الخليل للرياضيات

سنة ثالثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | تقني رياضي | رياضيات

مسائل [22 مسألة]

في الدوال اللوغارتمية

$\ln x$

مرفقة بحلول مفصلة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[21 ديسمبر 2021]

المسائل:

فهرس المحتويات:

بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا

المسـألة رقم: 01

مشاهـــدة الحـــل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g

❷ احسب $g(0)$ ، ثمّ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

❸ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

❹ بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

❺ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها

❻ مثل بيانيا المنحنى (C_f)

المسألة رقم: 02

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = x\ln x - x - 1$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$ حيث: $3.5 < \alpha < 3.6$

❸ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

❶ احسب نهايات الدالة f ، ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا

❷

أ/ بيّن أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ب/ استنتج تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها

❸ اثبت أنّ $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$

❹ اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

❺ مثّل بيانيا كلا من (T) و (C_f)

III) نعتبر المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة $y = mx + \frac{3}{2}$

❶ بيّن أنّ المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة، يطلب تعيين إحداثييها

❷ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$f(x) = y_{(\Delta_m)}$$

IV) لتكن الدالة h المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{x}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

❶ تحقق أنّ $h(x) + 1 = f(x-1)$

❷ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة تحويل نقطي يطلب تعيينه

03 المسألة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln|x|}+x & ;\ x\in\mathbb{R}_-^*-\{-1\}\\ \dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{2(\ln x)^2} & ;\ x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$ ، فسر النتيجة هندسيا.

❷ ادرس تغيرات الدالة f .

❸

أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_-^*-\{-1\}$.

❹ حل المعادلة: $f(x)=0$ في المجال $\mathbb{R}_+^*-\{1\}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

❺ بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $\left]-2;-\frac{3}{4}\right[$.

❻ مثل بيانيا (Δ) و المنحنى (C_f) .

❼ نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$f(x)=-(m^2-e)\ldots(E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد واشارة حلول المعادلة (E) .

المسألة رقم: 04

مشاهدة الحل

I) g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=-x^2-2+2\ln x$$

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$

ب/ علما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^n}\right)=0$ ، بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

❸ احسب $g(1)$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=-x+5-2\frac{\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶

أ/ احسب نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

❷

أ/ برهن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+5$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f)

❸

أ/ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $4.3<\alpha<4.4$

ب/ برّر أنّ $\ln\alpha=\frac{-\alpha^2+5\alpha}{2}$

❹ بيّن أنه يوجد مماس (T) لـ (C_f) يوازي (Δ)، ثم اكتب معادلة له

❺ ارسم كل من (Δ)، (T) و (C_f)

❻ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $(5-m)x-2\ln x=0$

الخليل للرياضيات

المســألة رقم: 05

مشاهـــدة الحـــل

I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		$\dots$		$\dots$	1		$\sqrt{3}$	$\dots$
$f'(x)$		$\dots$	0	$\dots$		‖	$\dots$	0	$+$
$f(x)$			$-\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$	$\searrow$	$-\infty$	‖	$\nearrow$	$\dots$	$+\infty$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶ علما أن الدالة f فردية:

أ/ عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب/ بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=-\infty$ وأنّ: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}[f(x)]=+\infty$ وأنّ $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$

ج/ أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.

❷ نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$.

• مثّل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحنى (C_f) . نأخذ: $f(\sqrt{3})\cong 3$ و $(\sqrt{3})\cong 1.7$

❸ نفرض أن عبارة الدالة f هي من الشكل:

$$f(x)=ax+b+\ln\left(c+\frac{2}{x-1}\right)$$

حيث: c,b,a أعداد حقيقية.

- باستعمال نتائج الجدول أعلاه، بيّن أنّ : $a=1$ ، $b=0$ و $c=1$.

❹ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$x-\frac{e^m+e^x}{e^m-e^x}=0\;\dots(E)$$

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\ln\big(f(x)\big)$$

• ادرس تغيرات الدالة g

المسألة رقم: 06

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=-3-\ln x+\frac{1}{x}$$

1. احسب نهاية الدالة g عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.
2. ادرس تغيرات الدالة g على $]0;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها.
3.

أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$

ب/ تحقق أنّ $0.45<\alpha<0.46$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=e^{-x}(3+\ln x)$$

و نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1. احسب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$، ثم فسر النتائج هندسيا.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها
3. بيّن أنّ $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha e^{\alpha}}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
4. حل المعادلة $f(x)=0$، ثم فسر النتيجة هندسيا
5. أنشئ المنحنى (C_f)

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$h(x)=\frac{|3+\ln x|}{e^{x}}$$

1. اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة
2. أنشئ المنحنى الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق (C_h)

المسألة رقم: 07

مشاهدة الحل

ا) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)]$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$.

❷

أ/ بيّن أن لكل x من المجال $]0;1]$ $(x-1)+\ln x\le 0$ وأن لكل x من المجال $[1;+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$.

ب/ بيّن أنه من أجل كل من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

❸ ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ والمنحنى (C_f) .

❹ عين احداثيي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (D) ، ثم اكتب معادلة المستقيم (T) .

❺

أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها.

❻ مثل بيانيا كلا من (D) ، (T) و (C_f) .

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$f(x)=x-2m$$

المسألة رقم: 08

مشاهدة الحل

I) لتكن الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$$

❶ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❸

أ/ احسب $g(0)$.

ب/ بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72<\alpha<-0.71$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال: $D_f=]-1;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا.

❷

أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❸ بيّن أن:

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

ثم أعط حصر للعدد $f(\alpha)$ بالتدوير إلى 10^{-2} .

❹ مثل بيانيا (C_f)

❺ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد واشارة حلول المعادلة (E) حيث: $m>0$.

$$f(x)=\ln m\ ...(E)$$

المسـألة رقم: 09

مشاهـــدة الحـــل

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.34 < \alpha < -0.33$.

❸ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶

أ/ بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين هندسيا.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

ج/ ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها.

د/ ارسم المنحنى (C_f) . (نقبل أنّ $f(\alpha) \approx 3.16$).

❷ نعتبر الدالة k المعرفة على $]-1;1[$ بـ:

$$k(x) = f(-|x|)$$

(C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ/ بين أن الدالة k زوجية.

ب/ بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ، ثم ارسمه. (دون دراسة تغيرات الدالة k).

ج/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $k(x) = m$.

10 المســألة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=\ln x+x-3$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g .

❷ بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.2<\alpha<2.21$.

❸ عين إشارة $g(x)$ على المجال : $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶ احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}[f(x)]$.

❷

أ/ احسب $f'(x)$ ، ثم ادرس اشارتها.

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

❸ عين دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

❹ بين أن:

$$f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

❺ حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

❻ بأخذ: $f(\alpha)\cong-0.66$ ، مثل بيانيا (C_f)

الخليل للرياضيات

11 المسـألة رقم:

مشاهـدة الحـل

I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=2\ln x-1-\frac{1}{x^2}$$

❶ بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

❷

أ/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.89<\alpha<1.9$

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $g(x)$

II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=-x-2+\frac{3+2\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷

أ/ بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ب/ بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$. ثم شكل جدول تغيرتها

❸

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x-2)]$ ، ثم استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❹

أ/ بين أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1

ب/ اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة A

❺ ارسم (T)، (Δ) و (C_f) (نأخذ: $\frac{1}{\alpha}\approx 0.53$ و $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0.73$).

III) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$h(x)=|x|+2-\frac{3+\ln(x^2)}{|x|}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

❶ بيّن أنّ الدالة h زوجية.

❷ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $h(x)=-f(x)$

❸ اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

المسـألة رقم: 12

مشاهـــدة الحــل

I) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto \ln x$ في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

A نقطة من (C) فاصلتها m حيث m عد حقيقي موجب تماما

و (T_m) مماس لـ (C) في النقطة A

1

أ/ اثبت أنّ $y = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m$ معادلة المماس (T_m).

ب/ تحقق أنّ المماس (T_e) للمنحنى (C) في النقطة $B(e;1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم

2 لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m - \ln x$$

أ/ ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$

3 استنتج مما سبق أن (C) يقع تحت أي مماس له

II)

1

أ/ استنتج أنه من أجل كل عددين حقيقين موجبين تماما m و x يكون:

$$\ln x \leq \ln m + \frac{x-m}{m}$$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m يكون:

$$\ln(m+1) - \ln m \leq \frac{1}{m}$$

III) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

1

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما صحة المتباينة $\ln x \leq x - 1$.

2

أ/ اثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا: $\ln(t+1) \leq t$

ب/ بوضع $x = \frac{1}{t+1}$، اثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا: $\frac{t}{1+t} \leq \ln(t+1)$

ج/ استنتج أنه من أجل $t > -1$ صحة المتباينة $\frac{t}{1+t} \leq \ln(t+1) \leq t$

المسـألة رقم: 13

مشاهـــدة الحـــل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1+x^2+\ln x$

❶ ادرس تغيرات الدالة g .

