

❖ الأعداد المركبة ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول

ومنه:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

مجموعة حلول المعادلة (*) هي:

$$S = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \right\}$$

(2) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم تعيين قيم العدد الطبيعي n

بحيث يكون:

$$\left(\frac{z_A}{z_B} \right)^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

كتابة z_A على الشكل الأسّي:

$$z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z_A| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$|z_A| = 1$$

لتكن θ_A عمدة العدد المركب z_A حيث:

$$\begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\theta_A \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

ومنه:

$$z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

التمرين رقم 03

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{u}, \vec{v})$. A, B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب z_A, z_B و z_C حيث:

$$z_C = \overline{z_B} \text{ و } z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(يرمز بـ $\overline{z_B}$ لمرافق z_B).أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$\left(\frac{z_A}{z_B} \right)^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

(3) أ- تحقق أن: $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC .ب- استنتج أن B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة.(4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق:

$$|z| = \left| \overline{z} - \frac{\sqrt{3} + i}{2} \right|$$

عين طبيعة المجموعة (γ) ثم عين صورتها بالدوران r .

حل التمرين رقم 03

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \dots (*)$$

نحسب المميز Δ :

$$\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 = 3 - 4 = -1 = i^2$$

$$\Delta = i^2$$

❖ الأعداد المركبة ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول

حيث:

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

ومنه:

$$e^{i\frac{n\pi}{6}} = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\frac{n}{6} = \frac{1}{3} + 2k$$

$$n = 2 + 12k ; (k \in \mathbb{Z})$$

(3) أ- التحقق أن: $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وتحديد طبيعة المثلث OBC:

$$\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ التحقق أن:}$$

$$\frac{z_B}{z_C} = \frac{z_B}{z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

تحديد طبيعة المثلث OBC:

لدينا:

$$\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} = z_A$$

ونكتب:

$$\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = z_A$$

حسب خواص الطويلة نكتب:

$$\left| \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} \right| = |z_A|$$

$$\left| \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} \right| = 1$$

$$|z_B - z_O| = |z_C - z_O|$$

$$OB = OC \dots \textcircled{1}$$

كتابة z_B على الشكل الأسّي:

$$z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$|z_B| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$|z_B| = 1$$

لتكن θ_B عمدة العدد المركب z_B حيث:

$$\begin{cases} \cos \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\theta_B \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

ومنه:

$$z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

لدينا:

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

بالتعويض نكتب:

$$\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$(e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}})^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$(e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{6}})^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$(e^{i\frac{\pi}{6}})^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{i\frac{n\pi}{6}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

❖ الأعداد المركبة ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول

$$|z| = |\bar{z} - z_B|$$

$$|\bar{z}| = |\bar{\bar{z}} - \bar{z}_B|$$

$$|z| = |z - z_C|$$

$$|z - z_O| = |z - z_C|$$

تذكر أن:

$$|\bar{\bar{z}}| = |z| \text{ و } |\bar{z}| = |z|$$

ونكتب:

$$OM = CM$$

ومنه:

المجموعة (γ) هي محور القطعة $[OC]$.تعيين (γ') صورة (γ) بالدوران r :

بما أن:

- صورة النقطة O بالدوران r هي النقطة O (نقطة صامدة).- صورة النقطة C بالدوران r هي النقطة B .

فإن:

صورة المجموعة (γ) بالدوران r هي المجموعة (γ') محور القطعة $[OB]$.

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عالم الحيد

حسب خواص العمدة نكتب:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right) = \arg(z_A)$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \dots \textcircled{2}$$

من ① و ②: المثلث OBC متقايس الأضلاع.ب- استنتاج أن B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة:

لدينا:

$$\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه:

$$z_B - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_O)$$

هذه الكتابة هي الصيغة المختصرة للدوران r (لأن: $|z_A| = 1$) الذيمركزه المبدأ O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ (لأن: $\arg(z_A) = \frac{\pi}{3}$) ويحول النقطة C إلىالنقطة B .

نستنتج أن:

 B هي صورة C بدوران r مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) ثم تعيين صورتها بالدوران r :تعيين طبيعة المجموعة (γ) :

لدينا:

$$|z| = \left| \bar{z} - \frac{\sqrt{3} + i}{2} \right|$$

$$|z| = \left| \bar{z} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \right|$$

$$|z| = |\bar{z} - z_B|$$

$$|z| = |\bar{z} - z_B|$$

حسب خواص الطويلة نكتب: