

4  $e^{x^2-2} \leq \frac{1}{e^x}$

2  $e^{2x-1} \leq 1$

حل المتراجحات :

1 لدينا :  $xe^{2x}-x^2e^{2x} \leq 0$  وهي تكافئ :  $e^{2x}(x-x^2) \leq 0$  وعليه :  $x-x^2 \leq 0$  لأن :  $e^{2x} > 0$  إذن :  $x(-x+1) \leq 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$x-x^2$		-	0	+
		-	0	-

وعليه :  $S = ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$  إذن :  $x \in ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

2 لدينا :  $e^{2x-1} \leq 1$  وهي تكافئ :  $e^{2x-1} \leq e^0$  ومنه :  $2x-1 \leq 0$  إذن :  $x \leq \frac{1}{2}$  وعليه :  $S = ]-\infty; \frac{1}{2}]$

3 لدينا :  $e^{x^2-4} \leq e^{7x-16}$  وهي تكافئ :  $x^2-4 \leq 7x-16$  وعليه :  $x^2-7x+12 \leq 0$

ندرس إشارة :  $x^2-7x+12$  ،  $\Delta = 1$  يوجد جذران :  $x_1 = 3$  ،  $x_2 = 4$

$x$	$-\infty$	3	4	$+\infty$	
$x^2-7x+12$	+	0	-	0	+

إذن :  $S = [3;4]$

4 لدينا :  $e^{x^2-2} \leq \frac{1}{e^x}$  وهي تكافئ :  $e^{x^2-2} \cdot e^x \leq 1$  وعليه :  $e^{x^2+x-2} \leq e^1$  إذن :  $e^{x^2+x-2} \leq e^1$

وبالتالي :  $x^2+x-2 \leq 1$  إذن :  $x^2+x-3 \leq 0$

ندرس إشارة :  $x^2+x-3$  ،  $\Delta = 13$  يوجد جذران :  $x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$  ،  $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$x$	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
$x^2+x-3$	+	0	-	0	+

إذن :  $S = \left[ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right]$

5 لدينا :  $e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0$

بوضع :  $e^x = y$  نجد :  $y^2 - 2y + 1 \leq 0$  ومنه :  $(y-1)^2 \leq 0$  وعليه :  $\begin{cases} y-1=0 \\ e^x = y \end{cases}$

إذن :  $e^x = 1$  وعليه :  $x = 0$  إذن :  $S = \{0\}$

6 لدينا :  $x^2 e^{4x} + 4e^x > 0$  وهي تكافئ :  $e^x(x^2 e^{3x} + 4) > 0$  وهي محققة دوما لأن :  $e^x > 0$  و  $e^{3x} > 0$  و  $x^2 > 0$  وعليه

•  $S = \mathbb{R}$

## التمرين 10

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{\frac{1}{3}x+1}$  وليكن  $(C_f)$  منحنيا البياني.

1 أحسب  $f'(x)$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

2 عين نقط المنحني  $(C_f)$  التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = \frac{x}{3}$ .

## الحل

1 من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x+1}$

بما أن  $e^{\frac{1}{3}x+1} > 0$  فإن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) > 0$  و منه الدالة متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

2 يكون المماس عند نقطة من  $(C_f)$  فاصلتها  $x_0$  موازيا للمستقيم  $(\Delta)$  يعني  $f'(x_0) = \frac{1}{3}$

يكون لدينا إذن  $\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x_0+1} = \frac{1}{3}$  أي  $e^{\frac{1}{3}x_0+1} = 1$  وهذا يعني  $\frac{1}{3}x_0 + 1 = 0$  أي  $x_0 = -3$

و بالتالي توجد نقطة وحيدة من  $(C_f)$  فاصلتها  $x_0 = -3$  يكون المماس عندها موازيا للمستقيم  $(\Delta)$ .

## التمرين 11

عين مجموعة تعريف الدالة  $f$  والمجموعة التي تقبل فيها الاشتقاق ثم عين دالتها المشتقة  $f'$  في كل حالة مما يلي :

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1} \quad 6$$

$$f(x) = e^{2x} - e^{-x} \quad 1$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad 7$$

$$f(x) = xe^{x-1} \quad 2$$

$$f(x) = \sin xe^{\cos x} \quad 8$$

$$f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1} \quad 3$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad 9$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1} \quad 4$$

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1} \quad 10$$

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x \quad 5$$

## الحل

$$1 \text{ لدينا : } f(x) = e^{2x} - e^{-x}$$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ، حيث :  $f'(x) = 2e^{2x} + e^{-x}$

$$2 \text{ لدينا : } f(x) = xe^{x-1}$$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ، حيث :  $f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} + xe^{x-1}$  ومنه :  $f'(x) = (1+x)e^{x-1}$

$$3 \text{ لدينا : } f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}^*$  و تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$ ، حيث :

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)(e^x - 1) - e^x(e^x + x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$\text{ومنه : } f'(x) = \frac{e^{2x} - 1 - e^{2x} - xe^x}{(e^x - 1)^2} \text{ وعليه : } f'(x) = \frac{-1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$4 \text{ لدينا : } f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$$

الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  حيث :

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 1) - 2x \cdot e^x}{(x^2 - 1)^2} \text{ ومنه : } f'(x) =$$

$$\frac{(x^2 - 2x - 1)e^x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$5 \text{ لدينا : } f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x \text{ حيث : } D_f = \mathbb{R}$$

الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث :

$$f'(x) = (2x - 4)e^{3x} + (x^2 - 4x + 5)e^x$$

وعليه :  $f'(x) = (2x - 4 + x^2 - 4x + 5)e^x$  ومنه :  $f'(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$

6 لدينا :  $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$  حيث :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \geq 0\}$

ومنه :  $e^x - 1 \geq 0$  وعليه :  $e^x \geq 1$  وبالتالي :  $x \geq 0$  إذن :  $D_f = [0; +\infty[$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  حيث :  $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$

7 لدينا :  $f(x) = \frac{1}{e^x}$

الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  حيث :  $f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

8 لدينا :  $f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x}$

الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث :  $f'(x) = \cos x \cdot e^{\cos x} + \sin x (-\sin x) e^{\cos x}$

ومنه :  $f'(x) = e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x)$  وعليه :  $f'(x) = e^{\cos x} [\cos x - (1 - \cos^2 x)]$

وبالتالي :  $f'(x) = (\cos^2 x + \cos x - 1) e^{\cos x}$

9 لدينا :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث :  $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

10 لدينا :  $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}$

حيث :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0\}$  نحل المتراجحة  $e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0$  بوضع  $y = e^x$  نجد :  $y^2 - 2y + 1 \geq 0$

وعليه :  $(y - 1)^2 \geq 0$

أي أن :  $(e^x - 1)^2 \geq 0$  وهي محققة دوماً . إذن :  $D_f = \mathbb{R}$

الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  حيث :  $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x}{2\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}} = \frac{e^{2x} - e^x}{\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}}$

## التمرين 12

أحسب النهايات التالية :

4  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x - 1) e^x$

1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$

5  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - 1) e^x - 3e^{2x}]$

2  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) e^x$

3  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x + 1}$

## الحل

1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$

2  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x e^x - e^x) = 0$

3  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = 1$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = +\infty$

4  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x - 1) e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 e^x + 2x e^x - e^x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x-1)e^x - 3e^{2x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left( 2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 3 \right) = -\infty \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ لأن}$$

### التمرين 13

احسب نهايات الدالة  $f$  في كل حالة مما يلي عند مجموعة التعريف :

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \quad 5$$

$$f(x) = x + e^x \quad 1$$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x + 1} \quad 6$$

$$f(x) = e^{-x+4} \quad 2$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x} \quad 7$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \quad 3$$

$$f(x) = (x-1)e^x \quad 8$$

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \quad 4$$

### الحل

$$1 \text{ لدينا : } f(x) = x + e^x \text{ حيث : } D_f = ]-\infty; +\infty[$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^x) = -\infty \text{ و عليه } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x) = +\infty$$

$$2 \text{ لدينا : } f(x) = e^{-x+4} \text{ حيث : } D_f = ]-\infty; +\infty[$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+4} = +\infty \text{ و عليه } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+4} = 0$$

$$3 \text{ لدينا : } f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \text{ حيث : } D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1 \text{ و عليه } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$4 \text{ لدينا : } f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ حيث : } D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty \text{ و عليه } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\text{وبالتالي : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \text{ ، } \left( \frac{1}{x} = t : \text{ نضع} \right) \text{ إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$5 \text{ لدينا : } f(x) = \frac{e^x}{x^2} \text{ حيث : } D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$6 \text{ لدينا : } f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x + 1} \text{ حيث : } D_f = ]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{e^x+1} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{e^x+1} = +\infty$$

لدينا :  $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$  حيث  $D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  7

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \times \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \times \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{x} = +\infty \end{aligned}$$

لدينا :  $f(x) = (x-1)e^x$  حيث  $D_f = ]-\infty; +\infty[$  8

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

## التمرين 14

نعتبر الدالة  $f$  والمعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x}-e^x}{x}, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 ادرس قابلية الاشتقاق للدالة  $f$  عند 0 .

2 عين الدالة المشتقة للدالة  $f$  من أجل  $x \neq 0$  .

## الحل

1 قابلية الاشتقاق عند 0 :  $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x}-e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} \times \frac{e^x-1}{x} = -\infty$$

و منه  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليسار .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} \times \frac{e^x-1}{x} = +\infty$$

و منه  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين وبالتالي  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

2 تعيين الدالة المشتقة من أجل  $x \neq 0$  :

$$f'(x) = \frac{(2e^{2x}-e^x)x-1(e^{2x}-e^x)}{x^2} = \frac{2xe^{2x}-xe^x-e^{2x}+e^x}{x^2} = \frac{(2x-1)e^{2x}-(x-1)e^x}{x^2}$$

## التمرين 15

\* نعتبر الدالة  $f$  حيث :  $f(x) = (4x+3)e^x$

احسب كل من المشتقات :  $f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}$  , ثم استنتج عبارة  $f^{(n)}(x)$  .

$$f(x) = (4x+3)e^x \quad *$$

$$f'(x) = 4.e^x + (4x+3)e^x = (4+4x+3)e^x = (4x+7)e^x$$

$$f''(x) = 4.e^x + (4x+7)e^x = (4+4x+7)e^x = (4x+11)e^x$$

$$f^{(3)}(x) = 4.e^x + (4x+11)e^x = (4+4x+11)e^x = (4x+15)e^x$$

$$f^{(4)}(x) = 4.e^x + (4x+15)e^x = (4+4x+15)e^x = (4x+19)e^x$$

$$f^{(n)}(x) = (4x+3+4n)e^x : f^{(n)} \text{ عبارة}$$

## التمرين 16

أدرس التغيرات لكل من الدوال المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad 4$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad 3$$

$$f(x) = x - e^x \quad 2$$

$$f(x) = xe^x \quad 1$$

دراسة تغيرات  $f$  :

1 لدينا :  $f(x) = xe^x$  حيث :  $D_f = ]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

و عليه  $f'(x)$  له نفس إشارة  $x+1$  ولدينا :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$x+1$		$-$	$+$

إذن  $f$  متزايدة تماما على  $]-1; +\infty[$  و متناقصة تماما على  $]-\infty; -1]$  ؛ و عليه جدول التغيرات كما يلي :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$0$	$\frac{1}{e}$	$+\infty$

2 لدينا :  $f(x) = x - e^x$  حيث :  $D_f = ]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 - e^x$$

- $x=0$  : تكافئ  $f'(x) = 0$  :  $1 - e^x = 0$  ومنه  $e^x = 1$  وعليه  $x=0$
- $f'(x) > 0$  : تكافئ  $1 - e^x > 0$  ومنه  $e^x < 1$  إذن  $x < 0$  و عليه  $f$  متزايدة تماما على  $]-\infty; 0[$ .
- $f'(x) < 0$  : تكافئ  $x > 0$  ومنه  $f$  متناقصة تماما على  $]0; +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$-\infty$

3 لدينا :  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  حيث  $D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$  : تكافئ  $x-1$  : إذن  $x=1$

$f'(x) > 0$  : تكافئ  $x > 1$  : إذن  $f$  متزايدة تماما على  $]1; +\infty[$

و كذلك  $f$  متناقصة تماما على  $]-\infty; 0[$  وعلى  $]0; 1[$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f(x)$			$0$	
$f(x)$	$0$	$+\infty$	$e$	$+\infty$

4 لدينا :  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  حيث  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\}$

$x=0$  :  $e^x - 1 = 0$  : تكافئ  $e^x = 1$  وعليه  $x=0$

إذن :  $D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x + 1 \rightarrow 2 \\ e^x - 1 \rightarrow 0^- \end{array} \right. : \text{لأن}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x + 1 \rightarrow 2 \\ e^x - 1 \rightarrow 0^+ \end{array} \right. \text{ لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$$

$$\bullet f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1 - e^x - 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

و منه :  $f'(x) < 0$

الدالة  $f$  متناقصة تماما على كل من المجالين  $]-\infty; 0[$  و  $]0; +\infty[$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	-		-
$f(x)$	-1	+	1

### التمرين 17

نعبر الدالة  $f$  حيث :  $f(x) = e^x + e^{-x}$

1 ادرس تغيرات الدالة  $f$  ؛ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $f(x) \geq 2$

نعبر الدالة  $g$  المعرفة بالعلاقة :  $g(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x} - 1}$

2 ادرس تغيرات الدالة  $g$  ، أنشئ التمثيل البياني  $(C_g)$  للدالة  $g$ .