❷ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32<\alpha<0.33$.

❸ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=-x+\frac{2+\ln x}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶ احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

❷ بين أنه من أجل كل x من D_f:

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

❸ بين أن: $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

❹

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

❺ اثبت أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها.

❻ مثل بيانيا كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) و (C_f) . علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين x_0 و x_1 حيث:

$0.1<x_0<0.2$ وَ $1.5<x_1<1.6$

III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$h(x)=-x+1+\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في المستوي السابق

❶

أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال D_h : $h(x)=f(x+1)+2$

ب/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

❷ بين أن المنحنى (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه، ثم أنشئه

❸ m وسيط حقيقي غير معدوم، (T_m) مستقيم معادلته: $y=\ln(|m|)\,x+1$

أ/ برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية: $h(x)=\ln(|m|)\,x+1 \ldots (E)$

المسـألة رقم: 14

مشاهـــدة الحـــل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=(\ln x)^3+1$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g .

❷ حل المعادلة $g(x)=0$.

❸ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=(\ln x)^2+1-\frac{2}{\ln x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

❷ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون:

$$f'(x)=2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

❸ استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=(\ln x)^2+1$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶ ادرس تغيرات الدالة h .

❷ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

❸ ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) .

❹ بين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف يُطلب احداثييها .

❺ اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

❻ احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

❼ مثّل بيانيا في نفس المعلم كلا من (C_f) ، (C_h) و (T) .

❽ نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m(\ln x)^3+e^m(\ln x)-\ln x-2e^m=0\ ...(E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

المسألة رقم: 15

مشاهدة الحل

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ بـ:

$$f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ >}} f(x)$.

❷ بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I، ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ عين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

❹

أ/ أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x) = \ln(x + a) + b$$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب/ استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغارتمية النيبيرية، ثم ارسم (C) و (C_f) .

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$.

❶ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ >}} g(x)$ ، ثم بين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة g على I، ثم شكل جدول تغيراتها.

❸

أ/ احسب $g(1)$، ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ حلا وحيدا α، ثم تحقق أنّ $2 < \alpha < 3$.

ب/ ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2}; 5\right]$ في المعلم السابق.

❹ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d).

❺ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; \alpha[$ فإنّ $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1; \alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$$u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

❶ عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$$

❷ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

المسألة رقم: 16

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{(lnx)^2}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ ، ثم بين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ مبينا المستقيبات المقاربة لـ (C_f) .

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❷ m عدد حقيقي موجب تماما. ولتكن النقط A_m ذوات الفاصلة m ، والمستقيم (T_m) مماس (C_f) في النقط A_m .

أ/ اكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m) .

ب/ عين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0;0)$.

ج/ اكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها.

❸ مثّل بيانيا المستقيمات (T_m) و (C_f) .

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{(ln|x|)^2}{x}$$

❶ بيّن أن الدالة g فردية.

❷ بيّن أنه يمكن رسم (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه.

الخليل للرياضيات

المســألة رقم: 17

مشاهـــدة الحـــل

I) الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = -1 + x + 2\ln x$$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة g.

❷ احسب $g(1)$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

II) الدالة العددية f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{-1 + (x-2)\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷

أ/ بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب/ عيّن اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة: $x \longmapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - \ln x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ).

❹ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β، ثم تحقق أنّ:

$0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$

❺ ارسم (Γ) ثم (C_f)

الخليل للرياضيات

المسـألة رقم: 18

مشاهـــدة الحـــل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ بين أن:

$$f(x)=x+\ln 2+\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$.

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❸

أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) و المنحنى (C_f) .

❹ بين أن ω نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f) .

❺ اكتب معادلة للمماس (T) عند المبدأ.

❻ مثل بيانيا كلا من (D) ، (T) و (C_f)

❼ m وسيط حقيقي حيث: $m>0$.

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) حيث:

$$x-\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{me^{x}+2m}\right)=0\ ...(E)$$

المسألة رقم: 19

مشاهدة الحل

I) g الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=(x+1)(x+e)-e(x\ln x)$$

- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\ln(x+1)+\frac{e\ln x}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، ثم بين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ اكتب معادلة للمماس (T) منحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

❸

أ/ بين أنّ المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α

ب/ تحقق أنّ $0.7<\alpha<0.8$.

