

تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

شبهة : علوم تجريبية

التمرين [1] [باك 2008] [م1] [ن4]

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1; 2]$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أبين أن الدالة f متزايدة على I .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

(2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يأتي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب- عين النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين [2] [باك 2008] [م2] [ن5]

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

(1) أ- أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحني (d) الممثل للدالة f

المعرفة على \mathbb{R} ب : $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 .

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة.

ج- هل (u_n) متقاربة؟ برز إجابتك.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [3] [باك 2009] [م1] [ن3,5]

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

المتتالية (v_n) معرفة على \mathbb{N} كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

أ- أحسب v_0 و v_1

ب- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

ج- أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$

ج- بين أن (u_n) متقاربة.

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} : \text{حيث } (u_n) \text{ هندية متزايدة تماما حدها الأول } u_1 \text{ وأساسها } q$$

1- أ- أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1

ب- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

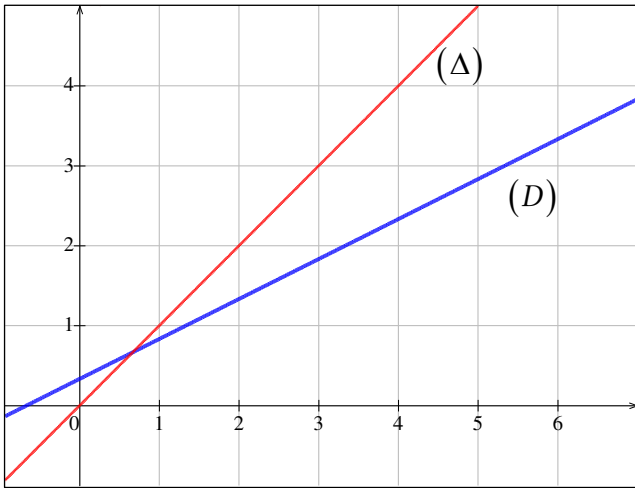
ج- أحسب S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

$$(2) \text{ } (v_n) \text{ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n \text{ كما يلي: } v_1 = 2 \text{ و } v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$$

أ- أحسب v_2, v_3 .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج- أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .



في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين

$$(Δ) \text{ و } (D) \text{ معادلتيهما على الترتيب: } y = x \text{ و } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N}

$$\text{ب: } u_0 = 6 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

أ- أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية:

u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين $(Δ)$ و (D) .

ج- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \frac{2}{3}$.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، استنتج المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n) : أ- حسابية. ب- هندسية. ج- لا حسابية ولا هندسية.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي: أ- $+\infty$. ب- $-\frac{1}{2}$. ج- $-\infty$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$.

أ- $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ ب- $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$ ج- $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

التمرين [7] [باك 2011] [م] [4] [ن]

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$.

(1) أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب- أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n .

ج- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) متقاربة.

(2) نضع: $\alpha = \frac{3}{2}$.

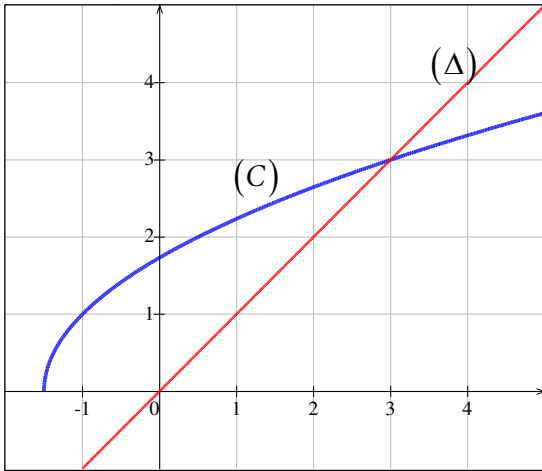
- أحسب بدلالة n ، المجموعين T_n و S_n حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

التمرين [8] [باك 2012] [م] [5] [ن]

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بعدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

(1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{2x+3}$ و (C) تمثيلها البياني

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (أنظر الشكل المقابل).



أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور

الفواصل الحدود التالية u_0, u_1, u_2 و u_3 .

(دون حسابها وموضعا خطوط الإنشاء)

ب- ضع تخمينا حول إتجاه تغير (u_n) وتقاربها .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

(3) أ- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [9] [باك 2012] [م] [4,5] [ن]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بعدها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما .

(3) برز لماذا (u_n) متقاربة .

(4) المتتالية (v_n) معرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدها الأول .

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$.

أكتب P_n بدلالة n ، ثم بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التدريب [10] [باك 2013] [م1] [ن4]

(I) المتتالية (v_n) معرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

- (1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- (2) أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

- (1) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$.
- (2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

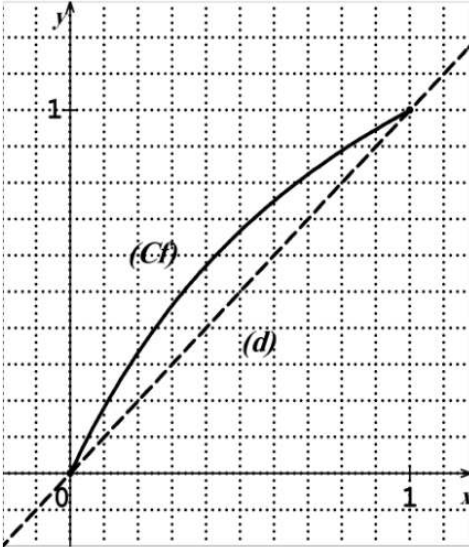
(3) أـ برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

بـ بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التدريب [11] [باك 2013] [م2] [ن4]

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; 1]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$



(1) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ $u_0 = \frac{1}{2}$ ،

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أـ أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزاً خطوط التمثيل.

بـ ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) أـ أثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 1]$

بـ برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

جـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

أـ برهن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0 .

بـ أحسب نهاية (v_n) .

التدريب [12] [باك 2014] [م1] [ن4]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 4$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على \mathbb{N} .

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $w_n = 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$

أبين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماماً على \mathbb{N} .

بـ أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$

(I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} بحددها العام: $u_n = e^{\frac{1}{2^n}}$ (هـ أساس اللوغاريتم النيبيري)

(1) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ (يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري).

(1) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

(2) أ- أحسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$.

(1) أحسب: u_1 ، u_2 ، u_3 .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$.

(3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$

أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج- بين أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2 + \ln 3)$

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

(1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

(2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة: $y = x$.

(3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$.

(II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على \mathbb{N} كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) أ- أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 ، v_0, v_1, v_2, v_3 دون حسابها.

ب- خمن اتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(2) أ- أثبت أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث: $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

ب- استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(3) أ- أثبت أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

ب- بين أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

ج- استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ، ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

التمرين [16] [إياك 2016] [الدورة الأولى] [م1] [ن 05]

(I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x+8}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) عين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي: $y = x$ معادلته له .

(3) أرسم (C) و (Δ) .

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها) موضحة خطوط الإنشاء .

(2) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربه .

(3) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.

د- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [17] [إياك 2016] [الدورة الأولى] [م2] [ن 4]

(I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{5x}{x+2}$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 3$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(2) (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعيين حدّها الأول .

ب- أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$.

التمرين [18] [إبـاك 2016] [الدورة الثانية] [م 1] [ن 05]

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; 4]$ بـ : $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$.

- (1) أـ بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .
بـ بين أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I .
- (2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بعدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$.
بـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .
جـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$.
- (3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$
أـ برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .
بـ أكتب v_n بدلالة n .
جـ استنتج أن : $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [19] [إبـاك 2016] [الدورة الثانية] [م 2] [ن 4,5]

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} بعدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

- (1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
- (2) أـ عبر بدلالة n عن الحد العام v_n .
بـ استنتج عبارة الحد u_n العام بدلالة n .
جـ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (3) أـ أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
بـ تحقق أن : $\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1-v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n .
جـ أحسب بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \dots + \frac{1}{u_n+2}$.

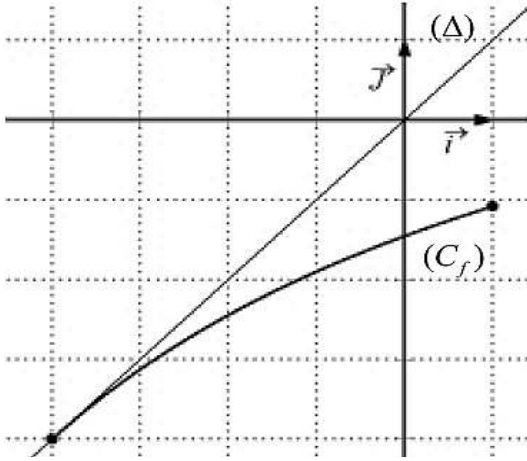
التمرين [20] [إبـاك 2017] [الدورة العادية] [م 1] [ن 4]

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} كما يلي :

$u_0 = \frac{1}{4}$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n+4}$ و $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$.

