

سألة أسية رقم 02

الجزء الأول

- لتكن g دالة عددية مُعرّفة على \mathbb{R} و تُحقّق العلاقة $g(x) - 2g(1-x) = e^x - 2e^{1-x} - 3x + 3$ (1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (إرشاد: ضع $t = x$ تارةً و $t = 1-x$ تارةً أخرى)
- (2) نضع: $D_g = \mathbb{R}$ حيث $g(x) = e^x - x - 1$
- (أ) أحسب نهايات الدالة $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- (ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ثم شكل جدول تغيّراتها
- (3) استنتج إتجاه تغيّر الدالة h المُعرّفة على \mathbb{R} بـ $h(x) = 1 - g(-x)$
- (4) أثبت أنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيثُ:
- $1,84 < \beta < 1,85$ و $-1,15 < \alpha < -1,14$
- (5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعاً لقيم العدد الحقيقي x .

الجزء الثاني:

لتكن f دالة عددية مُعرّفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم

متعامد و متجانس للمستوي.

(1) أحسب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسّر هندسياً النتائج.

(2) (أ) أثبت أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وأنّ $f'(x) = \frac{e^x \times h(x)}{[1 + g(x)]^2}$.

(ب) استنتج إتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

(3) أحسب $f(0)$ ثمّ أرسم (C_f) .

بالتوفيق لتلاميذ

بكالوريا 2021

الإجابة النموذجية

الجزء الأول

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$

الدالة h متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$ و متزايدة تماماً على $]-\infty, 0]$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ و

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ ، وتغيّرات الدالة h موضحة

في الجدول الآتي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

(4) الدالة h مستمرة ورتيبة تماماً على كل مجال من

المجالين $]-1,15; -1,14[$ و $]1,84; 1,85[$ ولدينا

$h(-1,15) \times h(-1,14) < 0$ وكذلك

$h(1,85) \times h(1,84) < 0$ ومنه حسب مبرهنة

القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و

β حيث $-1,15 < \alpha < -1,14$ و

$1,84 < \beta < 1,85$.

(5) إشارة $g(x)$ و $h(x)$ موضحة في الجدولين

x	$-\infty$	α	β	1
$h(x)$	$-$	0	$+$	0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$+$

(1) من أجل $t = x$ يكون لدينا

$$g(t) - 2g(1-t) = e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3 \dots (1)$$

من أجل $t = 1-x$ يكون لدينا

$$g(1-t) - 2g(t) = e^{1-t} - 2e^t + 3t \dots (2)$$

بضرب المعادلة (2) في 2 والجمع مع المعادلة (1) طرفاً

لطرف نجد أن $g(t) = e^t - t - 1$ ، إذن الدالة g

معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = e^x - x - 1$.

(2) الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة

$$g'(x) = e^x - 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة g متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$ و متناقصة

تماماً على $]-\infty, 0]$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

، وتغيّرات الدالة g موضحة في الجدول الآتي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(3) الدالة h قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة

$$h'(x) = e^{-x} - 1$$

الجزء الثاني:

الدالة f معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

(ب) بما أن $\frac{e^x}{[e^x - x]^2} > 0$ من أجل كل عدد

حقيقي x فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.
الدالة f متناقصة تماماً على

$]-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty[$ و متزايدة تماماً على
 $[\alpha, \beta]$ ، و جدول تغيراتها هو

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		$f(\alpha)$	$f(\beta)$	1	

(3) لدينا $f(0) = 0$ ، و (C_f) موضح في الرسم المرفق

(1) لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} = 1$$

المستقيمان $(\Delta): y = 1$ و $(\Delta'): y = 0$ مقاربان أفقيان لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب.

(2) الدالتان $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x$ قابلتان للإشتقاق على \mathbb{R} و عليه تكون الدالة f قابلة للإشتقاق على

$$\mathbb{R} \text{ ودالتها المشتقة هي } f'(x) = \frac{e^x \times h(x)}{[e^x - x]^2}$$