❹ (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة $x\longmapsto \ln(x+1)$ على المجال $[0;+\infty[$

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln(x+1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب/ ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ).

ج/ ارسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f) .

❺ m وسيط حقيقي، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=\frac{1+e}{2}x-m$ حلين متمايزين.

المسألة رقم: 20

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x^2-2+\ln x$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g .

❷

أ/ بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

ب/ تحقق من أن $1.31<\alpha<1.32$

❸ استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

❷ بين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

❸ شكل جدول تغيرات الدالة f .

❹ بين أن: $f(\alpha)=\alpha^2(1+\alpha^2)$

❺ استنتج إشارة $f(x)$ على المجال: $]0;+\infty[$.

III) نسمي (C_h) التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$h(x)=\ln x$$

ولتكن النقطة A ذات الاحداثيات $(0;2)$. و M نقطة من المنحنى (C_h) فاصلتها x_m .

❶ بين أن المسافة AM تُعطى بـ:

$$AM=\sqrt{f(x)}$$

❷ نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$k(x)=\sqrt{f(x)}$$

أ/ برهن أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ برهن أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) ، يُطلب تعيين احداثييها.

ج/ برهن أن: $AB=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$

❸ هل المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (C_h) في النقطة B ؟ برر اجابتك.

21 المسـألة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;1[$ بـ: $g(x)=2-x+\ln x$

❶

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;1[$.

ب/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.15<\alpha<0.16$.

❷ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;1[$.

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

❶ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=\frac{1-2x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-1}$)

ثم فسر النتيجتين بيانيا

❷

أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

ب/ بين أنّ الدالة f متزايدة تماما على $\left]1;\frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2$.

❹ ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) ، (يُعطى $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\approx-1.8$).

❺ عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)|=m$ حلين متمايزين.

الخليل للرياضيات

المسألة رقم: 22

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على D حيث: $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ بين أن الدالة f فردية، ثم فسر ذلك بيانيا.

❷ احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ثم استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور التراتيب.

❸

أ/ بين أنه من أجل كل x من D:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$.

❹ بين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

❺ انشىء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

❻ m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$(2 - 3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

الحلول (مقترحة) :

فهرس المحتويات:

♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

حل المسـألة رقم: 01

مشاهـــدة المسألة

I)

❶ دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

• $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} [g(x)] = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)] = +\infty$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1}$$
$$= \frac{(2x+2)(x+1)+1}{x+1}$$
$$= \frac{2x^2+2x+2x+2+1}{x+1}$$
$$= \frac{2x^2+4x+3}{x+1}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

- جدول التغيرات:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❷ حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

- استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نجد:

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II)

❶ حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

• $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} [f(x)] = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\underbrace{x}_{-1} - \frac{\overbrace{\ln(x+1)}^{-\infty}}{\underbrace{x+1}_{0^+}} \right] = +\infty$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته

$$x = -1$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$

لأنّ:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln(u)}{u^n} \right] = 0$$

❷ تبيين أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل بجوار $+\infty$.

❸ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا:

$$-\ln(x+1) = 0 \Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^0$$
$$\Rightarrow x + 1 = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	

• المنحنى (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1; 0[$.

• المنحنى (C_f) يقطع (Δ) في $O(0;0)$.

• المنحنى (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$.

❹ تبيين أنه: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 1 + 2x - 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

❺ تبيين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

$$f''(x) = \frac{\left(2x+2+\frac{1}{x+1}\right)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x+\ln(x+1))}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{\left(2(x+1)+\frac{1}{x+1}\right)(x+1) - 2(x^2+2x+\ln(x+1))}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{2(x+1)^2+1-2x^2+4x+2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{3-2\,ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

لدينا: $(x+1)^3 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

$$3-2\,ln(x+1)=0 \Rightarrow 2ln(x+1)=3$$

$$\Rightarrow \ln(x+1)=\frac{3}{2}$$

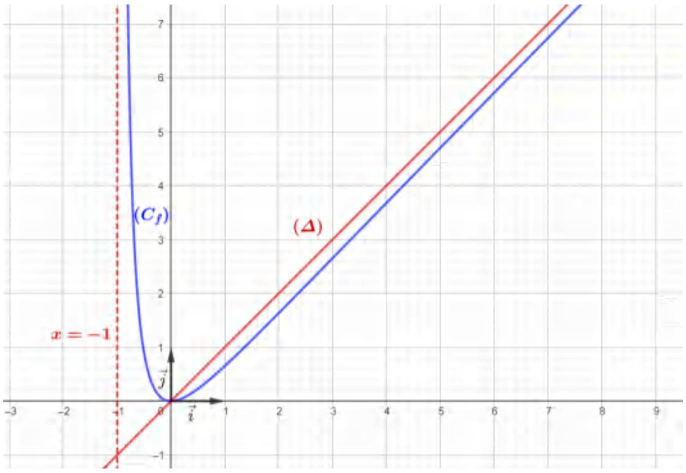
$$\Rightarrow x+1=e^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}-1$$

