

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ بين أن:

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحني (C_f) .

(4) بين أن ω نقطة تقاطع مقاربي المنحني (C_f) تنتمي إلى (C_f) .

(5) اكتب معادلة للمماس (T) عند المبدأ.

(6) مثل بيانياً كلا من (D) ، (T) و (C_f)

(7) m وسيط حقيقي حيث: $m > 0$.

ناقش بيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) حيث:

$$x - \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{me^x + 2m}\right) = 0 \dots (E)$$

(1) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(\frac{2 \overbrace{e^{2x}}^0 + 1}{\underbrace{e^x}_0 + 2} \right) \right] \\ &= \ln \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= -\ln 2 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = -\ln 2$

ب/ تبين أن: $f(x) = x + \ln 2 + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{2e^{2x} \left(1 + \frac{1}{2e^{2x}} \right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)} \right) \\ &= \ln \left(\frac{2e^{2x}}{e^x} \right) + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2e^{2x}}}{1 + \frac{2}{e^x}} \right) \\ &= \ln(2e^x) + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right) \\ &= \ln 2 + x + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right) \end{aligned}$$

ج/ استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln 2 + \underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)}_0 \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

- دراسة $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\frac{4e^{2x}(e^x + 2) - e^x(2e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)^2} \right)}{\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right)} \\
&= \frac{4e^{2x}(e^x + 2) - e^x(2e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)} \\
&= \frac{4e^{3x} + 8e^{2x} - 2e^{3x} - e^x}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)} \\
&= \frac{e^x(2e^{2x} + 8e^x - 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)}
\end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{cases}
e^x > 0 \\
e^x + 2 > 0 \\
2e^{2x} + 1 > 0
\end{cases}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^{2x} + 8e^x - 1)$:

$$2e^{2x} + 8e^x - 1 = 0$$

نضع $e^x = t$ أي $x = \ln t$

فنجد:

$$2t^2 + 8t - 1 = 0$$

لدينا:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(2)(-1) = 72 = (6\sqrt{2})^2$$

لدينا: $\Delta > 0$ ومنه:

$$t_1 = \frac{-8 + 6\sqrt{2}}{4} = -2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$t_2 = \frac{-8 - 6\sqrt{2}}{4} = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ln t_1 = \ln \left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right) \\ x_2 = \ln t_2 \text{ (غير ممكن) } \end{cases}$$

ولدينا أيضا $f(0) = 0$ ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$\ln\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\ln 2$	$f\left(\ln\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right)$	0	$+\infty$

(3) أ/ تبين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته:

إذا استطعنا كتابة عبارة دالة f على الشكل:

$$f(x) = y + \varphi(x)$$

حيث:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\varphi(x)] = 0$$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته y



لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right) \\ &= x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) \\ &= y + \varphi(x) \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) \\ y = x + \ln 2 \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} = 1 \\ &\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}e^{-2x} = 1 + 2e^{-x} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} = 0 \\ &\Rightarrow e^{-x} \left(\frac{1}{2}e^{-x} - 2 \right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} - 2 = 0 \\ &\Rightarrow e^{-x} = 4 \\ &\Rightarrow -x = \ln 4 \\ &\Rightarrow x = -\ln 4 \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} x &> -\ln 4 \\ &\Rightarrow -x < \ln 4 \\ &\Rightarrow e^{-x} < 4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} < 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} - 2 < 0 \\ &\Rightarrow e^{-x} \left(\frac{1}{2}e^{-x} - 2 \right) < 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} + 1 < 2e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

لدينا: $2e^{-x} + 1 > 0$ يمكن القسمة عليه

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1} < 1 \\ &\Rightarrow \ln \left(\frac{\frac{1}{2}e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1} \right) < 0 \end{aligned}$$

ومنه لما $x > -\ln 4$: $f(x) - y < 0$

بنفس الطريقة نجد أنه لما $x < -\ln 4$: $f(x) - y > 0$

ومنه:

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما $x \in]-\infty; -\ln 4[$.
- (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الاحداثيات: $(-\ln 4; -\ln 2)$.
- (C_f) تحت (D) لما $x \in]-\ln 4; +\infty[$.

4) تبين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) تنتمي إليه - أي إلى (C_f) -

نحدد أولاً نقطة تقاطع المستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مع المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = -\ln 2$.

لدينا:

$$\begin{cases} y = x + \ln 2 \\ y = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \ln 2 = -\ln 4 \\ y = -\ln 2 \end{cases}$$

ومنه نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي $\omega(-\ln 4; -\ln 2)$

ولدينا: $f(-\ln 4) = -\ln 2$ ومنه $\omega \in (C_f)$

5) كتابة معادلة للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ &= x \end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مماس للمنحني (C_f) عند المبدأ.

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- **نرسم المستقيم المقارب العمودي: $y = -\ln 2$**
- **نرسم المستقيم المقارب المائل (D)**
- **نعين ω نقطة تقاطع المستقيمتين المقاربتين.**
- **نرسم المماس (T) .**
- **ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)**



(7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 x - \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{me^x + 2m}\right) &= 0 \\
 \Rightarrow x &= \ln\left(\frac{1}{m} \frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right) \\
 \Rightarrow x &= \ln\left(\frac{1}{m}\right) + \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right) \\
 \Rightarrow x &= -\ln m + f(x) \\
 \Rightarrow f(x) &= x + \ln m
 \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m = x + \ln m$$

ومنه:

المعادلة لا تقبل حلول	$m < 1$	أي	$\ln m < 0$	لما
للمعادلة حل مضاعف	$m = 1$	أي	$\ln m = 0$	لما

لما $0 < \ln m < \ln 2$ أي $1 < m < 2$ للمعادلة حلان
لما $\ln m = \ln 2$ أي $m = 2$ للمعادلة حل مضاعف
لما $\ln m > \ln 2$ أي $m > 2$ للمعادلة حل وحيد

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