### الحل

1 دراسة تغيرات  $f$  :  $D_f = ]-\infty; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet f'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$e^x = e^{-x} : \text{ ومنه } e^x - e^{-x} = 0 \text{ تكافئ : } e^x = e^{-x}$$

$$\text{ و عليه : } x = -x \text{ و منه : } 2x = 0 \text{ أي : } x = 0$$

$$e^x > e^{-x} : \text{ ومنه } e^x - e^{-x} > 0 \text{ تكافئ : } e^x > e^{-x}$$

$$\text{ إذن : } x > -x \text{ و منه : } 2x > 0 \text{ و عليه : } x > 0$$

إذن  $f$  متزايدة تماما على  $]0; +\infty[$  و بالتالي فهي متناقصة تماما على  $]-\infty; 0[$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

الاستنتاج :

من جدول التغيرات القيمة 2 هي قيمة حدية صغرى للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  و عليه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  
 $f(x) \geq 2$

2 دراسة تغيرات الدالة  $g$  :

$$\bullet D_g = \{x \in \mathbb{R} : e^x + e^{-x} - 1 \neq 0\}$$

نحل المعادلة:  $e^x + e^{-x} - 1 = 0$  أي:  $e^x + e^{-x} = 1$  و هذا مستحيل لأن :  $f(x) \geq 2$  إذن ليس

للمعادلة حلول و عليه :  $D_f = ]-\infty; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$\bullet g'(x) = \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x} - 1)^2}$$

$g'(x) = 0$  تكافئ :  $-e^x + e^{-x} = 0$  أي:  $e^{-x} = e^x$  و عليه :  $-x = x$  و منه :  $2x = 0$  أي :  $x = 0$

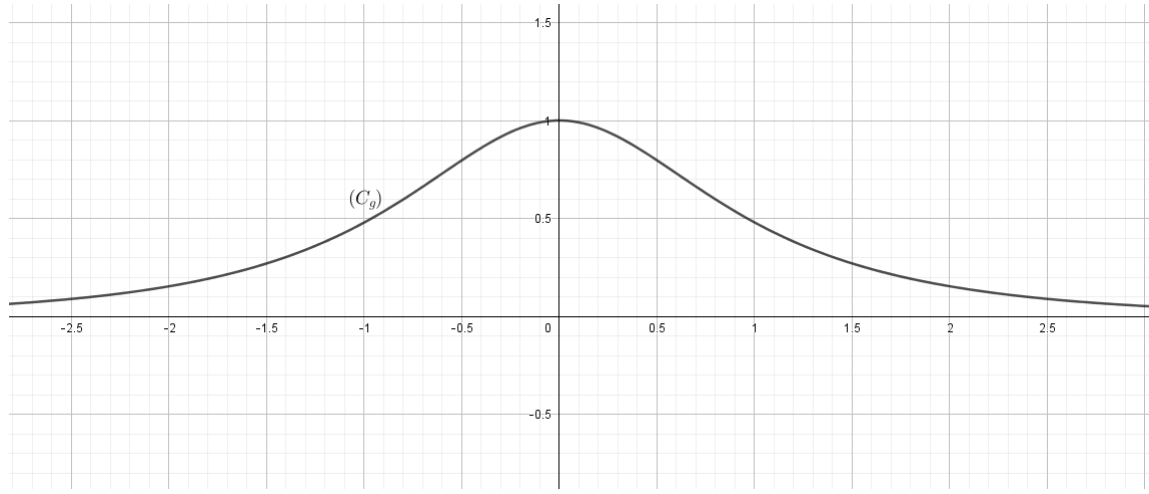
$g'(x) > 0$  تكافئ :  $-e^x + e^{-x} > 0$  أي:  $e^{-x} > e^x$  و عليه :  $-x > x$  و منه :  $2x > 0$  أي :  $x > 0$

إذن  $g$  متزايدة تماما على  $] -\infty; 0]$  و عليه فهي متناقصة تماما على  $[0; +\infty[$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	0	1	0

$$\bullet g(0) = 1$$

إشياء  $(C_g)$  :



## التمرين 18

(I) دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = 1 - x - e^{-x}$

1 ادرس تغيرات الدالة  $h$

2 استنتج إشارة  $h(x)$  على  $\mathbb{R}$

(II) نعتبر الدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1 احسب  $f'(x)$  ثم استنتج إشارتها و اتجاه تغير الدالة  $f$

2 احسب نهايات الدالة  $f$  عند مجموعة تعريفها . ثم استنتج جدول تغيراتها .

3 أنشئ التمثيل البياني للدالة  $f$  في معلم متعامد متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

## التمرين 19

(I) نعتبر الدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$

1 ادرس تغيرات الدالة  $f$

2 ليكن  $(C_f)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  في معلم متعامد متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  . بين أن  $(C_f)$  يقبل ثلاثة مستقيمات مقارنة

3 بين أن النقطة  $\omega(0; 1)$  مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$  ثم أنشئه .

(II) نعتبر الدالة  $g$  حيث :  $g(x) = \frac{2e^x}{|e^x - 1|}$

1 اكتب  $g(x)$  دون رمز القيمة المطلقة .

2 أنشئ  $(C_g)$  التمثيل البياني للدالة  $g$  باستخدام  $(C_f)$  .

3 ناقش بياناً تبعا لقيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي  $m$  بحيث :  
 $(m-3)|e^x - 1| = 2e^x$

الحل

1 دراسة تغيرات الدالة  $f$  :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\}$

$$D_f = \mathbb{R}^* , D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^x}{e^x - 1} = -\infty$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$e^x - 1$		-	+

$$\left\{ \begin{array}{l} 2e^x \rightarrow 2 \\ e^x - 1 \rightarrow 0 \end{array} \right. : \text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x}{e^x - 1} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2e^x \rightarrow 2 \\ e^x - 1 \rightarrow 0 \end{array} \right. : \text{وعليه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2} \text{ إذن : } f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) - e^x \cdot 2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^x(e^x - 1 - e^x)}{(e^x - 1)^2}$$

ومنه  $f'(x) < 0$  ومنه  $f$  متناقصة تماما على كل من المجالين :  $]0; +\infty[$  ,  $]-\infty; 0[$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$		-	-
$f(x)$	0	$+\infty$	2

2 بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  فإن  $y = 0$  معادلة مستقيم مقارب

و بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  فإن  $y = 2$  معادلة مستقيم مقارب

و بما أن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  فإن  $x = 0$  معادلة مستقيم مقارب .

1 نبين أن  $\omega(0; 1)$  مركز تناظر :

من أجل  $\epsilon \in D_f$

لدينا :  $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$  و  $2\alpha - x \in D_f$

أي :  $f(-x) + f(x) = 2$  و عليه  $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 1 = 2$

لدينا من أجل كل  $x$  من  $D_f$  :  $-x \in D_f$

$$f(-x) + f(x) = \frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{2}{\frac{1}{e^x}-1} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{2}{\frac{1}{e^x}-1} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{2}{1-e^x} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{-2}{e^x-1} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{-2+2e^x}{e^x-1} = 2$$

• إذن :  $\frac{2(e^x-1)}{e^x-1} = 2$  و منه  $\omega(0;1)$  مركز تناظر المنحنى  $(C_f)$ .

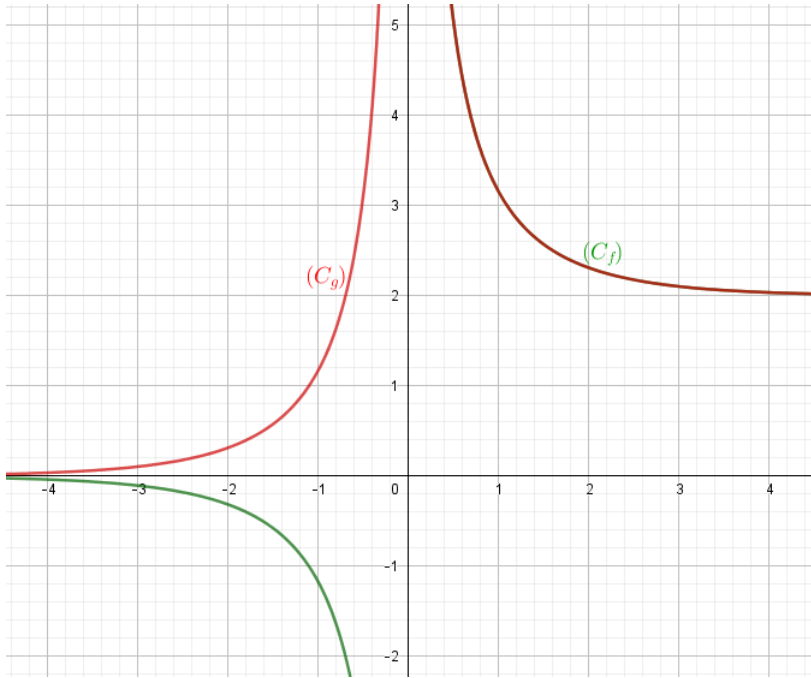
2 كتابة  $g(x)$  دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{2e^x}{-(e^x-1)}, e^x-1 < 0 & x < 0 \\ g(x) = \frac{2e^x}{e^x-1}, e^x-1 > 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = -f(x), x \in ]-\infty; 0] \\ g(x) = f(x), x \in ]0; +\infty[ \end{cases} \text{ إذن :}$$

في المجال  $]0; +\infty[$  ينطبق على  $(C_f)$  و في المجال  $] -\infty; 0]$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة لمحور الفواصل.

- إنشاء  $(C_g)$  و  $(C_f)$  :



3 - المناقشة البيانية :  $(m-3)|e^x-1| = 2e^x$

أي :  $m-3 = \frac{2e^x}{|e^x-1|}$  أي  $m-3 = g(x)$

و منه بوضع  $m-3 = \alpha$  نجد  $g(x) = \alpha$

لما  $\alpha \leq 2$  أي  $m-3 \leq 2$  أي  $m \leq 5$

- ومنه ليس للمعادلة حلول .

- لما  $\alpha > 2$  أي  $m > 5$  : للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة .

•  $g(x) = e^{x^2+ax+b}$  :  $b$  و  $a$  عدنان حقيقيان و  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  
 عين قيمتي  $a$  و  $b$  الموافقتين لجدول تغيرات الدالة  $g$  التالي :

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$0$	
$g(x)$	$+\infty$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$

## الحل

من جدول التغيرات لدينا :  $g'(\frac{3}{2}) = 0$  و  $g(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{5}{4}}$

• مشتقة الدالة  $g$  :  $g'(x) = (2x+a)e^{x^2+ax+b}$

$g'(\frac{3}{2}) = 0$  تكافئ  $(3+a)e^{\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b} = 0$  لأن  $3+a=0$  تكافئ

إذن :  $a = -3$

$g(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{5}{4}}$  تكافئ  $e^{\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b} = e^{-\frac{5}{4}}$  و منه :  $(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b) = -\frac{5}{4}$  و منه :  $b = 1$

و بالتالي :  $a = -3$  و  $b = 1$

## التمرين 21

•  $(C_f)$  هو التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = ae^{-2x} + be^{-x} + cx$  مع  $a, b, c$  أعداد حقيقية ثابتة.

عين الدالة  $f$  إذا علمت أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  معادلته  $y = 2x - \frac{1}{2}$  في النقطة  $H(0; -\frac{1}{2})$

و يقبل عند  $+\infty$  مستقيما مقاربا معادلته  $y = 2x$ .

## الحل

النقطة  $H(0; -\frac{1}{2})$  تنتمي إلى  $(C_f)$  معناه :  $f(0) = -\frac{1}{2}$  أي :  $a + b = -\frac{1}{2}$

• المماس  $(T)$  عند النقطة  $H(0; -\frac{1}{2})$  معادلته :  $y = 2x - \frac{1}{2}$  معناه :  $f'(0) = 2$

$f'(x) = -2ae^{-2x} - be^{-x} + c$  و منه :  $f'(0) = 2$  تكافئ :  $-2a - b + c = 2$  أي :  $-2a - b = 2 - c$

$y = 2x$  معادلة المستقيم المقارب عند  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - cx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [ae^{-2x} + be^{-x}] = 0$$

معناه :  $y = cx$  معادلة المستقيم المقارب عند  $+\infty$  و بالتالي :  $c = 2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b = -\frac{1}{2} \\ -2a-b = 0 \end{array} \right. \text{ التي تكافئ : } \left\{ \begin{array}{l} a+b = -\frac{1}{2} \\ -2a-b = 2-c \end{array} \right.$$

ومنه :  $a = \frac{1}{2}$  و  $b = -1$  و بالتالي :  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x} + 2x$

## التمرين 22

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = (ax+b)e^x$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان.  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و كتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- (1) عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث يشمل المنحني  $(C_f)$  النقطة  $\Omega(1, e)$  ويقبل مماسا معامل توجيهه  $3e$ .
- (2) أحسب  $f'(x)$  و شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[-4; 5]$ .
- (3) أكتب معادلة المماس للمنحني عند النقطة التي فاصلتها  $0$ .
- (4) بين أن المنحني يقبل نقطة انعطاف  $w$  يطلب تعيين إحداثياتها.
- (5) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $[-4; 5]$  كما يلي :  $g(x) = [f(x)]^2$ . استنتج جدول تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[-4; 5]$ .

## الحل

(1) تعيين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  :

المنحني  $(C_f)$  يشمل النقطة  $\Omega(1, e)$  معناه :  $f(1) = e$

معامل توجيه المماس عند  $\Omega(1, e)$  يساوي  $3e$  معناه :  $f'(1) = 3e$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = e \\ f'(1) = 3e \end{array} \right. \text{ نحسب } f'(x) \text{ فنجد : } f'(x) = (ax+a+b)e^x \text{ و بالتالي نحل الجملة :}$$

$$\text{ومنّه : } \left\{ \begin{array}{l} (a+b)e = e \\ (2a+b)e = 3e \end{array} \right. \text{ و بالتالي نجد : } a = 2 \text{ و } b = -1 \text{ أي : } f(x) = (2x-1)e^x$$

(2) حساب  $f'(x)$  :  $f'(x) = 2e^x + e^x(2x-1) = e^x(2+2x-1) = e^x(2x+1)$

إشارة المشتقة من إشارة  $(2x+1)$  لأن :  $e^x > 0$

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	-4	$-\frac{1}{2}$	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-9-4e^{-4}$	$-2e^{-\frac{1}{2}}$	$9e^5$

(3) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها 0 .

$y = x - 1$  و منه معادلة المماس المطلوبة هي :  $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

(4) نبين أن المنحنى يقبل نقطة إنعطاف  $\omega$  يطلب تعيين إحداثياتها.

حساب الدالة المشتقة الثانية فنجد  $f''(x) = (2x+3)e^x$  تنعدم عند  $-\frac{3}{2}$  و جدول إشارتها هو :

$x$	-4	$-\frac{3}{2}$	5
$f''(x)$	-	0	+

بما أن  $f''(x)$  إنعدمت عند  $-\frac{3}{2}$  و غيرت من إشارتها فإن النقطة  $\omega\left(-\frac{3}{2}; -4e^{-\frac{3}{2}}\right)$  هي نقطة إنعطاف للمنحنى  $(C_f)$ .

(5) جدول تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[-4;5]$  حيث :  $g(x) = [f(x)]^2$

حيث :  $f(x) = (2x-1)e^x$  و  $f'(x) = (2x+1)e^x$  حيث  $g'(x) = 2f'(x).f(x)$

$x$	4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	-	-	0	+
$g'(x)$	+	0	0	+
$g(x)$	$81e^{-8}$	$4e^{-1}$	0	$81e^{30}$

هو التمثيل البياني للدالة  $f$  معرفة وقابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = ax + b + e^{-x}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان .

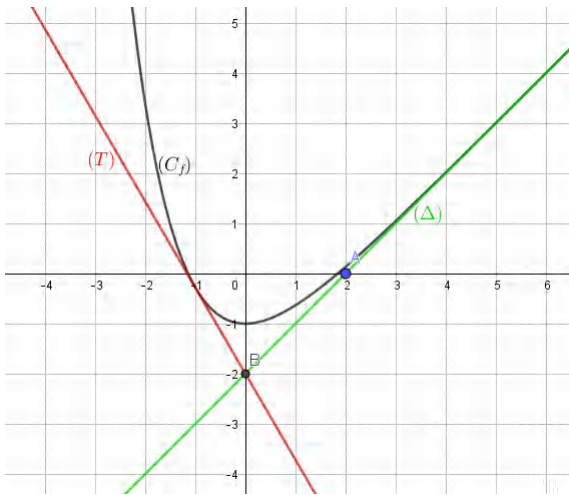
( $\Delta$ ) المستقيم المقارب المائل للمنحنى ( $C_f$ ) المار من النقطتين  $A(2,0)$  و  $B(0,-2)$

( $T$ ) هو المماس للمنحنى ( $C_f$ ) في النقطة التي فاصلتها  $-1$  و معامل توجيهه هو  $1-e$ .

