

تمارين و مشكلات:

التمرين 1

ضع علامة $\checkmark$ أمام كل جملة صحيحة و العلامة $\times$ أمام كل جملة خاطئة:

- 1 - إذا كانت F دالة أصلية لدالة f على مجال I فإن f هي الدالة المشتقة للدالة F .
- 2 - الدالة: $x \mapsto x^3 - 5x$ هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة: $x \mapsto 3x^2 - 5$ على $\mathbb{R}$.
- 3 - كل دالة مستمرة على مجال يمكن تعيين دالتها الأصلية.
- 4 - إذا كانت F دالة أصلية لدالة f فإن F^2 دالة أصلية للدالة f^2 .
- 5 - الدالة F' هي دالة أصلية للدالة F'' .
- 6 - كل دالة مستمرة على مجال I تقبل دالة أصلية وحيدة تنعدم عند عدد x_0 من I .
- 7 - الدالة $x \mapsto \sin 2x$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \cos 2x$ على $\mathbb{R}$.
- 8 - الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $\mathbb{R}$.
- 9 - الدالة الأصلية لدالة كثير حدود هي دالة كثير حدود.
- 10 - الدالة: $f^{(n)}$ هي إحدى الدوال الأصلية للدالة f .
- 11 - الدالة: $x \mapsto \cos x + \sin x$ هي الدالة الأصلية للدالة: $x \mapsto \sin x - \cos x$.

12 - إذا كانتا F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة f على مجال I فإنه من أجل كل عدد x من I : $h(x) - g(x) = k$ و $k \in \mathbb{R}$.

13 - الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ لا تقبل دوال أصلية على المجال $]0; +\infty[$

14 - توجد دالة كثيرة حدود إحدى دوالها الأصلية هي نفسها.

15 - الدالة $x \mapsto x^3$ هي الدالة الأصلية التي تنعدم عند 0

للدالة $x \mapsto 3x^2$

16 - إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فهي تقبل دالة أصلية وحيدة على هذا المجال .

17 - كل دالة معرفة على مجال I تقبل دالة أصلية على I .

18 - كل دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a; b]$ تقبل دوال أصلية على $[a; b]$.

19 - الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto (x^2 + 1)^2$ هي الدوال

$$k \in \mathbb{R} , \quad x \mapsto \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + k$$

20 - الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$ هي الدوال :

$$x \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + k$$

التمرين 2

عين الدوال الأصلية للدالة f في كل مما يلي معينا مجال الدراسة :

$$1) f(x) = 2x - 1$$

$$2) f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$3) f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 4$$

$$4) f(x) = x^4 - x^3$$

$$5) f(x) = \frac{4}{x^2}$$

$$6) f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$7) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$8) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$9) f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$10) f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}$$

التمرين 3

عين الدوال الأصلية للدالة f في كل مما يلي معينا مجال الدراسة :

$$1) f(x) = x^2 (x^3 + 1)^2$$

$$2) f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 1)^3$$

$$3) f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$4) f(x) = \frac{x-1}{(x^2 - 2x + 4)^3}$$

$$5) f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$6) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$7) f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$8) f(x) = \cos 2x - \sin 3x$$

$$9) f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x$$

$$10) f(x) = \cos 2x \cdot \sin 2x$$

التمرين 4

عين الدالة الأصلية $\mathbf{F}$ للدالة $\mathbf{f}$ على المجال I التي تحقق $\mathbf{F}(0)=0$ في كل حالة مما يلي :

$$1) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sin \frac{\mathbf{x}}{2} + \cos \frac{\mathbf{x}}{2}$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$2) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}+1}}$$

$$I =]-1; +\infty[$$

$$3) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\mathbf{x}+2)^3}$$

$$I =]-\infty; -2[$$

$$4) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^n - 1 ; n \in \mathbb{N}$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$5) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\cos^2 \mathbf{x}}$$

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$6) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 1 - \frac{1}{(\mathbf{x}+1)^2}$$

$$I =]-1; +\infty[$$

$$7) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sin \mathbf{x} \cdot \cos^n \mathbf{x} \quad 8) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\mathbf{x}+2)^2} + \frac{1}{(\mathbf{x}+2)^3}$$

$$I = \mathbb{R} , n \in \mathbb{N}$$

$$I =]-\infty; -2[$$

التمرين 5

نعتبر الدالة $\mathbf{f}$ حيث : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sin^3 \mathbf{x}$

(1) عين الدوال الأصلية $\mathbf{F}$ للدالة $\mathbf{f}$.

(2) استنتج الدالة الأصلية $\mathbf{H}$ للدالة $\mathbf{f}$ و التي تأخذ القيمة 2 من

أجل $\mathbf{x} = 0$

التمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x-1)^2}$$

- (1) عين D_f مجموعة التعريف للدالة f .
- (2) بين أنه من أجل كل عدد x من D_f فإن:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

- (3) عين الدوال الأصلية F للدالة f على $]1; +\infty[$.
- (4) استنتج الدالة الأصلية H التي تتعدم عند $x=2$ للدالة f على $]1; +\infty[$.

التمرين 7

- (1) ادرس تغيرات الدالة g حيث: $g(x) = \sqrt{3-2x}$
- (2) نعتبر الدالة f حيث:
 $f(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \sqrt{3-2x}$ عين الأعداد الحقيقية α و β و γ بحيث تكون f دالة أصلية للدالة g على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}[$.
- (3) أنشئ التمثيل البياني للدالة g .

التمرين 8

نعتبر الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = \sin x + \sin^3 x$

(1) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

(2) بين أنه يوجد عدنان حقيقيان α و β بحيث من أجل كل عدد

حقيقي x فإن : $f''(x) + \alpha f(x) = \beta \sin x$

(3) استنتج الدوال الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

(4) استنتج الدالة الأصلية H للدالة f بحيث : $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

التمرين 9.

f دالة فردية و مستمرة على $\mathbb{R}$. F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

G دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $G(x) = F(x) - F(-x)$

بين أن G دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

التمرين 10.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}_+$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$.

(C) تمثيلها البياني .

1 - ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}_+$

2 - بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا.

3 - لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على $[0; +\infty[$ و التي تنعدم

عند 0 . بين أن F موجودة.

4 - استنتج اتجاه تغير الدالة F .

5 - نعرف على $\mathbb{R}_+$ الدالتان H و K كما يلي :

$$H(x) = F(x) - x \text{ و } K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$$

- ادرس اتجاه تغير الدالتان H و K على $\mathbb{R}_+$.
- استنتج أنه من أجل كل عدد x حيث $x \geq 0$
- فإن : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.
- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- 6 - استنتج أن المعادلة $F(x) = \pi$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+$.
- بين أن : $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$

التمرين 11

$$y' = x^2 + \frac{1}{(x+1)^2} \dots (1)$$

- عين حلا للمعادلة التفاضلية (1).
- استنتج الحل الذي ينعدم من أجل $x=0$.
- نضع : $y = f(x)$. عين الدالة f .
- ادرس تغيرات الدالة f .
- ادرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة للمنحنى (C)
- الممثل لتغيرات الدالة f .
- أنشئ (C) بعد حساب : $f(-2), f(0), f(2), f(1)$.

التمرين 12.

عين الحل الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x=2$ للمعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- بوضع: $y = f(x)$. ادرس اتجاه تغير الدالة f .

- ادرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة للمنحنى (C) الممثل لتغيرات f .

- احسب كل من: $f(-5), f(-4), f(-2), f(3), f(2), f(0)$.
أعطي القيم مدورة إلى 10^{-2} ثم أنشئ (C) .

التمرين 1

$\times$	(4	$\times$	(3	$\times$	(2	$\sqrt{}$	(1
$\times$	(8	$\times$	(7	$\times$	(6	$\sqrt{}$	(5
$\sqrt{}$	(12	$\sqrt{}$	(11	$\times$	(10	$\sqrt{}$	(9
$\times$	(16	$\sqrt{}$	(15	$\sqrt{}$	(14	$\times$	(13
$\sqrt{}$	(20	$\times$	(19	$\sqrt{}$	(18	$\times$	(17

التمرين 2

تعيين الدوال الأصلية :

(1) لدينا : $f(x) = 2x - 1$ و منه : $D_f = \mathbb{R}$

$$F(x) = x^2 - x + k, k \in \mathbb{R}$$

(2) لدينا : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ و منه : $D_f = \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + k, k \in \mathbb{R}$$

(3) لدينا : $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 4$ و منه : $D_f = \mathbb{R}$

$$F(x) = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 4x + k; k \in \mathbb{R}$$