لدينا الدالة f'' تنعدم وتغير اشارتها، ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $\left(e^{\frac{3}{2}}-1\right)$

❻ التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x=-1$
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



ا)

❶ دراسة تغيرات الدالة g:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\ln x - 1 - \frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left[\underbrace{x\ln x}_{0} - x - 1\right] = -1$$

- المشتقة:

$$g'(x) = \ln x + \frac{1}{x}x - 1 = \ln x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة مستمرة ورتيبة على المجال $]3.5; 3.6[$

ولدينا: $g(3.5) \times g(3.6) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3.5; 3.6[$

❸ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

اا)

❶ حساب نهايات الدالة f :

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\overbrace{\frac{\ln x}{x}}^{0}}{1+\frac{1}{x}}\right) = 1$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته

$y = 1$

$$\bullet \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

❷

أ/ تبيين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{\frac{x+1-x\ln x}{x}}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-x-1+x\ln x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f:

لدينا: $x(x+1)^2 > 0$ على المجال $]0; +\infty[$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول التغيرات:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1

❸ اثبات أنّ $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha\ln\alpha - \alpha - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha\ln\alpha = \alpha + 1 \\ &\Rightarrow \ln\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 1 - \frac{\ln\alpha}{\alpha+1} \\ &= 1 - \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\alpha+1} \\ &= 1 - \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

- استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$:

الخليل للرياضيات

لدينا: $3.5 < \alpha < 3.6$

ومنه: $\frac{1}{3.6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3.5}$

ومنه: $-\frac{1}{3.5} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{3.6}$

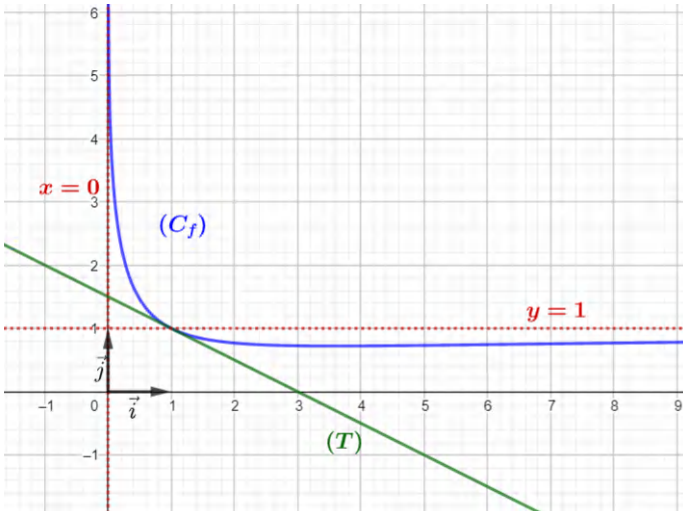
ومنه: $1-\frac{1}{3.5} < 1-\frac{1}{\alpha} < 1-\frac{1}{3.6}$

إذن: $0.71 < f(\alpha) < 0.72$

❹ كتابة معادلة المماس (T) :

$$\begin{aligned}(T): y &= f'(1)(x-1)+f(1)\\ &= -\frac{1}{2}(x-1)+1\\ &= -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

❺ التمثيل البياني:



III)

❸ تبيين أنّ المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة:

لدينا:

$$y_m = mx+\frac{3}{2}$$

نأخذ $m=0$ نجد: $y_0=\frac{3}{2}$

إذن المستقيمات (Δ_m) تمر من الترتيبة $\frac{3}{2}$

نأخذ $m=1$ نجد: $y_1 = x+\frac{3}{2}$

لدينا:

$$y_1 = y_3 \Rightarrow x+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=0$$

إذن المستقيمات (Δ_m) تمر من الفاصلة 0

ومنه المستقيمات (Δ_m) تمر بنقطة ثابتة $A\left(0;\frac{3}{2}\right)$

❹ المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x)=y_{(\Delta_m)}$:

لما $m<-\frac{1}{2}$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m=-\frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا $x_0=1$