(1) أكتب معادلة للمستقيم ( $\Delta$ ).

(2) إستنتج قيمة كلا من  $a$  و  $b$ .

(3) أكتب معادلة للمماس ( $T$ ).



## الحل

(1) بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  فإن معادلة ( $\Delta$ ) هي :  $y = ax + b$  و المار من النقطتين  $A(2,0)$  و  $B(0,-2)$

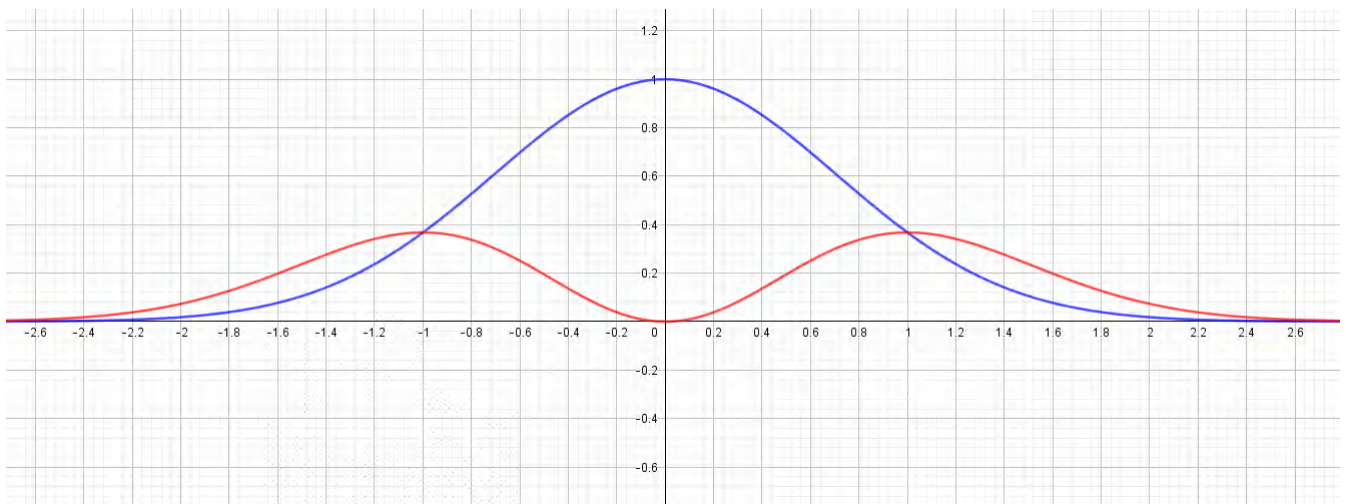
فيكون لدينا : 
$$\begin{cases} 0 = 2(a) + b \\ -2 = 0(a) + b \end{cases}$$
 فنحصل على :  $a = 1$  و  $b = -2$ .

إذن :  $f(x) = x - 2 + e^{-x}$  و معادلة ( $\Delta$ ) هي :  $y = x - 2$ .

(2) معادلة ( $T$ ) :  $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$  أي :  $y = (1-e)(x+1) - 3 + e$  وبالتالي : معادلة ( $T$ ) هي :  $y = (1-e)x - 2$ .

## التمرين 24

و  $f$  و  $g$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  بحيث :  $f(x) = e^{-x^2}$  و  $g(x) = x^2 e^{-x^2}$  وليكن ( $C_g$ ) و ( $C_f$ ) التمثيلان البيانيان لهما على الترتيب.



- 1) ميز  $(C_f)$  و  $(C_g)$  مع التعليل .
- 2) أدرس شفعية الدالتين  $f$  و  $g$  .
- 3) عين النهاية عند  $+\infty$  و أدرس إتجاه تغيرات الدالتين  $f$  و  $g$  .
- 4) أدرس الوضعية النسبية للمنحنين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  .

## الحل

1)  $(C_f)$  هو المنحني الذي يشمل النقطة  $A(0,1)$  لأن  $f(0) = 1$  و  $(C_g)$  هو المنحني الذي يشمل المبدأ  $O(0,0)$  لأن  $g(0) = 0$  .  
 2) شفعية الدالتين  $f$  و  $g$  :

شفعية  $f$  : من أجل  $x \in \mathbb{R}$  ,  $-x \in \mathbb{R}$  و  $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$  و منه  $f$  دالة زوجية .  
 شفعية  $g$  : من أجل  $x \in \mathbb{R}$  ,  $-x \in \mathbb{R}$  و  $g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = g(x)$  و منه  $f$  دالة زوجية .  
 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$  : حيث  $f$  و  $g$  زوجيتان .  
 ب) دراسة تغيرات الدالة  $f$  :  
 $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	1	0

ج) دراسة تغيرات الدالة  $g$  :  $g'(x) = 2xe^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}(x^2) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$  :  
 جدول إشارة  $g'(x)$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$2x$	-	-	0	+	+
$1-x^2$	-	0	+	+	0
$g'(x)$	+	0	-	0	-

جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$	0	$e^{-1}$	0	$e^{-1}$	0

- (4) الوضعية النسبية : ندرس إشارة الفرق  $g(x) - f(x)$
- $g(x) - f(x) = x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} = (x^2 - 1)e^{-x^2}$  إشارة هذا الفرق من إشارة  $x^2 - 1$  لأن  $e^{-x^2} > 0$  ومنه :
- على المجالين  $]-\infty, -1[$  و  $]1, +\infty[$  يكون  $x^2 - 1 > 0$  وبالتالي المنحنى  $(C_g)$  يقع فوق المنحنى  $(C_f)$ .
- على المجال  $]-1, 1[$  يكون  $x^2 - 1 < 0$  وبالتالي المنحنى  $(C_g)$  يقع تحت المنحنى  $(C_f)$ .
- المنحنيان يتقاطعان في النقطتين  $B(-1; e^{-1})$  و  $C(1; e^{-1})$

## 2.6 تمارين تجريبية

### التمرين 01

- يمكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
- حيث  $a$  ؛  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- (1) عين الأعداد الحقيقية  $a$  ؛  $b$  و  $c$  بحيث يقبل  $(C_f)$  عند النقطة  $A(0; -3)$  مماسا معامل توجيهه 3 و العدد  $\sqrt{3}$  حل للمعادلة  $f(x) = 0$
- نضع  $c = -3$  ،  $b = 0$  ،  $a = 1$
- (2) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- (3) ثم أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها .
- (4) أكتب معادلة لـ  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x = 0$
- (5) عين إحداثيات نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل .
- (6) أرسم  $(C_f)$  و  $(T)$  .
- (7)  $m$  وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة :  $x^2 - 3 + me^x = 0$

• يمكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$   
 حيث  $a$  ؛  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .  
 (1) تعيين الأعداد الحقيقية  $a$  ؛  $b$  و  $c$  بحيث يقبل  $(C_f)$  عند النقطة  $A(0; -3)$  مماسا معامل توجيهه 3 و العدد  $\sqrt{3}$  حل للمعادلة  $f(x) = 0$

$$f(0) = -3 \text{ و هذا يعني } c = -3$$

$$\text{و لدينا } f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

$$f'(0) = 3 \text{ يعني أن } b - c = 3 \text{ و منه } b = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \text{ يعني أن } (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ و منه } a = 1$$

$$(2) \text{ نضع } a = 1, b = 0, c = -3 \text{ تصبح } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ لأنه بوضع } x = 2t$$

$$\text{نجد } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

$$\text{حساب المشتقة : } f'(x) = (2x)e^{-x} - e^{-x}(x^2 - 3) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة  $(-x^2 + 2x + 3)$  تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه  $f$  متناقصة على المجالين  $]-\infty; -1]$

$[3; +\infty[$  و متزايدة على المجال  $]-1; 3]$ .

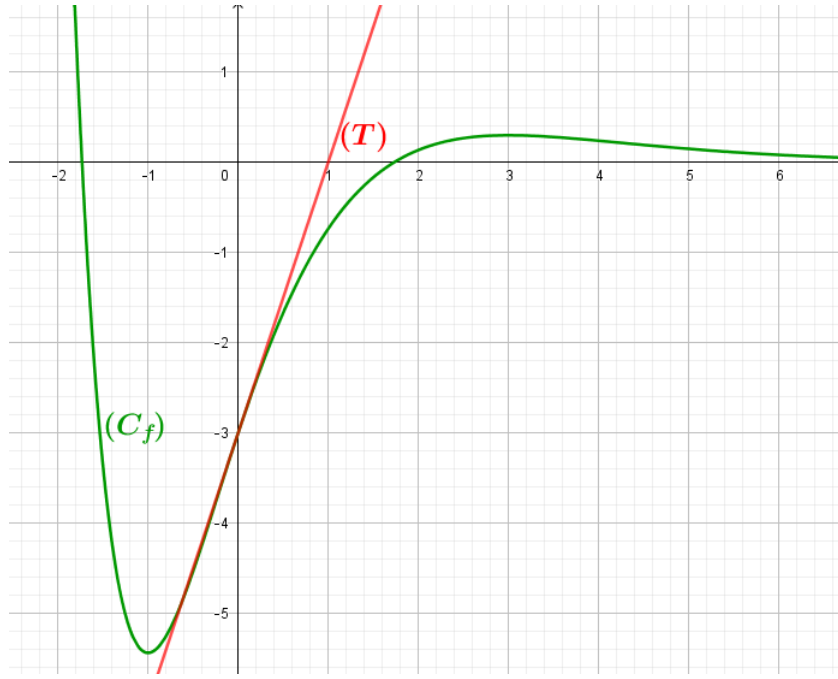
$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$		$-2e$		$\frac{6}{e^3}$	$0$

(4) كتابة معادلة لـ  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x = 0$  معادلة المماس هي  $y = 3x - 3$ .

(5) تعيين إحداثيات نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل :

$f(x) = 0$  يكافئ  $x^2 - 3 = 0$ . أي ان  $x = \sqrt{3}$  او  $x = -\sqrt{3}$  نقطتي التقاطع هما  $B(\sqrt{3}; 0)$  و  $C(-\sqrt{3}; 0)$ .

(6) رسم  $(T)$  و  $(C_f)$



(7)  $m$  وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة :  $x^2 - 3 + me^x = 0$  المعادلة تكافئ  
 $-m = f(x)$  أي ان  $me^x = -(x^2 - 3)$  يكافئ  $-m = f(x)$  مع المستقيم  $(\Delta_m)$  ذو المعادلة  $y = -m$ .  
 المناقشة :

☞ لما  $-m < -2e$  أي ان  $m > 2e$  نلاحظ ان  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول .  
 ☞ لما  $-m = -2e$  أي ان  $m = 2e$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل  
 وحيد سالب.

☞ لما  $-m > -2e$  أي ان  $3 < m < 2e$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة  
 حلين سالبين.

☞ لما  $-m = -3$  أي ان  $m = 3$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها  
 سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

☞ لما  $-m > -3$  أي ان  $0 \leq m < 3$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة  
 ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

☞ لما  $-m > 0$  أي ان  $-\frac{6}{e^3} < m < 0$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان  
 ونقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

☞ لما  $-m = \frac{6}{e^3}$  أي أن  $m = -\frac{6}{e^3}$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه  
 للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة.

☞ لما  $-m > \frac{6}{e^3}$  أي ان  $m < -\frac{6}{e^3}$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد  
 سالب .

- نعتبر الدالة  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = x - e^{-\frac{1}{2}x}$
- (1) ادرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم أنشئ جدول تغيراتها على  $\mathbb{R}$  .
  - (2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $0.70 < \alpha < 0.71$  .
  - (3) استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .
- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x$
- ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس .
- (أ) احسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  .
  - (ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)]$  ، وفسر النتيجة بيانيا .
  - (ج) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنى ( $C_f$ ) والمستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة  $y = -x + 2$  .
  - (2) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \times g(x)$  ، ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة  $f$  .
  - (3) بين أن  $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$  ، ثم عين حصرا للعدد  $f(\alpha)$  .
  - (4) احسب احداثيتي  $A$  نقطة تقاطع المنحنى ( $C_f$ ) مع حامل محور الترتيب .
  - (5) اكتب معادلة المماس  $T$  للمنحنى ( $C_f$ ) في النقطة  $A$  .
  - (6) احسب  $f(2)$  و  $f(2\ln \frac{1}{2})$  ، ثم ارسم كل من المستقيم ( $\Delta$ ) ، المماس  $T$  والمنحنى ( $C_f$ ) .
  - (7) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول  $x$  :  $2e^{\frac{1}{2}x} = \frac{m-2}{x-2}$  .