(4) لدينا : $f(x) = x^4 - x^3$ و منه : $D_f = \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + k; k \in \mathbb{R}$$

(5) لدينا : $f(x) = \frac{4}{x^2}$ و منه : $D_f = \mathbb{R}^*$

الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $]0; +\infty[$ و عليه تقبل دوال أصلية F على كل منهما معرفة بالعبارة:

$$F(x) = \frac{-4}{x} + k, k \in \mathbb{R}$$

(6) لدينا : $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ و منه : $D_f = \mathbb{R}^*$

الدالة f هي مجموع دالتين ناطقتين فهي مستمرة على مجموعة التعريف و عليه فهي دوال أصلية على كل من المجالين : $]-\infty; 0]$ أو $]0; +\infty[$ معرفة بالعبارة :

$$F(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2} + k, k \in \mathbb{R}$$

(7) لدينا : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و منه : $D_f = \mathbb{R}_+^*$

الدالة f هي مقلوب دالة صماء مستمرة و عليه فهي مستمرة على D_f و منه تقبل دوال أصلية F حيث :

$$F(x) = 2\sqrt{x} + k ; k \in \mathbb{R}$$

(8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ و منه : $D_f =]1; +\infty[$

الدالة f مستمرة لأنها مقلوب مركب دالتين مستمرتين و عليه تقبل

دوال أصلية F حيث : $F(x) = 2\sqrt{x-1} + k ; k \in \mathbb{R}$

(9) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ و منه : $D_f = \mathbb{R}$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و عليه تقبل دوال أصلية F

و لدينا : $f(x) = \cos 2x$

و منه : $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + k$; $k \in \mathbb{R}$

(10) لدينا : $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}$

ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$

إذن : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{R}$

أي : $D_f = \left[\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$, $k \in \mathbb{R}$

و عليه f مستمرة على D_f لأنها حاصل قسمة مركب دوال مثلية و كثيرات حدود تقبل دوال أصلية F

و لدينا : $f(x) = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^3 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} = -2 \cdot \frac{-\sin x}{[\cos x]^2}$

و منه : $F(x) = -2 \times \frac{-1}{\cos x} + k$

إذن : $F(x) = \frac{2}{\cos x} + k$ حيث k ثابت حقيقي.

التمرين 3

تعيين الدوال الأصلية للدالة f في كل مما يلي :

(1) لدينا : $f(x) = x^2(x^3 + 1)^2$ و $D_f = \mathbb{R}$

و منه : $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2(x^3 + 1)^2$

إذن : $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}(x^3 + 1)^3 + k$; $k \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{9}(x^3 + 1)^3 + k \quad : \text{أي}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad ; \quad 2) f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 1)^3 \quad : \text{لدينا}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x+2)(x^2 + 2x - 1)^3 \quad : \text{و منه}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 1)^4 + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \quad : \text{إذن}$$

$$F(x) = \frac{1}{8}(x^2 + 2x - 1)^4 + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \quad : \text{أي}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \quad : \text{لدينا}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \quad : \text{و منه}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2 + 1} + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \quad : \text{إذن}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{x-1}{(x^2 - 2x + 4)^3} \quad : \text{لدينا}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{(x^2 - 2x + 4)^2} \quad : \text{و منه}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2 - 2x + 4} + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \quad : \text{إذن}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} \quad : \text{لدينا}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}} \quad : \text{و منه}$$

إذن : $F(x) = \frac{1}{4} \times \sqrt{x^4 + 1} + k ; k \in \mathbb{R}$

(6) لدينا : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[; f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

و منه : $f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}$

إذن : $F(x) = \sqrt{x^2 - 1} + k ; k \in \mathbb{R}$

(7) لدينا : $D_f = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

إذن : $g(x) = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \lambda ; \lambda \in \mathbb{R}$

(8) لدينا : $D_f = \mathbb{R} ; f(x) = \cos 2x - \sin 3x$

إذن : $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + k ; k \in \mathbb{R}$

(9) لدينا : $D_f = \mathbb{R} ; f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x$

إذن : $F(x) = \frac{1}{4} \cos^4 x + k ; k \in \mathbb{R}$

(10) لدينا : $D_f = \mathbb{R} ; f(x) = \cos 2x \cdot \sin 2x$

و منه : $f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$

و عليه : $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$

إذن : $F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \cos 4x + k$

$$F(x) = \frac{-1}{8} \cos^4 x + k ; k \in \mathbb{R} : \text{أي}$$

التمرين 4

تعيين الدوال الأصلية :

$$I = \mathbb{R} ; f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} : (1) \text{ لدينا}$$

$$g(x) = \frac{-1}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + \lambda : \text{ إذن}$$

$$g(x) = -2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} + \lambda : \text{ أي}$$

$$\lambda = 2 : \text{ لكن } g(0) = 0 \text{ ومنه } -2 + 0 + \lambda = 0 : \text{ أي } \lambda = 2$$

$$. g(x) = -2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} + 2 : \text{ إذن}$$

$$I =]-1; +\infty[; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} : (2) \text{ لدينا}$$

$$f(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} : \text{ ومنه}$$

$$g(x) = 2\sqrt{x+1} + \lambda : \text{ إذن}$$

$$\lambda = -2 : \text{ لكن } g(0) = 0 \text{ ومنه } 2 + \lambda = 0 : \text{ أي } \lambda = -2$$

$$. g(x) = 2\sqrt{x+1} - 2 : \text{ إذن}$$

$$I =]-\infty; -2[; f(x) = \frac{1}{(x+2)^3} : (3) \text{ لدينا}$$

$$g(x) = \frac{-1}{2(x+2)^2} + \lambda : \text{ إذن}$$

لكن : $g(0) = 0$ و منه : $-\frac{1}{8} + \lambda = 0$ أي : $\lambda = \frac{1}{8}$

إذن : $g(x) = \frac{-1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{8}$

(4) لدينا : $I = \mathbb{R}$ ؛ $f(x) = x^n - 1$ ؛ $n \in \mathbb{N}$

إذن : $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - x + \lambda$

لكن : $g(0) = 0$ و منه : $0 - 0 + \lambda = 0$ أي : $\lambda = 0$

إذن : $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - x$

(5) لدينا : $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ؛ $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

إذن : $g(x) = \tan x + \lambda$

لكن : $g(0) = 0$ و منه : $\tan 0 + \lambda = 0$ أي : $\lambda = 0$

إذن : $g(x) = \tan x$

(6) لدينا : $I =]-1; +\infty[$ ؛ 6) $f(x) = x + 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$

إذن : $g(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x+1} + \lambda$

لكن : $g(0) = 0$ و منه : $1 + \lambda = 0$ أي : $\lambda = -1$

إذن : $g(x) = \frac{x^2}{2} + x \frac{1}{x+1} - 1$

(7) لدينا : $I = \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x \cdot \cos^n x$

و منه : $f(x) = -1 \times (-\sin x)(\cos x)^n$

$$g(x) = \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} x + k \quad : \text{ إذن}$$

$$k = \frac{-1}{n+1} \quad : \text{ أي: } \frac{-1}{n+1} + k = 0 \quad \text{و منه: } g(0) = 0 \quad \text{لكن:}$$

$$g(x) = \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} x + \frac{1}{n+1} \quad : \text{ إذن}$$

$$I =]-\infty ; -2[\quad : \quad f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3} \quad (8) \text{ لدينا}$$

$$g(x) = \frac{-1}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + k \quad : \text{ إذن}$$

$$k = \frac{5}{8} \quad : \text{ أي: } \frac{-1}{2} - \frac{1}{8} + k = 0 \quad \text{و منه: } g(0) = 0 \quad \text{لكن:}$$

$$g(x) = \frac{-1}{n+2} - \frac{1}{2(n+2)^2} + \frac{5}{8} \quad : \text{ إذن}$$

التمرين 5

1 - تعيين الدوال الأصلية للدالة f :

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x (1 - \cos^2 x) \quad : \text{ لدينا}$$

$$f(x) = \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x \quad : \text{ وعليه}$$

$$g(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + k \quad : \text{ إذن}$$

$$h(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + k \quad : \text{ حيث } h \text{ استنتاج}$$

$$k = \frac{2}{3} \quad : \text{ أي: } -1 + \frac{1}{3} + k = 0 \quad \text{و منه: } h(0) = 2 \quad \text{مع}$$

$$h(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{3} \quad : \text{ إذن}$$

1 - مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2 - تعيين a, b, c :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b + c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (-2a+b)x^2 + (a-2b)x + b+c}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=+2 \\ c=-2 \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} a=1 \\ -2a+b=0 \\ a-2b=-3 \\ b+c=0 \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{2}{(x-1)^2} \quad \text{و عليه :}$$