لما $-\frac{1}{2}<m<0$ المعادلة تقبل حلين

لما $m\geq 0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

IV)

❶ التحقق أنّ $h(x)+1=f(x-1)$:

$$h(x)+1 = 1-\frac{\ln(x-1)}{x} = f(x-1)$$

❷ استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) :

لدينا: $h(x)+1=f(x-1)$

ومنه: $h(x)=f(x-1)-1$

إذن: (C_h) هو صورة (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث:

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

حل المسألة رقم: 03

مشاهدة المسألة

❶ دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$:

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{\frac{1}{\ln|x|}+x-0}{x-0}\right]$$
$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{1}{x\ln|x|}+\frac{x}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{1}{x\ln(-x)}+1\right]$$
$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{-1}{-x\ln(-x)}+1\right]$$
$$=-\infty$$

لأنّ: $\lim_{x\overset{<}{\to}0}[-x\ln(-x)\,]=0^+$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ من اليسار

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2(\ln x)^2}-0}{x-0}\right]$$
$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{2x(\ln x)^2}\right]$$
$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{1}{x\ln x}\left(1-\frac{1}{2\ln x}\right)\right]$$
$$=+\infty$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ من اليمين

- التفسير الهندسي:

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ ومنه (C_f) يقبل مماس عمودي معادلته $x=0$

❷ دراسة تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

- $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{\ln(-x)}+x\right]=-\infty$
- $\lim_{x\overset{<}{\to}-1}[f(x)]=\lim_{x\overset{<}{\to}-1}\left[\frac{1}{\ln(-x)}+x\right]=+\infty$
- $\lim_{x\overset{>}{\to}-1}[f(x)]=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\left[\frac{1}{\ln(-x)}+x\right]=-\infty$
- $\lim_{x\overset{<}{\to}1}[f(x)]=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2(\ln x)^2}\right]=-\infty$
- $\lim_{x\overset{>}{\to}1}[f(x)]=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2(\ln x)^2}\right]=-\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2(\ln x)^2}\right]=0$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x=-1$ بجوار $\pm\infty$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x=1$ بجوار $-\infty$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $y=0$ بجوار $+\infty$

- حساب $f'(x)$:

لمّا $x\in\mathbb{R}_-^*-\{-1\}$:

$$f'(x)=\frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)}{(\ln(-x))^2}+1$$
$$=\frac{-1}{x(\ln(-x))^2}+1$$

لاحظ أنّ $x<0$ ومنه: $f'(x)>0$

اذن:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0	
$f'(x)$	$+$	$+$

لمّا $x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$:

$$f'(x)=-\left(\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right)-\left(-\frac{4\left(\frac{1}{x}\right)\ln x}{4(\ln x)^4}\right)$$
$$=-\frac{1}{x(\ln x)^2}+\frac{1}{x(\ln x)^4}$$
$$=\frac{-\ln x+1}{x(\ln x)^3}$$
$$=\frac{-\ln x+1}{[x(\ln x)^2]\ln x}$$

لدينا: $x(\ln x)^2>0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $\frac{-\ln x+1}{\ln x}$:

لدينا:

$$\ln x=0\Rightarrow x=1$$

ولدينا:

$$-\ln x+1=0\Rightarrow \ln x=1$$
$$\Rightarrow x=e$$

x	0 $\quad$ 1	e	$+\infty$
$-\ln x+1$	$+$	$+$ $\quad$ 0	$-$
$\ln x$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$ $\quad$ 0	$-$

- جدول التغيرات:

الخليل للرياضيات

x	$-\infty$		-1		0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

❸

أ/ تبيين أن (C_f) يقبل (Δ) كمقارب مائل بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{1}{\ln(-x)}-x\right]=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $\mathbb{R}_-^* - \{-1\}$:

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y=\frac{1}{\ln(-x)}$$

لدينا:

$$\ln(-x)=0 \Rightarrow -x=e^0$$
$$\Rightarrow -x=0$$
$$\Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$		-1		0
$f(x)-y$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$

- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in]-\infty;-1[$.
- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in]-1;0[$.