الحل

الجزء الأول

① دراسة تغيرات الدالة  $g$  :  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = x - e^{-\frac{1}{2}x}$

أولا : حساب النهايات  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-\frac{1}{2}x}) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^{-\frac{1}{2}x}) = +\infty$

ثانيا : اتجاه التغير الدالة  $g$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

ولدينا :  $g'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) > 0$  وعليه الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$   
جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② إثبات أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  :

لدينا الدالة  $g$  معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال  $]0,7;0,71[$  و  $g(0,7) \times g(0,71) \leq 0$  إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0,7 < \alpha < 0,71$   
جدول الإشارة

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب :  $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x$

① حساب نهايات الدالة  $f$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) \left( 2e^{\frac{1}{2}x} - 1 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = +\infty$$
 و

حساب :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x - 2 + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} \right) = 0$$
 لدينا :

التفسير : المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته  $y = 2 - x$  بجوار  $(-\infty)$   
دراسة الوضع النسبي :

يؤول إلى دراسة إشارة الفرق  $f(x) - (2-x)$

$$f(x) - (2-x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x}$$
 لدينا :

ومن أجل كل عدد حقيقي لدينا :  $e^{\frac{1}{2}x} > 0$

ومنه دراسة إشارة الفرق تؤول إلى دراسة إشارة العبارة  $2x-4$

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية	تحت $(C_f)$ ( $\Delta$ )	يقطع $(C_f)$ في النقطة $A(2;0)$	فوق $(C_f)$ ( $\Delta$ )

② دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  : الدالة  $f$  معرفة وقابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} - 1 = (2+x-2)e^{\frac{1}{2}x} - 1 = xe^{\frac{1}{2}x} - 1 = e^{\frac{1}{2}x}(x - e^{-\frac{1}{2}x}) = e^{\frac{1}{2}x}g(x)$$

بما أن  $e^{\frac{1}{2}x} > 0$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  وعليه :

جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

③ إثبات ان  $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$  لدينا مما سبق  $g(\alpha) = 0$  تكافياً  $\alpha - e^{-\frac{1}{2}\alpha} = 0$  ومنه  $e^{-\frac{1}{2}\alpha} = \alpha$  إذن  $e^{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{\alpha}$

$$f(\alpha) = (2\alpha - 4)\frac{1}{\alpha} + 2 - \alpha = \frac{2\alpha}{\alpha} - \frac{4}{\alpha} + 2 - \alpha = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$$

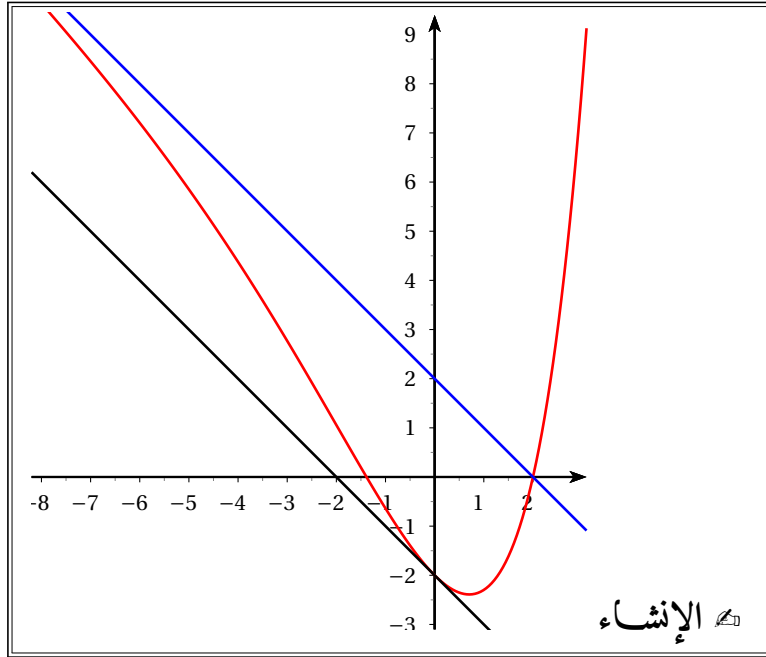
بالتعويض نجد :  
 $f(\alpha)$  حصر

لدينا  $0,7 < \alpha < 0,71$  ومنه  $3,29 < 4 - \alpha < 3,3$  و  $-5,61 < -\frac{4}{\alpha} < -5,71$  إذن :  $-2,42 < f(\alpha) < -2,31$

احداثي النقطة  $A$  نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الترتيب : لدينا  $f(0) = -2$  ومنه  $(C_f) \cap (y'y) = \{A(0; -2)\}$

$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x - 2$$

معادلة المماس عند  $A$  :



المناقشة البيانية:

$$(2x - 4)e^{\frac{1}{2}x} = m - 2$$

لدينا:  $2e^{\frac{1}{2}x} = \frac{m-2}{x-2}$  تكافياً

$$f(x) = m - x$$

أي  $(2x - 4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 = m$  وعليه

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم ذي المعادلة  $y = m - x$

من أجل  $m < -2$  المعادلة لا تقبل حلولاً

من أجل  $-2 < m < 2$  المعادلة تقبل حلن مختلفين في الإشارة

من أجل  $m = -2$  المعادلة تقبل حلاً وحيداً  $x = 0$

من أجل  $m > 2$  المعادلة تقبل حلاً وحيداً موجباً

• لتكن الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

(1) أدرس تغيرات الدالة  $g$

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $] -0.38, -0.37[$

(3) إستنتج إشارة  $g(x)$

• نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$  ، وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(وحدة الطول  $2cm$ )

(1) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = g(x)$

(2) أدرس تغيرات الدالة  $f$

(3) بين ان المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$

(4) أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$

(5) بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف

(6) بين أن :  $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

(7) أثبت المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم المقارب  $(\Delta)$  ( نأخذ  $\alpha = -0.375$  )

•  $(\Delta_m)$  مستقيم معادلته  $y = 2x + m$  حيث  $m$  عدد حقيقي

(1) عين  $m$  حتى يكون  $(\Delta_m)$  مماسا للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

(2) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة التالية :  $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$

### الحل

• الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e^x} - e^{-x} + 2 \right) = \boxed{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$$

لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g'(x) = (2-x)e^{-x}$  ، ومنه إشارة  $g'(x)$

من نفس إشارة  $(2-x)$  وجدول تغيراتها يعطى بالشكل :

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$e^{-2} + 2$	$2$

2. إثبات أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $] -0.38, -0.37[$

الدالة  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $]-\infty, 2[$  ومنه على المجال  $[-0.38, -0.37]$  .  
 وبما أن  $g(-0.38) \times g(-0.37) < 0$  فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]-0.38, -0.37[$  .

3. إشارة  $g(x)$  .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

1. لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} + 2$  ومنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = g(x)$

2. دراسة تغيرات الدالة  $f$

إشارة  $f'(x)$  هي من نفس إشارة  $g(x)$  ولدينا أيضا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$   
 جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$  ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$

4. لدراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$  ندرس إشارة الفرق  $f(x) - (2x + 1)$   
 لدينا  $f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$  ومنه فإن إشارة الفرق هي عكس إشارة  $x$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (2x + 1)$	+		-
الوضعية	$(C_f)$ فوق $(\Delta)$		$(C_f)$ تحت $(\Delta)$

5. إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f''(x) = g'(x)$  ومنه

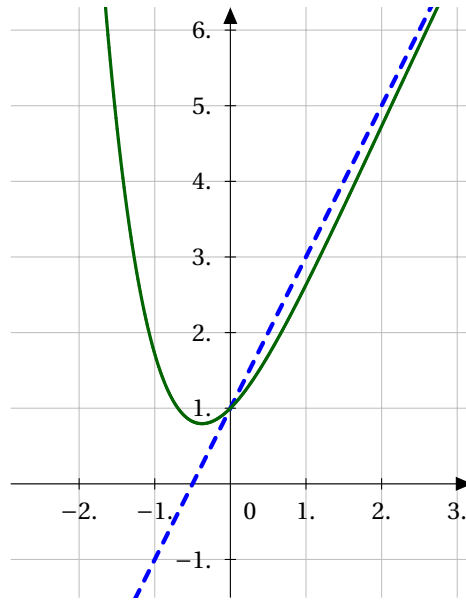
$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$

بما أن  $f''(x)$  تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة  $(2; 5 - \frac{2}{e^2})$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$

$$6. \text{ إثبات أن : } f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

$$g(\alpha) = 0 \text{ تكافئ } e^{-\alpha} = -\frac{2}{\alpha - 1} \text{ ومنه : } f(\alpha) = 2\alpha + 1 - e^{-\alpha} = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

7. رسم المنحنى  $(C_f)$



2.  $(\Delta_m)$  مستقيم معادلته  $y = 2x + m$  حيث  $m$  عدد حقيقي

1. تعيين  $m$  حتى يكون  $(\Delta_m)$  مماساً للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

المستقيم  $y = 2x + m$  مماساً للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة  $x_0$  منه يعني :  $f'(x_0) = 2$  أي أن  $g(x) = 2$  ومنه  $(x-1)e^{-x} = 0$  وبالتالي  $x_0 = 1$

لدينا :  $f(1) = 3 - e^{-1}$  ومنه معادلة المماس هي  $y = 2x + 1 - e^{-1}$  بالمطابقة نجد  $m = 1 - e^{-1}$

2. المناقشة البيانية :

$m + 2x = f(x)$  أي أن  $m + 2x = -xe^{-x} + 1 + 2x$  نجد للطرفين  $2x$  بإضافة  $m = -xe^{-x} + 1$  يعني  $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta_m)$ ، لدينا عندئذ :

☞ إذا كان  $m \in ]-\infty, 1 - e^{-1}[$  المعادلة لا تقبل حلولاً .

☞ إذا كان  $m = 1 - e^{-1}$  للمعادلة حل وحيد .

• إذا كان  $m \in ]1 - e^{-1}, 1[$  للمعادلة حلان .

• إذا كان  $m > 1$  للمعادلة حل وحيد .

## التمرين 04

- $g$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = e^{-x} + x - 1$
- (1) أحسب  $g'(x)$  ثم عين اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  .
  - (2) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $g(x) \geq 0$ ، استنتج أن:  $e^{-x} + x \geq 1$  .
  - نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x}$ ، وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .
  - (1) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$  .
  - (2) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  . فسر النتيجةين بيانياً .
  - (3) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x} + x)^2}$  .
  - (4) أدرس إشارة  $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .
  - (5) أكتب معادلة لمماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة  $O$  .
  - (6) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$ ، ثم استنتج إشارة  $x - f(x)$  .
  - (7) استنتج الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  .
  - (8) أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .
  - (9) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:  $\frac{xe^x}{xe^x + 1} - 1 = m$  .

## الحل

1. حساب  $g'(x)$  تعيين اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ :

من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :  $g'(x) = -e^{-x} + 1$

$$-e^{-x} + 1 \leq 0 \quad \text{يكافئ} \quad g'(x) \leq 0 \quad -e^{-x} + 1 \geq 0 \quad \text{يكافئ} \quad g'(x) \geq 0$$

$$e^{-x} \geq 1 \quad \text{يكافئ} \quad e^{-x} \leq 1$$

$$-x \geq 0 \quad \text{يكافئ} \quad 1 \leq e$$

$$x \leq 0 \quad \text{يكافئ} \quad x \geq 0$$

إذن إذا كان  $x \in ]-\infty; 0[$  فإن الدالة  $g$  متناقصة تماماً، وإذا كان  $x \in ]0; +\infty[$  فإن الدالة  $g$  متزايدة تماماً

2. تبيان أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $g(x) \geq 0$

من أجل  $x \in ]-\infty; 0[$  :  $g(x) \geq g(0)$  لأن  $g$  متناقصة على  $] -\infty; 0[$  و منه  $g(x) \geq 0 \dots (1)$

من أجل  $x \in ]0; +\infty[$  :  $x \in ]0; +\infty[$  لأن  $g(x) \geq g(0)$  متزايدة على  $]0; +\infty[$  و منه  $g(x) \geq 0$  (2)...

من (1) و (2) ينتج أن  $g(x) \geq 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$

استنتاج أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $e^{-x} + x \geq 1$

لدينا:  $g(x) \geq 0$  يكافئ  $e^{-x} + x - 1 \geq 0$  و منه  $e^{-x} + x \geq 1$

1. التحقق من أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  :  $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$  لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x} = \frac{(x) \times 1}{(x) \times (\frac{e^{-x}}{x} + 1)} = \frac{1}{\frac{e^{-x}}{x} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$$

2. حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = -\infty \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$$

$$\text{و بالتالي } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^- \text{ أي } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = 1 \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

$$\text{و بالتالي } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 1$$

التفسير البياني:

عند  $-\infty$  :  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل مستقيم مقاربا أفقيا  $(\Delta)$  معادلته:  $y = 0$  و  $(\mathcal{C}_f)$  تحت  $(\Delta)$

عند  $+\infty$  :  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل مستقيم مقاربا أفقيا معادلته:  $y = 1$ .

3.  $f$  تقبل الإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لدينا:  $f'(x) = \frac{1(e^{-x} + x) - (-e^{-x} + 1)(x)}{(e^{-x} + x)^2} = \frac{e^{-x} + xe^{-x}}{(e^{-x} + x)^2}$  إذن  $f'(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x} + x)^2}$

4. دراسة إشارة  $f'(x)$  ثم تشكيل جدول تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$

$$\text{لدينا } f'(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + x)^2}(x+1)$$

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x+1$  لأن  $e^{-x} > 0$  و المقام موجب تماما، اذن :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$		$-$	$+$

و منه جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$		$-$	$+$
$f$	$0$	$\frac{1}{1-e}$	$1$

5. معادلة المماس للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة  $O$ :

لدينا  $f(0) = 0$  و  $f'(0) = 1$ ، إذن معادلة المماس هي  $y = f'(0)(x-0) + f(0)$  أي  $y = x$

6. التحقق من أن  $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$

$$x - f(x) = x - \frac{x}{e^{-x} + x} = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x} = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x - 1 + 1} = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

إشارة  $x - f(x)$ :

لدينا  $g(x) \geq 0$  و منه  $g(x) + 1 \geq 1$  و منه  $g(x) + 1 > 0$ ، إذن إشارة  $x - f(x)$  من إشارة  $x$

إذا كان  $x < 0$  فإن  $x - f(x) < 0$ ،

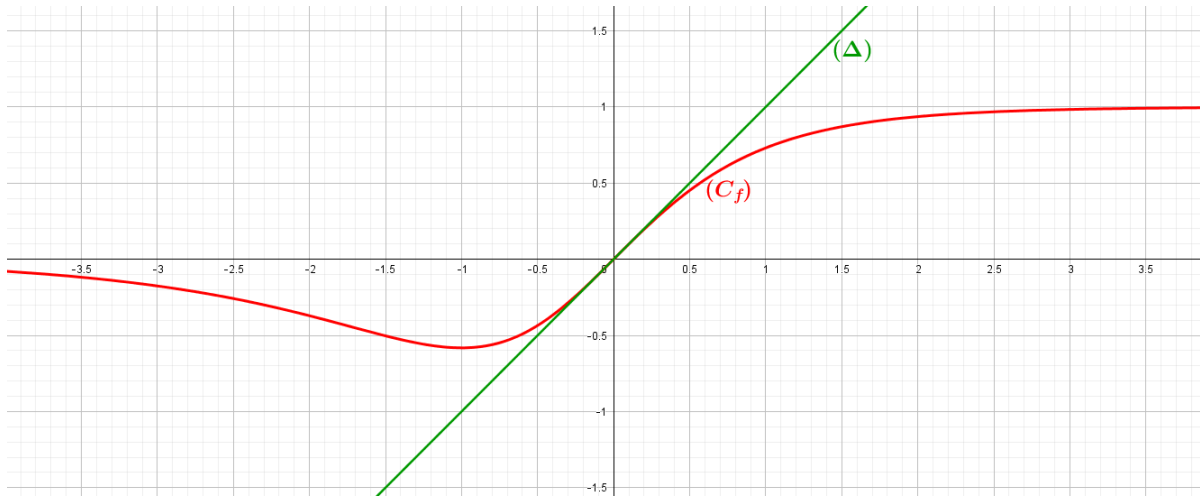
وإذا كان  $x > 0$  فإن  $x - f(x) > 0$

وإذا كان  $x = 0$  فإن  $x - f(x) = 0$ .

7. الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x$ :

$x > 0$	$x = 0$	$x < 0$
$(C_f)$ تحت $(\Delta)$	$(\Delta)$ و $(C_f)$ يتقاطعان في النقطة $O$	$(C_f)$ فوق $(\Delta)$

8. رسم  $(C_f)$  و  $(\Delta)$



9. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$

المناقشة: لدينا  $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$  يكافئ  $\frac{e^x}{e^x} \frac{x}{x+e^{-x}} = m+1$  يكافئ  $\frac{x}{x+e^{-x}} = m+1$  أي  $f(x) = m+1$ ، حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم ذي المعادلة  $y = m+1$ ، نميز الحالات التالية:

إذا كان  $m+1 \geq 1$  أي  $m \geq 0$ ، المعادلة ليس لديها حلول

إذا كان  $0 < m+1 < 1$  أي  $-1 < m < 0$ ، للمعادلة حل وحيد موجب

إذا كان  $m+1 = 0$  أي  $m = -1$ ، للمعادلة حل وحيد معدوم  $x_0 = 0$

إذا كان  $m+1 < 0$  أي  $\frac{1}{1-e} < m+1 < -1$  أي  $\frac{1}{1-e} - 1 < m < -1$ ، للمعادلة حلين سالبين متمايزين

إذا كان  $m+1 = \frac{1}{1-e}$  أي  $m = \frac{1}{1-e} - 1$  ، للمعادلة حل واحد سالب هو  $x_1 = -1$   
 إذا كان  $m+1 < \frac{1}{1-e}$  أي  $m < \frac{1}{1-e} - 1$  ، المعادلة ليس لديها حلول .