3 - تعيين الدوال الأصلية g :

$$f(x) = x + 2 - \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\text{و منه :} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{x-1} + \lambda \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

4- استنتاج الدالة الأصلية h حيث : $h(2) = 0$

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{x-1} + \lambda \quad \text{لدينا :}$$

و منه : $h(2) = 2 + 4 + 2 + \lambda$ أي : $h(2) = \lambda + 8$

إذن : $\lambda + 8 = 0$ و منه : $\lambda = -8$

إذن : $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{x-1} - 8$

التمرين 7

1- دراسة تغيرات g : $D_f = \left] -\infty ; \frac{3}{2} \right]$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-2x} = +\infty$

$$g'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$$

و منه : $g'(x) < 0$ و عليه g متناقصة تماما على المجال $\left] -\infty ; \frac{3}{2} \right]$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$  0	

2- تعيين : α, β, γ

f دالة أصلية للدالة g تكافئ : $f(x) = g(x)$ و لدينا :

$$f(x) = (2\alpha x + \beta)\sqrt{3-2x} + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \times \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}$$

$$= (2\alpha x + \beta)\sqrt{3-2x} - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\frac{\sqrt{3-2x}}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{(2\alpha x + \beta)(3-2x)\sqrt{3-2x} - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\sqrt{3-2x}}{3-2x} \\
 &= \frac{\sqrt{3-2x}}{3-2x} (6\alpha x - 4\alpha x^2 + 3\beta - 2\beta x - \alpha x^2 - \beta x - \gamma) \\
 &= \frac{\sqrt{3-2x}}{3-2x} \times [-5\alpha x^2 + (6\alpha - 3\beta)x + 3\beta - \gamma]
 \end{aligned}$$

تكون f دالة أصلية للدالة g إذا و فقط إذا كان :

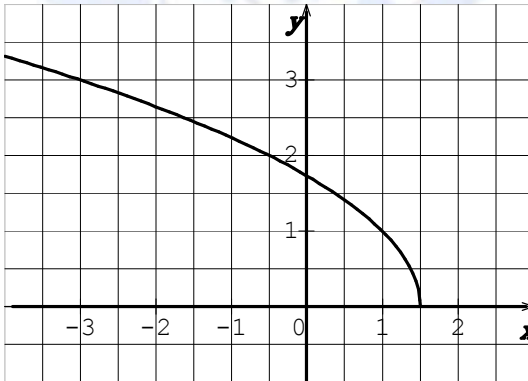
$$\frac{-5\alpha x^2 + (6\alpha - 3\beta)x + 3\beta - \gamma}{3-2x} = 1$$

و عليه : $-5\alpha x^2 + (6\alpha - 3\beta)x + 3\beta - \gamma = 3 - 2x$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{2}{3} \\ \gamma = -1 \end{cases} \quad \text{و عليه :} \quad \begin{cases} -5\alpha = 0 \\ 6\alpha - 3\beta = -2 \\ 3\beta - \gamma = 3 \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}x - 1\right)\sqrt{3-2x} \quad \text{و منه :}$$

3 - إنشاء بيان g :



(1) حساب $f'(x)$ و $f''(x)$:

$$f'(x) = \cos x + 3 \cos x \sin^2 x \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = \cos x (3 + \sin^2 x) \quad \text{و منه :}$$

$$f''(x) = -\sin x (3 + \sin^2 x) + \cos x (2 \cos x \sin x)$$

$$f''(x) = \sin x [-3 - \sin^2 x + 2 \cos^2 x]$$

(2) نبين وجود α و β : $f''(x) + \alpha f'(x) = \beta \sin x$

$$-3 \sin x - \sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x + \alpha \sin x + \alpha \sin^3 x = \beta \sin x$$

$$(\alpha - 3) \sin x - \sin^3 x + 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \alpha \sin^3 x = \beta \sin x$$

$$(\alpha - 3) \sin x - \sin^3 x + 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \alpha \sin^3 x - \beta \sin x = 0$$

$$(\alpha - \beta - 1) \sin x + (\alpha - 3) 2 \sin^3 x = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} \alpha - 3 = 0 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

$$f''(x) + 3 f'(x) = 2 \sin x \quad \text{إذن :}$$

(3) إيجاد الدوال الأصلية F للدالة f :

$$f(x) = \frac{1}{3} (-f''(x) + 2 \sin x) \quad \text{مما سبق :}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} (-f'(x) - 2 \cos x) + k, \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{و عليه :}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} (\cos x (3 + \sin^2 x) - 2 \cos x) + k \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} (\cos x + \cos x \sin^2 x) + k \quad \text{أي :}$$