❹ حل المعادلة: $f(x)=0$ في المجال $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2(\ln x)^2}=0 \Rightarrow \frac{2\ln x-1}{2(\ln x)^2}=0$$

لدينا: $2(\ln x)^2>0$ ومنه:

$$2\ln x-1=0 \Rightarrow 2\ln x=1$$
$$\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow x=\sqrt{e}$$

- الاستنتاج:

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$

❺ تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1.77;-1.76[$

و لدينا: $f(-1.77)=-0.01$ و $f(-1.76)=0.008$

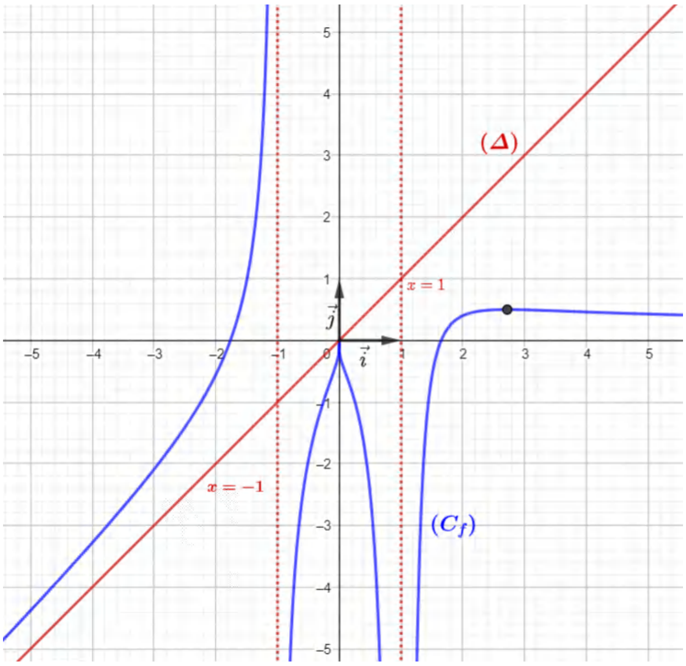
أي: $f(-1.77)\times f(-1.76)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا في المجال $]-1.77;-1.76[$

❻ التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=-1$ و $x=1$ و $y=0$
- نعين نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ)
- ثُمّ باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



❼ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=-(m^2-e)$

- لما $-(m^2-e)<0$

أي لما $m^2-e>0$

أي لما $m^2>e$

أي لما $|m|>\sqrt{e}$

أي لما $m\in]-\infty;-\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e};+\infty[$

المعادلة تقبل حلين موجبين وحلين سالبين.

- لما $-(m^2-e)=0$

أي لما $m^2-e=0$

أي لما $m^2=e$

أي لما $|m|=\sqrt{e}$

أي لما $m\in\{-\sqrt{e};\sqrt{e}\}$

المعادلة تقبل حل موجب وحل معدوم وحل سالب .

- لما $0<-(m^2-e)<\frac{1}{2}$

أي لما $-\frac{1}{2}<m^2-e<0$

أي لما $e-\frac{1}{2}<m^2<e$

أي لما $\sqrt{e-\frac{1}{2}}<|m|<\sqrt{e}$

أي لما $|m|<\sqrt{e}$ و $|m|>\sqrt{e-\frac{1}{2}}$

أي لما $-\sqrt{e}<m<\sqrt{e}$

و $m\in\left]-\infty;-\sqrt{e-\frac{1}{2}}\right[\cup\left]\sqrt{e-\frac{1}{2}};+\infty\right[$

أي لما: $m\in\left]-\sqrt{e-\frac{1}{2}};-\sqrt{e}\right[\cup\left]\sqrt{e};\sqrt{e+\frac{1}{2}}\right[$

المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

• لما $-(m^2-e)=\frac{1}{2}$

أي لما: $m^2-e=-\frac{1}{2}$

أي لما: $m^2=e-\frac{1}{2}$ أي $|m|=\sqrt{e-\frac{1}{2}}$

أي لما: $m=\sqrt{e-\frac{1}{2}}$ و $m=-\sqrt{e-\frac{1}{2}}$

المعادلة تقبل حل مضاعف وحل سالب

• لما $-(m^2-e)>\frac{1}{2}$

أي لما: $m^2-e<-\frac{1}{2}$

أي لما: $m^2<e-\frac{1}{2}$

أي لما: $|m|<\sqrt{e-\frac{1}{2}}$

أي لما: $-\sqrt{e-\frac{1}{2}}<m<\sqrt{e-\frac{1}{2}}$

أي لما: $m\in\left]-\sqrt{e-\frac{1}{2}};\sqrt{e-\frac{1}{2}}\right[$

المعادلة تقبل حل وحيد سالب

حل المسألة رقم: 04

مشاهدة المسألة

I)

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$:

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = -\infty$

ب/ تبيين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\underbrace{x^2}_{+\infty}\left(-1-\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{0}+2\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{0}\right)\right]$