## التمرين 05

في الشكل المقابل  $(C_g)$  هو المنحنى الممثل للدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$g(x) = (ax + b)e^x + c$$

(1) بقراءة بيانية :

(أ) عين  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  ثم إستنتج قيمة  $c$ .

(ب) عين نهاية الدالة  $g$  عند  $+\infty$ .

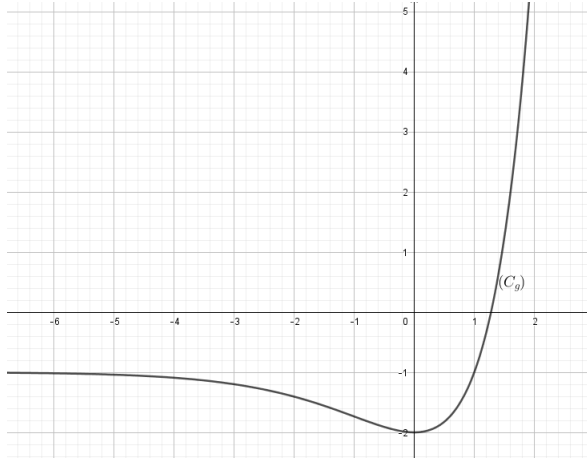
(ج) عين كلا من  $g(0)$  و  $g'(0)$  ثم إستنتج قيمتي  $a$  و  $b$ .

(2) نفرض فيما يلي:  $g(x) = (x-1)e^x - 1$ .

(أ) شكل جدول تغيرات الدالة  $g$

(ب) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.2 < \alpha < 1.3$

(ج) إستنتج إشارة  $g(x)$ .



هي الدالة المعرفة على المجال  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$  ، وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم حدد المستقيم المقارب بجوار  $+\infty$ .

(2) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  ، ثم أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

(3) أدرس إتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها

(4) بين  $f(\alpha) = \alpha - 1$  ثم إستنتج حصرا لـ  $f(\alpha)$ .

(5) أنشئ المنحنى  $(C_f)$ .

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة  $f(x) = f(m)$ .

(7) نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $h(x) = f(|x|)$

(أ) بين أن  $h$  دالة زوجية .

(ب) أرسم المنحنى البياني للدالة  $h$  إعتمادا على  $(C_f)$  في نفس المعلم السابق .

## الحل

(1) بقراءة بيانية :

(أ) لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$  ، ونعلم أن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(ax + b)e^x + c] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (axe^x + be^x + c) = c$

إذن نستنتج أن:  $c = -1$ .

(ب) لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

(ج) لدينا :  $g(0) = -2$  و  $g'(0) = 0$

لدينا :  $g(0) = -2$  أي  $(a \times 0 + b)e^0 - 1 = -2$  أي  $b - 1 = -2$  و منه :  $b = -1$

نحسب  $g'(x) = a \times e^x + e^x(ax + b) = e^x(a + ax + b)$  :

لدينا :  $g'(0) = 0$  أي  $e^0(a + a \times 0 - 1) = 0$  أي  $a - 1 = 0$  و منه :  $a = 1$

إذن :  $g(x) = (x-1)e^x - 1$

(2) أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		$0$	
$g(x)$	$-1$	$-2$	$+\infty$

(ب) الدالة  $g$  مستمرة ورتبية على المجال  $[1,2;1,3]$  و بما أن :  $g(1.2) = -$  و  $g(1.3) = +$  أي  $g(1.2) \times g(1.3) < 0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  محصور بين : 1.2 و 1.3

(ج) إشارة  $g(x)$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$		$0$	

(II) لدينا :  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$

(1) حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x + 1} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left( \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0$$

بجوار  $+\infty$  المنحني  $(C_f)$  يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x}{e^x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^x}{e^x + 1} = 0$$

إذن : المستقيم  $(\Delta)$  مقارب مائل للمنحني  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$

الوضعية النسبية بين المنحني  $(C_f)$  و  $(\Delta)$

ندرس إشارة الفرق :  $f(x) - y$

أي ندرس إشارة  $\frac{-xe^x}{e^x + 1}$  إذن إشارة الفرق من إشارة  $(-x)$

(3) دراسة إتجاه تغير الدالة  $f$  :

$$\bullet f'(x) = \frac{(e^x + 1) - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(-x+1)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{-[(x-1)e^x - 1]}{(e^x + 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $-g(x)$  لأن :  $(e^x + 1)^2 > 0$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$0$

(4) إثبات :  $f(\alpha) = \alpha - 1$

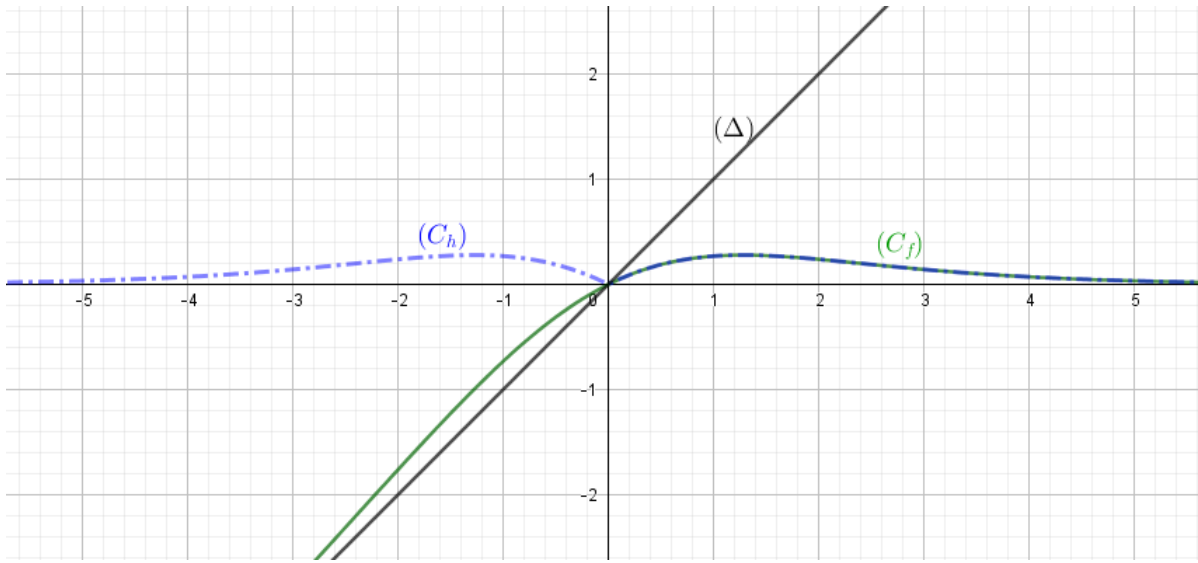
نعلم أن :  $g(\alpha) = 0$  أي :  $(\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$  أي :  $(\alpha - 1)e^\alpha = 1$  , ومنه :  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$

لنحسب الآن  $f(\alpha)$  :  $f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} = \frac{\alpha}{\frac{1 + \alpha - 1}{\alpha - 1}} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} = \alpha \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \alpha - 1$

وهو المطلوب .

حصر ل  $f(\alpha)$  : لدينا :  $1.2 < \alpha < 1.3$  أي :  $0.2 < \alpha - 1 < 0.3$  و منه :  $0.2 < f(\alpha) < 0.3$

(5) الإنشاء :



(6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة :  $f(x) = f(m)$  , عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم الموازي

لحامل محور الفواصل والذي معادلته :  $y = f(m)$

إذا كان :  $m \in ]-\infty; 0[$  فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

إذا كان :  $m \in ]0; \alpha[ \cup ]\alpha; +\infty[$  فإن : المعادلة تقبل حلان متميزان .

إذا كان :  $m = \alpha$  فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

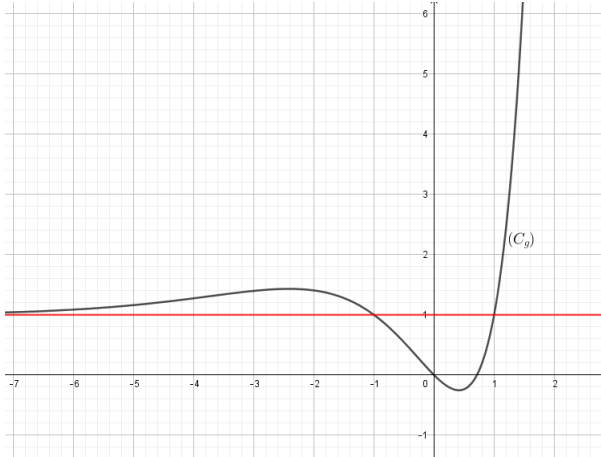
(7) لدينا الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كإيلي :  $h(x) = f(|x|)$

أ) تبيان أن الدالة  $h$  زوجية :  $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$  و بالتالي الدالة  $h$  زوجية .

إنشاء المنحنى  $(C_h)$  :

$(C_h)$  ينطبق على  $(C_f)$  في المجال  $[0; +\infty[$   
 $(C_h)$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة إلى محور الترتيب في المجال  $] -\infty; 0]$ .

## التمرين 06



• لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = (x^2 - 1)e^x + 1$   
 • تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .  
 يعطى جدول القيم التالي :

8.0	75.0	7.0	65.0	6.0	x
2.0	07.0	-03.0	-11.0	-17.0	g(x)

- (1) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في المجموعة  $\mathbb{R}$  حلين أحدهما معدوم و الآخر  $\alpha$  حيث :  $0.7 < \alpha < 0.75$  .
- (2) إستنتج إشارة  $g(x)$  عندما يتغير  $x$  في  $\mathbb{R}$  .
- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x + (x - 1)^2 e^x$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .
- (1) أ) أحسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$  .
- (ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $f'(x) = g(x)$  ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها .
- (2) تحقق من أن :  $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$  ثم عين حصر ل  $f(\alpha)$  .
- (3) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة  $A(1, 1)$  .
- (ب) بين أن المماس  $(T)$  هو مستقيم مقارب مائل ل  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  ثم أدرس الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و المماس  $(T)$  .
- (ج) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T')$  يوازي  $(T)$  في نقطة  $B$  يطلب تعيين فاصلتها ثم أكتب معادلة للمماس  $(T')$  .
- (4) أرسم كلا من  $(T)$  ,  $(T')$  و  $(C_f)$  .
- (5) عين قيم الوسيط الحقيقي  $m$  حتى تقبل المعادلة  $(E) : (x - 1)^2 e^x - m - 1 = 0$  ثلاثة حلول .

## الحل

- (1) (I) تبيان أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر  $\alpha$  حيث :  $0.7 < \alpha < 0.75$  .  
 لدينا :  $g(0) = (0^2 - 1)e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$  و منه 0 حل للمعادلة  $g(x) = 0$  .  
 ولدينا :  $g$  دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال  $[0.7; 0.75]$  و  $g(0.70) \times g(0.75) = -0.03 \times 0.07 = -0.0021 < 0$  و  
 و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  حيث :  $0.7 < \alpha < 0.75$  .  
 و بالتالي المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر  $\alpha$  حيث :  $0.7 < \alpha < 0.75$  .

(2) إستنتاج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+

(II) لدينا :  $f(x) = x + (x-1)^2 e^x$  معرفة على  $D_f = \mathbb{R}$

(أ) حساب نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + (x-1)^2 e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^2 e^x - 2x e^x + e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + (x-1)^2 e^x] = +\infty$$

(ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = g(x)$

من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا :

$$f'(x) = 1 + 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = 1 + [2x - 2 + (x-1)^2] e^x = 1 + (2x - 2 + x^2 - 2x + 1) e^x = 1 + (x-1)^2 e^x = g(x)$$

أي :  $f'(x) = g(x)$

إستنتاج إتجاه تغير الدالة  $f$  :

إشارة المشتقة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	+	0	-	+

الدالة  $f$  متزايدة تماما على كل من المجالين :  $]-\infty; 0[$  و  $] \alpha; +\infty[$  و  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]0; \alpha[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$f(\alpha)$	$+\infty$

(2) التحقق من أن :  $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$

لدينا :  $f(\alpha) = \alpha + (\alpha - 1)^2 e^\alpha$

و لدينا :  $g(\alpha) = 0$  و منه :  $1 + (\alpha^2 - 1)e^\alpha = 0$  وبالتالي :  $e^\alpha = -\frac{1}{\alpha^2 - 1}$

إذن :  $f(\alpha) = \alpha + (\alpha - 1)^2 \times \left(-\frac{1}{\alpha^2 - 1}\right)$  أي :  $f(\alpha) = \alpha - \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^3 - \alpha - \alpha^2 + 2\alpha - 1}{\alpha^2 - 1}$

وبالتالي :  $f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2(\alpha - 1) + (\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$

تعيين حصر لـ  $f(\alpha)$  :

لدينا :  $0.70 < \alpha < 0.75$  و منه :  $(0.70)^2 + 1 < \alpha^2 + 1 < (0.75)^2 + 1$  و  $0.70 + 1 < \alpha + 1 < 0.75 + 1$  .  
 إذن :  $\frac{(0.70)^2 + 1}{0.70 + 1} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1} < \frac{(0.75)^2 + 1}{0.75 + 1}$  وبالتالي :  $0.85 < f(\alpha) < 0.92$  .  
 (3 أ) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة  $A(1; 1)$  :

$$\bullet (T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) = g(1)(x-1) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

(ب) تبيان أن المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + (x-1)^2 e^x - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x - 2x e^x + e^x) = 0$$

و منه المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  .

دراسة الوضعية النسبية بين المنحنى  $(C_f)$  و المماس (T)

$$\bullet \text{ ندرس إشارة الفرق } f(x) - y : f(x) - y = x + (x-1)^2 e^x - x = (x-1)^2 e^x$$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	+
الوضعية	(T) فوق $(C_f)$	(T) في النقطة $A(1; 1)$ يخترق $(C_f)$	(T) فوق $(C_f)$

تبيان أن المنحنى  $(C_f)$  يقبلا مماسا  $(T')$  يوازي (T) في نقطة B :

لدينا :  $(T) \parallel (T')$  يعني معامل توجيه المماس  $(T')$  يساوي 1 أي :  $f'(x_0) = 1$

و منه :  $1 + (x_0^2 - 1)e^{x_0} = 1$  وبالتالي :  $(x_0^2 - 1)e^{x_0} = 0$  و منه :  $(x_0^2 - 1) = 0$  لأن :  $e^{x_0} \neq 0$  و عليه :  $x_0 = 1$  أو  $x_0 = -1$  .