4) تعيين الدالة الأصلية H حيث : $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$H(x) = \frac{1}{3}(\cos x + \cos x \sin^2 x) + k \quad \text{لدينا :}$$

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2}\right) + k \quad \text{ومنه :}$$

$$k = 1 \quad \text{ومنه :} \quad H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{لكن :}$$

$$h(x) = \frac{1}{3} \cos x (1 + \sin^2 x) + 1 \quad \text{وعليه :}$$

التمرين 9

نبين أن G دالة ثابتة على $\mathbb{R}$:

$$G(x) = F(x) - F(-x) \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا : F دالة أصلية للدالة f و منه : $F'(x) = f(x)$

$$f(-x) = f(x) \quad \text{و بما أن } f \text{ فردية فإن :}$$

$$G(x) = F'(x) - (-1)F'(-x) \quad \text{لدينا :}$$

$$G(x) = F'(x) + F'(-x)$$

$$G(x) = f(x) + f(-x)$$

$$G(x) = f(x) - f(x) = 0$$

و عليه : $G(x) = \lambda$ حيث : λ عدد ثابت.

1 - دراسة تغيرات f على $\mathbb{R}_+$:

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

$$f(x) = \frac{2x(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 2x^3 - 2x - x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+

و منه f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ و متناقصة تماما على $[0; 1]$
جدول التغيرات :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	1	$\frac{2}{3}$	1

2- نبين أن (C) يقبل مستقيم مقارب :

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ فإن $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب.

3- نبين أن F موجودة وبما أنها دالة ناطقة فهي مستمرة على مجموعة تعريفها وعليه فهي مستمرة على $\mathbb{R}_+$ و منه f تقبل دالة أصلية F وهذه الدالة وحيدة لأنها تأخذ القيمة 0 عند 0.

4- استنتاج تغير الدالة F :

لدينا : $F'(x) = f(x)$ حيث : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$

لكن : $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1$ وعليه : $F'(x) > 0$

ومنه F متزايدة تماما على $[0; +\infty[$.

5- دراسة اتجاه تغير H :

لدينا : $H'(x) = F'(x) - \frac{2}{3} = f(x) - \frac{2}{3}$ لكن $f(x) \geq \frac{2}{3}$

ومنه : $H'(x) \geq 0$ وعليه H متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$.

- دراسة اتجاه تغير k :

$K'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1$ ؛ $f(x) \leq 1$

و عليه K متناقصة تماما على $\mathbb{R}_+$

- استنتاج أن : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$

لدينا : $f(x) \geq \frac{2}{3}$ ولدينا : $f(x) \leq 1$

ومنه : $F(x) \leq x$ إذن : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$

- استنتاج النهاية :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و عليه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

6- استنتاج أن المعادلة $F(x) = \pi$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+$:

الدالة F مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$ و بما أن $\pi \in \mathbb{R}_+$

فإن يوجد عدد وحيد α بحيث $f(\alpha) = \pi$

حسب نظرية القيم المتوسطة

$$\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{لدينا : } \frac{2}{3}\pi \leq F(\pi) \leq \pi \text{ حيث : } \frac{2}{3}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \leq F\left(\frac{3\pi}{2}\right) \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{ومنه : } \pi \leq F\left(\frac{3\pi}{2}\right) \leq \frac{3\pi}{2} \text{ إذن : } F(\pi) \leq \pi \leq F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

وعليه $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ حسب نظرية التزايديات المنتهية.