- (1) أـ برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.
بـ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .
- (2) أـ بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n .
بـ أثبت أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n+1}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [21] [يناير 2017] [الدورة العادية] [م 2] [ن 4]



- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و
 . الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$
 و (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$.
(I) تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$. ثم بين أن :
 من أجل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$

(II) (u_n) متتالية عددية معرفة بعدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

- (1) أُنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها.
 ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها
- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 \leq u_n \leq 0$ ،
 ثم بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .
- (3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$
 أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$.

التمرين [22] [يناير 2017] [الدورة الإستثنائية] [م 1] [ن 4]

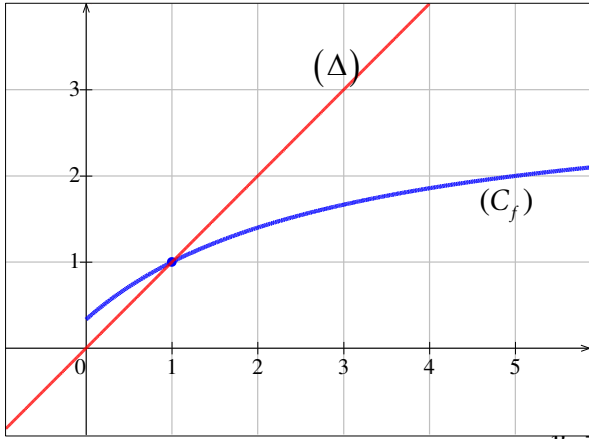
نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على \mathbb{N} كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

- (1) أحسب الحدين u_1 و v_1 .
- (2) أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.
 -- باستعمال البرهان بالتراجع بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما .
- (3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $w_n = u_n - v_n$
 برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n .
- (4) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

التمرين [23] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م 2] [ن 4]

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم



متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بحدها

الأول $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) عين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نضع في كل مايلي: $\alpha = 5$

(2) أُنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود

u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها.

بـ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربيها

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أـ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

بـ عبر بدلالة n عن u_n و v_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$

التمرين [24] [باك 2018] [م 1] [ن 4]

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ حيث $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

(1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

بـ بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على \mathbb{N} واستنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

أثبت أن (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

(3) عبر بدلالة n عن u_n و v_n ، وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

التمرين [25] [باك 2018] [م 2] [ن 4]

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

(1) أحسب كلا من u_1, u_2, u_3

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2n+1$

أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$

بـ استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) أحسب المجموعين S_n و T حيث: $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T = e^{u_{439}} + e^{u_{440}} + \dots + e^{u_{2018}}$

التعريف [26] [باك 2019] [م 1] [ن 4]

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}, \quad u_0 = 13 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n$$

(1) أ- برهن بالبرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

(2) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} ب : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(3) أكتب v_n بدلالة n ، ثم بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ وأحسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

$$(4) \text{ بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي } n, (u_1 - 1) \times (u_2 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$$

التعريف [27] [باك 2019] [م 2] [ن 4]

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[4; 7[$ ب : $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$.

(1) أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7[$.

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإن $f(x) \in [4; 7[$.

(2) برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإن $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$.

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإن $f(x) - x > 0$.

(3) المتتالية العددية المعرفة ب : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة .

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$.

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

التعريف [28] [باك 2020] [م 1] [ن 5]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي) ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$.

(1) نفرض أن : $\alpha = -4$.

برهن بالبرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -4$.

(2) نفرض أن : $\alpha \neq -4$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} ب : $v_n = u_n + 4$.

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

ب- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثم بين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

ج- نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

أحسب S_n بدلالة n و α ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
- (1) أحسب كلا من u_1 و u_2 ، ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ : $v_n = u_n - n + 1$.
 أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ، يطلب حساب حدتها الأول .
 ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
 ج- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
 أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + n^2 - n - 3)$.
 ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

“ The only way to learn mathematics is to do mathematics ”

كتابة: خالد مجاخشة

نشر يوم 2021/01/17