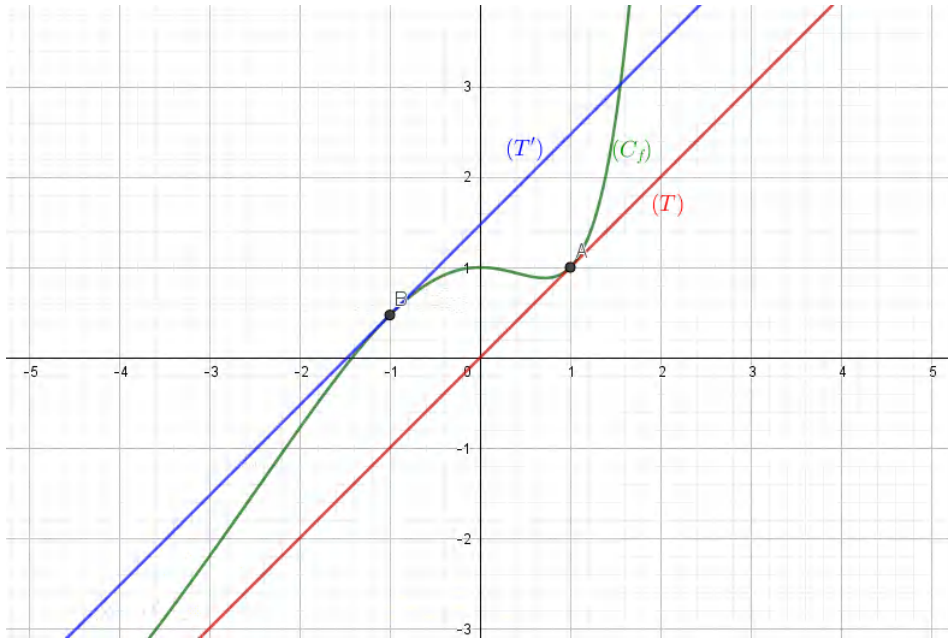
إذن  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T')$  يوازي (T) في النقطة B ذات الفاصلة -1 .

كتابة معادلة المماس  $(T')$  :

$$\text{لدينا : } B(-1; -1 + 4e^{-1})$$

$$\bullet (T') : y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = 1 \times (x+1) - 1 + 4e^{-1} = x + 4e^{-1}$$

الرسم :



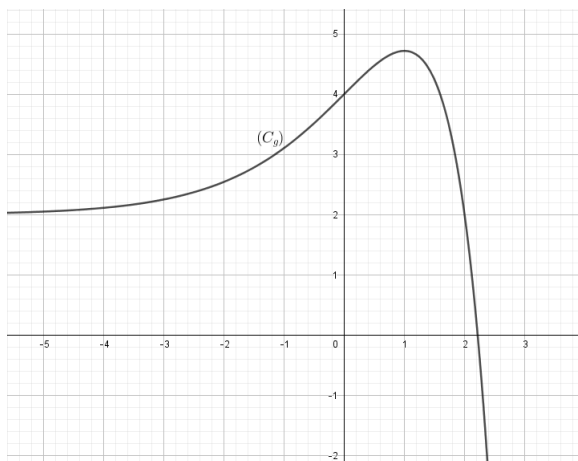
تعيين قيم الوسيط الحقيقي  $m$  حتى تقبل المعادلة (E) ثلاثة حلول:

لدينا :  $(x-1)^2 e^x = m+1$  تكافئ :  $x + (x-1)^2 e^x = x + m + 1$  تكافئ :  $f(x) = x + m + 1$ .

حلول المعادلة (E) بيانها هي فواصل النقاط المشتركة بين المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم ذو المعادلة  $y = x + m + 1$  الموازي لكل من المماسين  $(T)$  و  $(T')$ .

المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول يعني :  $0 < m+1 < 4e^{-1}$  وبالتالي :  $-1 < m < -1 + 4e^{-1}$ .

## التمرين 07



الم دالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 2 + (2-x)e^x$ .

$(C_g)$  التمثيل البياني للدالة  $g$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (الشكل المقابل)

(1) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  بحيث  $2.21 < \alpha < 2.22$ .

(2) بقراءة بيانية عين إشارة  $g(x)$  ، ثم استنتج إشارة  $g(-x)$  على  $\mathbb{R}$ .

الم نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب :  $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$ .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) بين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  ، فسر النتيجة بيانيا .

- (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \frac{x \cdot g(-x)}{(1 + e^{-x})^2}$
- (ب) استنتج إشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}$  ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة  $f$
- (3) بين أن :  $f(-\alpha) = \alpha(\alpha - 2)$  ، ثم عيّن حصرا للعدد  $f(-\alpha)$
- (4) المنحنى الممثل للدالة  $x \rightarrow x^2$  في المعلم السابق .
- (أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2)$  ثم فسّر النتيجة بيانيا .
- (ب) أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمنحنى  $(\delta)$
- (5) أثني كلاً من المنحنى  $(\delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  ( تعطى  $f(-\alpha) = 0.48$  )

## الحل

- (I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 2 + (2 - x)e^x$
- (1) تبيان أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  بحيث  $2,21 < \alpha < 2,22$
- الدالة  $g$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $]1;3[$  و  $]2,21;2,22[$  وأي  $g(2,21) \times g(2,22) < 0$  أي  $\begin{cases} g(2,21) \approx 0,08 \\ g(2,22) \approx -0,02 \end{cases}$
- و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في المجال  $]1;3[$  حلا وحيدا  $\alpha$  ، حيث  $2,21 < \alpha < 2,22$
- بقراءة بيانية : إشارة  $g(x)$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

إشارة  $g(-x)$  :

$x$	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	+	0	-

- (II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب :  $f(x) = \frac{x^2}{1 + e^{-x}}$
- ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (أ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- (ب) تبيان أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^x}{e^x + 1} = 0$
- التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$
- (أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \frac{x \cdot g(-x)}{(1 + e^{-x})^2}$
- الدالة  $f$  قابلة للأشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f'(x) = \frac{2x(1+e^{-x}) + x^2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{x((2+(x+2)e^{-x}))}{(1+e^{-x})^2} = \frac{xg(-x)}{(1+e^{-x})^2}$$

(ب) إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(-x)$ :

$x$	$-\infty$	$-\alpha$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-\alpha$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	$f(-\alpha)$	0	$+\infty$

$$\bullet f(-\alpha) = \frac{\alpha^2}{1+e^\alpha} = \frac{\alpha^2}{1-\frac{2}{2-\alpha}} = \frac{\alpha^2}{\frac{-\alpha}{2-\alpha}} = -\alpha(2-\alpha) = \alpha(\alpha-2) \quad (3) \text{ لدينا}$$

تعيين حصر للعدد  $f(-\alpha)$ :

لدينا:  $2,21 < \alpha < 2,22$  و منه  $0,21 < \alpha - 2 < 0,22$  إذن  $0,46 < \alpha(\alpha - 2) < 0,48$  و بالتالي  $0,46 < f(-\alpha) < 0,49$ .

(4) المنحنى الممثل للدالة  $x \mapsto x^2$  في المعلم السابق.

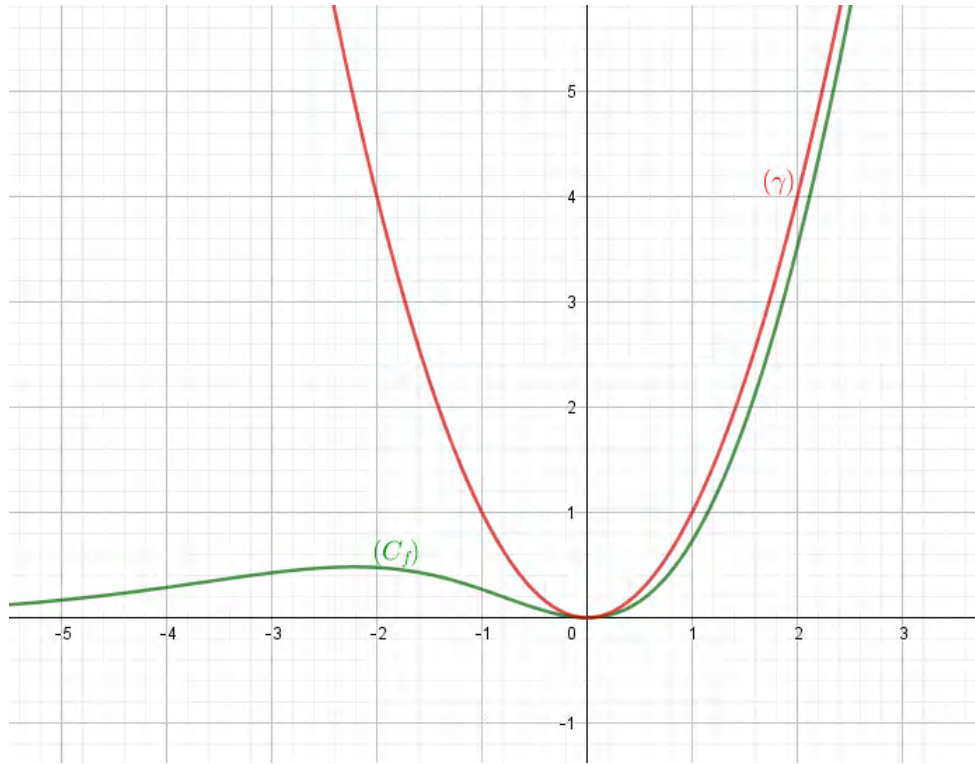
$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{1+e^{-x}} - x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) = 0 \quad (\text{أ})$$

التفسير البياني: المنحنى  $(\gamma)$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

(ب) دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمنحنى  $(\gamma)$ :

لدينا:  $f(x) - x^2 = \frac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $\frac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}} \leq 0$  و بالتالي المنحنى  $(C_f)$  يقع أسفل المنحنى  $(\gamma)$ .

(5) الرسم:



## 7 التمارين الواردة في البكالوريا من 2008 إلى 2020

التمارين الواردة في البكالوريا من 2008 إلى 2020

1.7 شعبة العلوم التجريبية

1.7

### التمرين 01

- (I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يأتي:  $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$  حيث  $a$  و  $b$  عددان حقيقيان. المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  وحدة الطول  $1cm$ .
- عين قيمتي  $a$  و  $b$  بحيث تكون النقطة  $A(-1; 1)$  تنتمي إلى  $(C_f)$  ومعامل توجيه المماس عند  $A$  يساوي  $(-e)$ .
- (II) نعتبر الدالة العددية  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$  و  $(C_g)$  إلى تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$  وفسر النتيجة بيانيا (نذكر أن  $\lim_{u \rightarrow +\infty} ue^u = 0$ ).

ب) أدرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بين أن المنحنى  $(C_g)$  يقبل نقطة انعطاف  $I$  يطلب تعيين احداثياتها.

د أكتب معادلة المماس للمنحنى  $(C_g)$  عند النقطة  $I$ .

ه أرسم  $(C_g)$ .

III لتكن  $k$  الدالة المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يأتي:  $k(x) = g(x^2)$  باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة  $k$  ثم شكل جدول تغيراتها.

### التمرين 02

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ:  $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$   
نرمز بـ  $(C_f)$  لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1 أ أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

ب أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  وفسر هندسيا النتيجة.

2 أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أ بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين مائلين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  معادلتهما على الترتيب:  $y = xy = x + 1$ .

ب أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$ .

4 بين أن النقطة  $\omega(0; \frac{1}{2})$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$ .

5 أ بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $\ln 2 < \alpha < 1$  و  $-1,4 < \beta < -1,3$ .

ب هل توجد مماسات لـ  $(C_f)$  توازي المستقيم  $(\Delta)$ ؟

ج أرسم  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ثم المنحنى  $(C_f)$ .

د ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:  $(m-1)e^{-x} = m$ .

### التمرين 03

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = e^x - ex - 1$   
 $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1 أ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

ب أحسب  $f'(x)$  ثم ادرس اشارتها.

ج شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

2 أ بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة:  $y = -ex - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ .

ب أكتب معادلة للمستقيم  $(T)$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 0.

ج بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]1,75; 1,76[$  حلا وحيدا  $\alpha$ .

د أرسم المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(T)$  ثم  $(C_f)$  في المجال  $]-\infty; 2[$ .

#### التمرين 04

(I) لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $g(x) = 1 - xe^x$ .

1 احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

2 أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أ بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha \in [-1; +\infty[$ .

ب تحقق أن:  $0,5 < \alpha < 0,6$  إستنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(II)  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-\infty; 2[$  كما يلي:  $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني

1 احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

2 لتكن  $f'$  مشتقة الدالة  $f$ . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 2[$  فإن:  $f'(x) = -g(x)$ .  
إستنتج إشارة  $f'(x)$  على  $]-\infty; 2[$  ثم شكل جدول تغيراتها.

3 بين أن  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصر العدد  $f(\alpha)$ . (تدور النتائج إلى  $10^{-2}$ ).

4 أ بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x - 1$  هو مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ .

ب أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

5 أ بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $x_1$  و  $x_2$  حيث:  $-1,6 < x_1 < -1,5$  و  $1,5 < x_2 < 1,6$ .

ب أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

x	f(x)
20.0	037.0
21.0	016.0
22.0	-005.0
23.0	-026.0
24.0	-048.0
25.0	-070.0

1 (I) الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ:  $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$  و  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1 احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  واستنتج المستقيمين المقاربين لـ  $(C)$ .

2 احسب  $f'(x)$ ، بين أن  $f$  متناقصة تماما على  $]-\infty; 1[$  ثم شكل جدول تغيراتها.

3 بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  باستعمال الجدول أعلاه ثم جد حصر العدد  $f(\alpha)$ .

4 ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى  $(C)$ ، ثم أرسم المنحنى  $(C')$  الممثل للدالة  $|f|$ .

5 عين بيانيا مجموعة قيم  $m$  التي من أجلها يكون للمعادلة  $|f(x)| = m$  حلان مختلفان في الإشارة.

(II) الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ:  $g(x) = f(2x-1)$

1 ادرس تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 أ تحقق من أن:  $g(\frac{\alpha+1}{2}) = 0$  ثم بين أن  $g'(\frac{\alpha+1}{2}) = 2f'(\alpha)$ .

ب استنتج معادلة  $(T)$  المماس لمنحنى الدالة  $g$  في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\alpha+1}{2}$ .

ج تحقق من أن:  $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$  معادلة للمستقيم  $(T)$ .

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$

1 أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

2 بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن:  $0,36 < \alpha < 0,37$ .

3 استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(II) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني

1 أ بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن:  $f'(x) = e^{2x+2} \cdot g(-x)$ .

ب استنتج أن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $]-\infty; -\alpha[$  و متزايدة تماما على  $]-\alpha; +\infty[$ .

2 أحسب نهاية  $f$  عند  $+\infty$  وعند  $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

3 احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

4 أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته :  $y = -x + 1$ .