التمرين 11

- حل المعادلة التفاضلية هو :

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + \lambda ; \lambda \in \mathbb{R}$$

- تعيين الحل f حيث $f(0) = 0$:

$$\text{لدينا : } f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + \lambda \text{ وبما أن : } f(0) = 0$$

$$\text{فإن : } 0 = -1 + \lambda \text{ ومنه : } \lambda = 1$$

$$\text{وعليه : } f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + 1$$

- دراسة التغيرات للدالة f :

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + 1 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x > -1 \\ x \rightarrow -1}} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x < -1 \\ x \rightarrow -1}} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد x من D_f لدينا: $f(x) > 0$

إن f متزايدة تماما على كل من المجالين: $]-1; +\infty[$ و $]-\infty; -1[$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

- دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

لدينا أربعة فروع لانهائية و مستقيم مقارب معادلته : $x = -1$

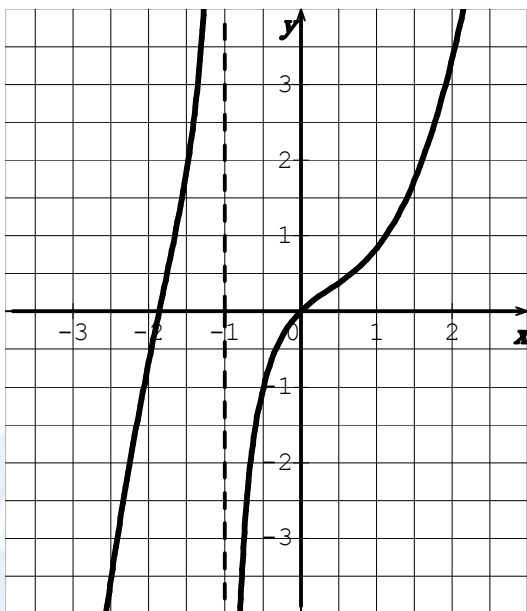
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x} = +\infty$$

و عليه (C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور الترتيب عند $+\infty$

و آخر عند $-\infty$.

$$- \text{إنشاء } (C) : \quad f(1) = \frac{5}{6} \quad ; \quad f(2) = \frac{10}{3} \quad ; \quad f(-2) = \frac{-2}{3}$$

$$. \quad f(0) = 0$$



التمرين 12

- تعيين f :

لدينا : $y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}$ و منه : $y' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}}$

وهي من الشكل : $y' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

وعليه : $y = \sqrt{g(x)} + c = \sqrt{x^2+2x+8} + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

إذن : $f(x) = \sqrt{x^2+2x+8} + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

لكن : $f(2) = 1$ وعليه : $\sqrt{(2)^2+2(2)+8} + c = 1$

إذن : $4 + c = 1$ أي : $c = -3$

و عليه : $f(x) = \sqrt{x^2+2x+8} - 3$

- دراسة تغيرات f :

$$D_f =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 8}}$$

إشارة المشتق :

x	$-\infty$	$1-$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

إذن الدالة متزايدة تماما على المجال $[-1; +\infty[$

و متناقصة تماما على $]-\infty; -1]$.

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(-1)$	$+\infty$

$$f(-1) \approx -0,35 \quad ; \quad f(-1) = \sqrt{7} - 3$$

- دراسة الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة يوجد فرعان لانهايين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}}{x} - \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 8} - 3 - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 2x + 8} - (x+3)][\sqrt{x^2 + 2x + 8} + (x+3)]}{[\sqrt{x^2 + 2x + 8} + x + 3]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2x + 8) - (x+3)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} + x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 8 - x^2 - 6x - 9}{x \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1 + \frac{3}{x} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[-4 - \frac{1}{x} \right]}{x \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1 + \frac{3}{x} \right]} = -2$$

و عليه : $y = x - 2$ هي معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} \right)}}{x} - \frac{2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} \right)}}{x} - \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 8} - 3 + x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 + 2x + 8} - (x + 3) \right] \left[\sqrt{x^2 + 2x + 8} + (-x + 3) \right]}{\left[\sqrt{x^2 + 2x + 8} + (-x + 3) \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 2x + 8) - (-x + 3)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} - x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 8 - x^2 + 6x - 9}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} - x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} - x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(8 - \frac{1}{x} \right)}{x \left[-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} - 1 + x \right]} = -4 \end{aligned}$$

ومنه: $y = -x - 4$ هي معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

الحساب:

$$\begin{aligned} f(0) &\approx -0,17 \quad \text{ومنه} \quad f(0) = \sqrt{8} - 3 \\ f(2) &= \sqrt{16} - 3 = 1 \\ f(3) &\approx 1,80 \quad , \quad f(3) = \sqrt{23} - 3 \\ f(-2) &\approx -0,17 \quad , \quad f(-2) = \sqrt{8} - 3 \\ f(-4) &= 1 \end{aligned}$$

$$f(-5) \approx 1,80 \quad , \quad f(-5) = \sqrt{23} - 3$$

إنشاء (C) :