5 أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  على المجال  $]-\infty; \frac{1}{2}]$ ، نأخذ :  $f(-\alpha) \approx 0,1$ .

## التمرين 07

(I) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 2e^x - x^2 - x$ .

1 أ حساب  $g'(x)$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ودراسة اتجاه تغير الدالة  $g'$

ب بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $g'(x) > 0$ .

ج احسب نهايتي الدالة  $g$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  وشكل جدول تغيراتها

2 بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث :  $-1,38 < \alpha < -1,3$

3 استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$ .

(II)  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$

1 أ احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) = \frac{x e^x \cdot g(x)}{(e^x - x)^2}$

ج ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ ، وشكل جدول تغيراتها

2 أ بين أن:  $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$  ثم استنتج حصراً للعدد  $f(\alpha)$

ب احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$  وفسر النتيجة بيانياً.

ج ارسم المنحنى  $(C_f)$ .

## التمرين 08

(I)  $g$  الدالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$

1 أ احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  وشكل جدول تغيراتها.

- 2 أ بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث :  $-1,52 < \alpha < -1,51$
- ب استنتج إشارة  $g(x)$  .

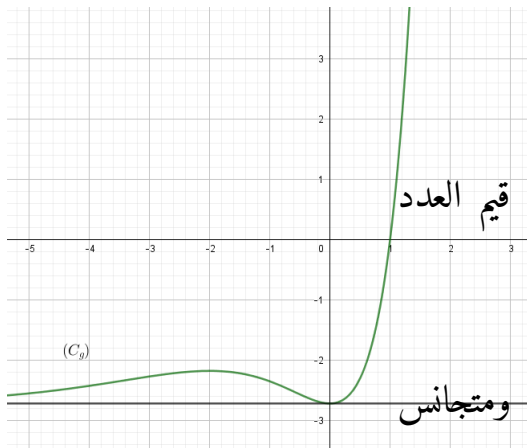
(II)  $f$  الدالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$  وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  وحدة الطول  $1cm$

- 1 أ احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = -g(x)$
- ج شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  (نأخذ  $f(\alpha) \approx 0,38$ )
- د عين دون حساب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$  وفسر هندسيا للنتيجة.

- 2 أ بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة :  $y = -x$  مقارب مائلا للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$
- ب ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  .
- ج بين أن  $(C_f)$  يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثيتهما.
- د ارسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  على المجال  $[-2; +\infty[$
- ه ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $(m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$  على المجال  $[-2; +\infty[$  .

## التمرين 09

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = x^2 e^x - e$   $(C_g)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  كما هو في الشكل المقابل.



1 أ احسب  $g(1)$

2 بقراءة بيانية عين إشارة  $g(x)$  ثم استنتج إشارة  $g(-x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كإيلي :  $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

- 1 احسب النهايات الآتية :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 بين أن المنحنى  $(\gamma)$  ذو المعادلة  $y = e^{-x} - 2$  و  $(C_f)$  متقاربان عند  $-\infty$  ثم أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة  $(\gamma)$

3 بين أنه من أجل كل حقيقي  $x$  غير معدوم:  $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$

4 استنتج ان الدالة  $f$  متزايدة تماما على كل من المجالين  $[-1; 0]$  و  $]0; +\infty[$  ومتناقصة على المجال  $]-\infty; -1]$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

5 بين كيف يمكن انشاء المنحنى  $(\gamma)$  انطلاقا من منحنى الدالة  $x \rightarrow e^x$  ثم ارسم كلا من المنحنيين  $(\gamma)$  و  $(C_f)$  في نفس المعلم السابق.

### التمرين 10

(I) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  و أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة ، ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 أ بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$

ب أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(II) نعتبر الدالة العددية  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $h(x) = 1 - x e^{1-x}$

1 بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $h(x) \geq 0$  ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمماس  $(T)$ .

2 بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $-0,7 < \alpha < -0,6$

3 إنشئ المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$  على المجال  $]-1; +\infty[$

### التمرين 11

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

1 أ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

ب ادراس اتجاه تغير الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث:  $-0,38 < \alpha < -0,36$

د استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(II) لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$  وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1 أ أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1))$  ثم تفسير النتيجة بيانياً.

ج ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  حيث :  $y = 2x + 1$ .

2 بين أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  يكون :  $f'(x) = g(x)$  واستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها

3 اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4 ارسم  $(\Delta)$  ،  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

5 عين عدد وإشارة حلول المعادلة  $x = (1 - m)e^x$ .

## التمرين 12

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  . تؤخذ وحدة الطول  $2cm$   $(C_f)$  و  $(C_g)$  التمثيلان البيانيان للدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = e^x - ex$  و  $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$

1 أ ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$ .

ب استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  الحقيقية .

2 ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$ .

3 أحسب كلاً من  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

4 ادرس الوضع النسبي للمنحنين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  على  $\mathbb{R}$ .

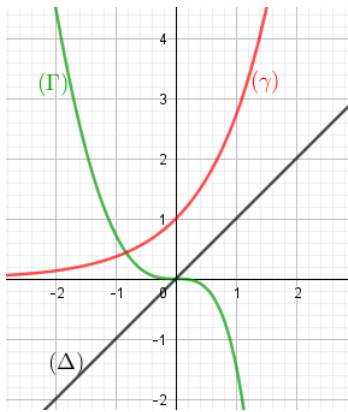
5 أرسم على المجال  $[0; 2]$  المنحنين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  في نفس المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  . (يعطى  $e^2 - 2e \approx 2$ ).

6  $h$  الدالة المعرفة على المجال  $[-2; 2]$  كما يلي :  $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$  وليكن  $(\Gamma)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ بين أن  $h$  دالة زوجية .

ب من أجل  $x \in [0; 2]$  أحسب  $h(x) + f(x)$  ثم استنتج كيفية رسم  $(\Gamma)$  إنطلاقاً من  $(C_f)$  ثم أرسمه .

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



في الشكل المرفق المنحني الممثل للدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 2x^2 + 2x - 2xe^x$

المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  و المنحني الممثل للدالة  $x \mapsto e^x$  :  
بقراءة بيانية :

1 برر أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^x - x > 0$ .

2 حدد تبعا لقيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$  علما أن :  $g(0) = 0$ .

(II) الدالة العددية  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x}$  ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1 بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  و أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ثم فسر نتيجتي النهايتين هندسيا .

2 أ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون :  $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$

ب استنتج إتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

3 أ أكتب معادلة لـ  $(T)$  المماس للمنحني  $(C_f)$  في النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $0$ .

ب بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون :  $f(x) - (2x + 1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$

ج استنتج الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(T)$  على  $\mathbb{R}$ , ماذا تمثل النقطة  $A$  بالنسبة إلى  $(C_f)$ ?

4 بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $] -\infty; 1]$ , ثم تحقق أن :  $-0.6 < \alpha < -0.5$

5 أنشئ المماس  $(T)$  و المستقيمين المقارنين ثم المنحني  $(C_f)$ .

2,7 شعبة التقني الرياضي

مستوى التوجيه

التمرين 01

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب  $f(-x) + f(x)$  و ماذا تستنتج؟

2 أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  ثم استنتج جدول تغيراتها على  $\mathbb{R}$ .

- 3 بين أن المستقيم  $y = x$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$ .
- 4 احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)]$  ثم فسر النتيجة هندسيا.
- 5 بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $-1,7 < \alpha < -1,6$ .
- 6 بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف  $\omega$  يطلب تعيينها
- 7 بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقع في شريط حداه المستقيمان المقاربان ثم ارسم المنحنى  $(C_f)$ .

## التمرين 02

- $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كمايلي:  $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$
- و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- 1 عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث:  $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$  من اجل كل  $x \in \mathbb{R}$ .
  - 2 احسب نهايات الدالة  $f$  عند اطراف مجالات تعريفها.
  - 3 بين أن  $f$  متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.
  - 4  $(D)$  و  $(D')$  المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب  $y = x$  و  $y = x + \frac{4}{3}$
  - أ بين أن  $(D)$  و  $(D')$  مقاربان ل  $(C_f)$  ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.
  - ب بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $x_0$  و  $x_1$  حيث:  $0,9 < x_0 < 0,91$  و  $-1,66 < x_1 < -1,65$ .
  - ج احسب من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم  $f(-x) + f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا.
  - د ارسم  $(D)$  و  $(D')$  و  $(C_f)$ .
  - 5  $m$  عدد حقيقي،  $(D_m)$  المستقيم المعرف بالمعادلة  $y = x + m$
  - ناقش بيانيا حسب قيم  $m$  عدد حلول المعادلة:  $f(x) = x + m$
  - 6  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = [f(x)]^2$
  - ادرس تغيرات الدالة  $g$  دون حساب  $g(x)$  بدلالة  $x$ .

$f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1 ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
- 2 عيّن المستقيمات المقاربة ل  $(C_f)$ .
- 3 بين أن للمنحنى  $(C_f)$  نقطة انعطاف  $\omega$  يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة المماس ل  $(C_f)$  عندها.
- 4 لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $g(x) = f(x) - x$ .
- أ ادرس تغيرات الدالة  $g$ .
- ب بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا و حيدا  $\alpha$  حيث  $2.7 < \alpha < 2.8$ .
- ج أحسب  $f(-x) + f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا.
- 5 أ حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$ .
- ب ارسم المماس والمستقيم الذي معادلته:  $y = x$  و  $(C_f)$ .

- 1 (I)  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$ .
- 1 ادرس تغيرات الدالة  $g$  ، شكل جدول تغيراتها.
- 2 بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث:  $1,59 < \alpha < 1,60$ .
- 3 استنتج إشارة  $g(x)$ .
- 2 (II)  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ [وحدة الطول: 2cm].
- 1 بين أن  $(C_f)$  يقبل عند  $-\infty$  و  $+\infty$  مستقيمين مقاربين معادلاتهما على الترتيب  $y = -1$  و  $y = 0$ .
- 2 (أ) برهن أنه من أجل  $x \in \mathbb{R}$ :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$ .
- ب استنتج إشارة  $f'(x)$  ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .
- ج احسب  $f(1)$  ، ثم استنتج إشارة  $f(x)$ .

3 أ) بين أن :  $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$

ب) استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$  (تدور النتائج إلى  $10^{-2}$ )

ج) أرسم  $(C_f)$ .

4 ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد وإشارة حلول المعادلة :  $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$

5  $h$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $h(x) = [f(x)^2]$

أ) أحسب  $h'(x)$  بدلالة  $f'(x)$  و  $f(x)$  ثم أستنتج إشارة  $h'(x)$ .

ب) شكل جدول تغيرات الدالة  $h$ .

### التمرين 05

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = (x-1)e^x$

$(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1- عين نهاية  $f$  عند كل من  $-\infty$  و  $+\infty$ .

2- أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ) بين أن المعادلة  $f(x) = 1$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على  $\mathbb{R}$ . ثم تحقق أن:  $1.27 < \alpha < 1.28$ .

ب) أكتب معادلة  $l$  مماس  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدد وضعية  $(C_f)$  بالنسبة ل  $l$  ( $T$ )

ج) أرسم  $(T)$  و  $(C_f)$ .

4) عين قيم العدد الحقيقي  $m$  التي من أجلها تقبل المعادلة :  $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$  حلا واحدا في  $\mathbb{R}$

5)  $h$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $h(x) = (|x|+1)e^{-|x|}$  و  $(C_h)$  تمثيلها البياني.

أ) بين أن الدالة  $h$  زوجية.

ب) أرسم  $(C_h)$  مستعينا بالمنحنى  $(C_f)$ .

6)  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $g(x) = (ax+b)e^x$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان.

عين  $a$  و  $b$  حتى يكون : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $g'(x) = f(x)$ .

### التمرين 06

I) لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $g(x) = (x+2)e^x - 2$

1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

- (3) أحسب  $g(0)$  ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  .
- (II) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$  و  $(C_f)$  وتمثيلها البياني .
- (1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  و احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- (2- أ) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن:  $f'(x) = -g(x)$  .
- (ب) استنتج إشارة  $f'(x)$  ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .
- (ج) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = 2x + 3$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  .
- ثم أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  .
- (3- أ) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث :  $0,92 < \alpha < 0,93$  و  $-1,56 < \beta < -1,55$  .
- (ب) أرسم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $]-\infty; \frac{3}{2}[$  .

## التمرين 07

- لتكن (I) الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$
- أدرس إتجاه تغير الدالة  $g$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$
- (II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$
- و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .
- أ-1- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب- ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها .
- (أ-2) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$  ثم استنتج معادلة لـ  $(\Delta)$  المقارب المائل للمنحنى  $(C_f)$  .
- (ب) أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  .
- 3- أثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا وحيدا  $(T)$  يوازي  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلة له .
- 4- باستعمال المنحنى  $(C_f)$  ، عين قيم الوسيط الحقيقي  $m$  حتى يكون للمعادلة  $f(x) = x + m$  حلين مختلفين .

## التمرين 08

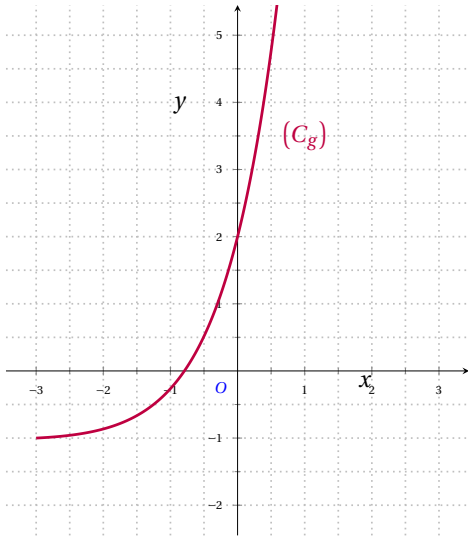
- $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-\infty; 1[$  بـ:  $f(x) = \frac{x}{x-1}e^{-x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) احسب:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ثم فسر النتيجة بيانيا ، ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2- بين أنه من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; 1[$  :  $f'(x) = \frac{(-x^2+x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$
- ثم ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .
- 3- أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة صفر.
- (ب)  $h$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-\infty; 1[$  بـ:  $h(x) = e^{-x} + x - 1$

ادرس اتجاه تغير الدالة  $h$  ثم أستنتج أنه من أجل كل  $x$  من  $] -\infty; 1[$  :  $h(x) \geq 0$ .

(4) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $] -\infty; 1[$  :  $f(x) + x = \frac{xh(x)}{x-1}$  ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمماس  $(T)$  .فسر النتيجة بيانيا.

(5) أكتب معادلة المستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل مبدأ المعلم  $O$  والنقطة  $A(-2; \frac{2}{3}e^2)$  ، ثم أرسم المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$  على المجال  $] -2; 1[$  .

## التمرين 09



(I) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي  $g(x) = (x+3)e^x + 1$  و  $(C_g)$  تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .  
بقراءة بيانية:

(أ) حدّد إشارة  $g(-1)$  و  $g(-\frac{1}{2})$  .

(ب) إستنتج وجود عدد حقيقي  $\alpha$  وحيد من المجال  $] -1; -\frac{1}{2}[$

بحيث  $g(\alpha) = 0$  ثم تحقّق أنّ :  $-0.8 < \alpha < -0.7$  .

(ج) إستنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

(II) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

1. أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

2. بين أنّه من كلّ عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = g(x)$  ثمّ كلّ جدول تغيرات الدالة  $f$  .

3. (أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$  ثمّ إستنتج أنّ  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلة له .

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

(ج) أكتب معادلة ل : مماس  $(T)$  الموازي للمستقيم  $(\Delta)$  .

4. أرسم المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  على المجال  $] -\infty; 1[$  (يعطى  $f(\alpha) \approx -0.7$ )

5. أحسب  $f(x) - g(x)$  ثمّ إستنتج دالة الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  .

6. الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$  و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق .

(أ) بين أنّ الدالة  $h$  زوجية .

- ب) تأكد أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  فإن  $h(x) = f(x-2) + 1$ .
- ج) اشرح كيف يمكن رسم  $(C_h)$  إنطلاقاً من  $(C_f)$  ثم أرسم  $(C_h)$  على المجال  $[-3; 3]$ .

## التمرين 10

- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[-1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (وحدة الطول  $2\text{cm}$ ).
- 1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[-1; +\infty[$  :  $f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$ .
- ب - أدرس إشارة  $f'(x)$  واستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ .
- ج - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 2) أ - بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x - \frac{3}{4}$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .
- ب - أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ .
- 3) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماساً  $(T)$  يوازي  $(\Delta)$  يطلب كتابة معادلة له.
- 4) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيينها.
- 5) أرسم  $(\Delta)$  ،  $(T)$  و  $(C_f)$ .
- 6) ليكن  $m$  وسيطاً حقيقياً . عين مجموعة قيم  $m$  التي من أجلها تقبل المعادلة  $f(x) = x + m$  حلين مختلفين .

## 3.7 شعبة الرياضيات

## التمرين 01

- I)  $f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$  واليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- 1) ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
- 2) بين ان  $(C_f)$  يقبل نقط إنعطاف  $\omega$  واكتب معادلة لمماس  $(C_f)$  عند  $\omega$ .
- ثم بين ان  $\omega$  مركز تناظر ل  $(C_f)$
- 3) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)]$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$  واستنتج ان  $(C_f)$  يقبل مقاربين يطلب تعيين معادلة كل منهما
- 4) بين ان  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة  $x_0 \in ]-2,77; -2,76[$ .
- احسب  $f(1)$  و  $f(-1)$  ارسم  $(C_f)$
- II)  $g$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  :  $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$  وليكن  $(C_g)$  تمثيلها البياني.

- (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن  $g(x) = f(-x)$  :  
 (2) أنشئ  $(C_g)$  في نفس المعلم السابق (دون دراسة  $g$ ).

## التمرين 02

- (I)  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = (3-x)e^x - 3$   
 (1) أدرس تغيرات الدالة  $g$ .  
 (2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين مختلفين أحدهما معدوم والآخر  $\alpha \in ]2,82; 2,83[$   
 (3) استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$

(II)  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني

- (1) بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0 = 0$  واكتب معادلة ل مماس  $(T)$  عند  $O$   
 (2) أ) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$  ثم جد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
 ب) بين أنه من أجل  $x \neq 0$  فإن :  $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$   
 ج) تحقق أن :  $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$  ، ثم عين حصره له .  
 د) أنشئ جدول تغيرات  $f$   
 (3) أحسب  $f(x) + x^3$  واستنتج الوضعية النسبية ل  $(C_f)$  و  $(C)$  منحنى الدالة  $x \rightarrow -x^3$   
 (4) بين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$  وفسر النتيجة هندسياً .  
 (5) أنشئ في نفس المعلم المماس  $(T)$  و  $(C_f)$  و  $(C)$ .

## التمرين 03

- (I)  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $g(x) = 2 - xe^x$   
 (1) أدرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .  
 (2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0,8 < \alpha < 0,9$   
 (3) عين حسب قيم  $x$  ، إشارة  $g(x)$  .  
 (II)  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ؛ [وحدة الطول : 2cm].  
 (1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ، ثم فسر النتيجة بيانياً .  
 (2) أ- احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ، ب- بين أن المستقيم  $(\Delta')$  ذا المعادلة :  $y = x + 1$  مقارب ل  $(C_f)$   
 (3) ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  حيث  $(\Delta)$  هو المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  .  
 (4) أ- بين أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  .

- ب-بين أن  $f(a) = a$  ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .
- (5) أرسم  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  و  $(C_f)$ .
- (6) ناقش ، بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ، عدد وإشارة حلول المعادلة  $f(x) = f(m)$ .

#### التمرين 04

- (I) الدالة  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$  . أ-1 أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- ب-أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها
- 2-أ-بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين في  $\mathbb{R}$ .
- تحقق أن أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث:  $-0,8 < \alpha < -0,7$ .
- ب- استنتج إشارة  $g(x)$  ، حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ .
- (II) الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$  . و  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ [وحدة الطول: 2cm].
- أ-1 أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب-بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .
- ج-أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$ .
- 2-أ-بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = g(x)$
- ب-شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على ( نأخذ:  $f(a) = -0,9$  )
- 3-أ-بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسين ، معمل توجه كل منهما يساوي 1 يطلب تعيين معادلة لكل منهما.
- ب-مثل  $(\Delta)$  والمماسين والمنحنى  $(C_f)$ .
- ج-ناقش بيانيا ، وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ، عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول  $x$  :  $(x+1)^2 + me^x = 0$ .

#### التمرين 05

- (I) الدالة  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = (2-x)e^x - 1$
- 1-أدرس تغيرات الدالة  $g$ .
- 2-بين أن للمعادلة  $g(x) = 0$  في  $\mathbb{R}$  حلان  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $-1,2 < \alpha < -1,1$  و  $1,8 < \beta < 1,9$ .
- 3- استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .
- (II) الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$
- و  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- 1-احسب نهاية الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$  وفسر النتيجة هندسيا.
- 2-بين أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$  واستنتج اتجاه تغير  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

- 3- بين أن :  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$  واستنتج حصرا للعددين  $f(\alpha)$  و  $f(\beta)$  .
- 4- احسب  $f(1)$  ، ثم أرسم المنحنى  $(C_f)$  .

## التمرين 06

- $f$  الدالة المعرفة بـ :  $f(0) = 0$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $] -\infty; 0[$  :  $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$  .
- و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .
- 1) أدرس استمرارية الدالة  $f$  عند 0 من اليسار .
- 2) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
- 3-أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .
- ب) أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- 4-أ) بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$  .
- استنتج ان المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلة له .
- 5)  $g$  الدالة المعرفة على  $] -\infty; 0[$  بـ :  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  .
- أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  .
- ب) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- 6-أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $] -\infty; 0[$  :  $f(x) > x$  .
- ب) استنتج وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  .
- ج) أنشئ المنحنى  $(C_f)$  .
- 8)  $m$  عدد حقيقي ،  $h_m$  الدالة ذات المتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $] -\infty; 0[$  بـ :  $h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$  .
- أ) أحسب  $h'_m(x)$  حيث  $h'_m$  هي الدالة المشتقة للدالة  $h_m$  .
- ب) باستعمال  $(C_f)$  ، ناقش بيانيا وحسب الوسيط الحقيقي  $m$  ، عدد حلول المعادلة :  $h'_m(x) = 0$  .

## التمرين 07

- $\varphi$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$  .
- 1-أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$  .
- ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $\varphi$  و شكل جدول تغيراتها .
- 2) تبيان أن المعادلة  $\varphi(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  يختلف عن 1 ، ثم تحقق أن  $2,79 < \alpha < 2,80$  .
- 3) استنتاج إشارة  $\varphi(x)$  على  $\mathbb{R}$  .
- II)  $f$  و  $g$  الدالتان المعرفتان على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$  و  $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$  .

- 1-أ) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها.
- 2) بين أن للمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  مماسا مشتركا  $(T)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.
- 3) ارسم المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$ .
- 4-أ) بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$
- ب) ادرس اشارة الفرق  $f(x) - g(x)$  ثم استنتج الوضع النسبي ل  $(C_f)$  و  $(C_g)$ .

## التمرين 08

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  حيث  $\|\vec{i}\| = 1cm$

I) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كإيلي:  $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$  و تمثيلها البياني

- 1- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2- ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3- أثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما، أحسب  $f(-2)$  وأرسم  $(C_f)$ .
- II) ليكن  $m$  وسيط حقيقي، نعتبر الدالة العددية  $f_m$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$  و  $(C_m)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق.
- 1- أثبت أن جميع المنحنيات  $(C_m)$  تشمل نقطة ثابتة  $w$  يطلب تعيين إحداثيهما.
- 2- أدرس اتجاه تغير  $f_m$  واستنتج قيم  $m$  التي من أجلها تقبل  $f_m$  قيمتين حديتين يطلب تعيينهما.
- 3-  $M_m$  نقطة من  $(C_m)$  فاصلتها  $X_m$  حيث:  $X_m = 1 - m$ .
- أثبت أنه عندما  $m$  يسمح  $\mathbb{R}$  فإن  $M_m$  تنتمي إلى منحنى يطلب تعيينه.
- 4- أدرس حسب قيم الوسيط  $m$  حيث  $m \neq 2$  الوضعية النسبية للمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_m)$ .

## التمرين 09

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كإيلي:  $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1-أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  وجود مستقيم مقارب للمنحنى يطلب تعيين معادلة له.
- ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$
- ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.
- 2- أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 2.
- 3- الدالة العددية والمعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كإيلي:  $h(x) = x^2 e^{-x+2} - 4$  , ادرس اتجاه تغير الدالة  $h$  ثم استنتج اشارة  $h(x)$  و حدد وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(T)$  على المجال  $[0; +\infty[$ .

- 4- إرسم المماس (T) والمنحنى (C<sub>f</sub>) على المجال ]0; +∞[ . 5- نعتبر الوسيط الحقيقي m والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب : f(x) = m(x-2) . (E) .
- ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .
- 6- الدالة العددية والمعرفة على المجال ]0; +∞[ بـ : g(x) = f(1/x) .
- إعتمادا على السؤال رقم (1) شكل جدول تغيرات الدالة g .

## التمرين 10

- (I) g الدالة العددية المعرفة على ]0; +∞[ كإيلي : g(x) = (1+x+x<sup>2</sup>)e<sup>-1/x</sup> - 1
- (1) بين أنه من أجل كل x من المجال ]0; +∞[ : g'(x) = (x+1)(2x<sup>2</sup>+1)e<sup>-1/x</sup> وأستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال ]0; +∞[ .
- (2) بين أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا α حيث 1,9 < α < 1 .
- واستنتج إشارة g(x) على المجال ]0; +∞[ .
- (II) f الدالة العددية المعرفة على ]0; +∞[ كإيلي : f(x) = 1/x + (1+x)e<sup>-1/x</sup> و (C<sub>f</sub>) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ) .
- أ-1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .
- ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال ]0; +∞[ : f'(x) = g(x)/(x<sup>2</sup>) . واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
- 2- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-1/x} - x)$  يمكن وضع t = -1/x ثم استنتج ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة y = x مقارب للمنحنى (C<sub>f</sub>) بجوار +∞ .
- 3- h الدالة العددية والمعرفة على المجال ]0; +∞[ كإيلي : h(x) = 1/x - 1 + e<sup>-1/x</sup> .
- أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة h(x) على المجال ]0; +∞[ .
- ب) تحقق أن : f(x) - x = (1+x)h(x) ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C<sub>f</sub>) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- 4- أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C<sub>f</sub>) (نأخذ α = 1.73) .

## التمرين 11

- (I) f<sub>k</sub> الدالة العددية المعرفة على ℝ بـ : f<sub>k</sub>(x) = (x+1)<sup>2</sup>e<sup>-kx</sup> حيث K وسيط حقيقي .
- ليكن (C<sub>k</sub>) التمثيل البياني للدالة f<sub>k</sub> في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ) .
1. بين أن كل المنحنيات (C<sub>k</sub>) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما .
2. أحسب نهايتي الدالة f<sub>k</sub> عند -∞ و +∞ . (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K) .

3. (أ) أحسب  $f'_k(x)$  ، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي  $K$  إتجاه تغير الدالة  $f_k$  .  
 (ب) شكّل جدول تغيرات الدالة  $f_k$  من أجل  $K$  عدد حقيقي موجب تماما .  
 4. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $K$  الأوضاع النسبية للمنحنيين  $(\mathcal{C}_k)$  و  $(\mathcal{C}_{k+1})$  .

(II)  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$

نسمي  $(\mathcal{C}_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

1. شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$  ، ثم أرسم المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  على المجال  $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right]$  .  
 2. (أ) بين أنّ المعادلة  $f(x) = 1$  تقبل حلين في  $\mathbb{R}$  أحدهما  $\alpha$  حيث :  $1,28 < \alpha < -1,27$  .  
 (ب) عين قيم العدد الحقيقي  $m$  التي من أجلها تقبل المعادلة :  $\left|\frac{x+1}{e^x}\right| = \left|\frac{m+1}{e^m}\right|$  حلا وحيدا .  
 3.  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) + (x+1)e^{-2x}$  .  
 (أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن:  $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$  ثم إستنتج دالة أصلية لـ  $g$  على  $\mathbb{R}$  .  
 (ب) بإستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = -1$  و  $x = 0$

## التمرين 12

- (I) الدالتان  $g$  و  $h$  معرفتان على المجال  $] -\infty; 0]$  كما يلي :  $g(x) = -2e^x$  و  $h(x) = x(e^x + 1)$   
 حدد إشارة كلا من  $g(x)$  و  $h(x)$  على المجال  $] -\infty; 0]$  .  
 (II) الدالة العددية  $f$  معرفة على المجال  $] -\infty; 0]$  كما يلي :  $f(x) = (x-3)e^x + \frac{1}{2}x^2$  .  
 و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .  
 (1) (أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $] -\infty; 0]$  :  $f'(x) = h(x) + g(x)$  .  
 (ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $] -\infty; 0]$  .  
 (2) أحسب  $f(0)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$  .  
 (3) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $] -\infty; 0]$  ثم نحقق أن :  $-1.5 < \alpha < -1.4$  .  
 (4)  $(P)$  هو التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$  على المجال  $] -\infty; 0]$  .  
 (أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \frac{1}{2}x^2]$  ، ثم فسر النتيجة بيانيا .  
 (ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين  $(P)$  و  $(C_f)$  .  
 (ج) أنشئ  $(P)$  ثم المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $] -\infty; 0]$  .  
 (5) ليكن  $m$  وسيطا حقيقيا ، ناقش بيانيا و حسب قيم  $m$  عدد حلول المعادلة  $|f(x)| = e^m$  في المجال  $] -\infty; 0]$  .