$= -\infty$

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة g:

لدينا:

$$g'(x) = -2x + \frac{2}{x}$$
$$= \frac{-2x^2+2}{x}$$
$$= \frac{2(1-x^2)}{x}$$

لدينا: $x > 0$ لما $x \in D_g$، إذن الإشارة من البسط

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$x = -1$ مرفوض لأنه خارج المجال D_g ، إذن:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

❸ حساب $g(1)$، ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$:

$$g(1) = -3$$

لدينا الدالة g تبلغ قيمة حدية عظيمة عند $(1;-3)$

إذن الدالة g سالبة تماما على $\mathbb{R}_+^*$

II)

❶

أ/ حساب نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$:

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(-x+5-2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{-\infty}\right) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = -1 - 2\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2-2+2\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

❷

أ/ برهان أنّ (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x + 5) = \lim_{x\to+\infty}\left[-2\frac{\ln x}{x}\right] = 0$$

إذن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{-2\ln x}{x}$$

لدينا: $x > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$-2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0$$
$$\Rightarrow x = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$		$+$	0	$-$	

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]0;1[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = 1$ أي في النقطة $A(1;4)$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]1;+\infty[$

❸

أ/ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]4.3;4.4[$

ولدينا: $f(4.3) \times f(4.4) < 0$

لأنّ: $f(4.3) \approx 0.02$ و $f(4.4) \approx -0.07$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α حيث: $4.3<\alpha<4.4$

ب/ تبرير أنّ $\ln\alpha=\frac{-\alpha^2+5\alpha}{2}$:

$$f(\alpha)=0 \Rightarrow -\alpha+5-2\frac{\ln\alpha}{\alpha}=0$$
$$\Rightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha}=-\frac{\alpha-5}{2}$$
$$\Rightarrow \ln\alpha=\frac{-\alpha^2+5\alpha}{2}$$

❹ تبيين أنه يوجد مماس (T) لـ (C_f) يوازي (Δ):

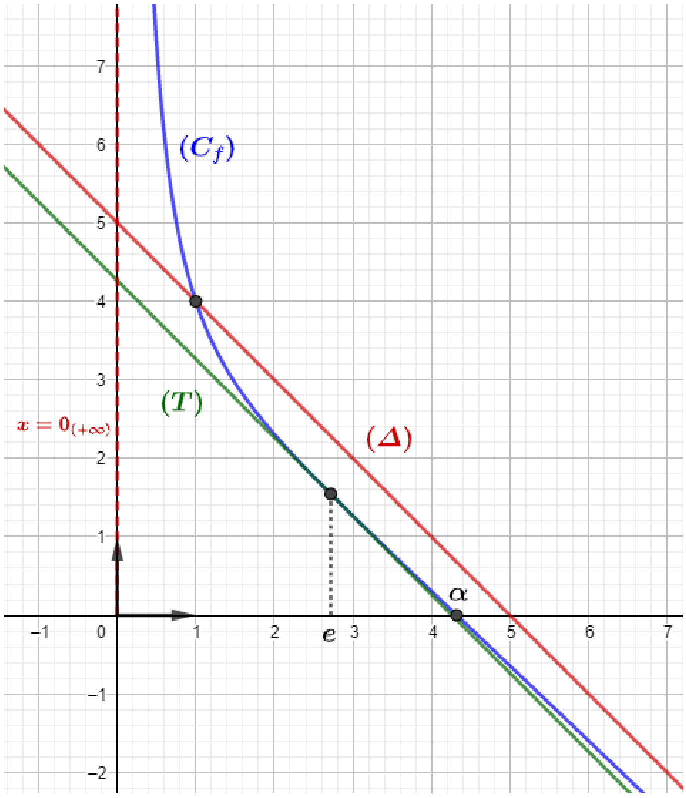
يوجد مماس يوازي (Δ) معناه: $\quad f'(a)=-1$

$$f'(a)=-1 \Rightarrow \frac{-a^2-2+2\ln a}{a^2}=-1$$
$$\Rightarrow -a^2-2+2\ln a=-a^2$$
$$\Rightarrow -2+2\ln a=0$$
$$\Rightarrow \ln a=1$$
$$\Rightarrow a=e$$

- كتابة معادلة لـ (T):

$$y_{(T)}=f'(e)(x-e)+f(e)$$
$$=-1(x-e)-e+5-\frac{2}{e}$$
$$=-x+5-2e^{-1}$$

❺ ارسم كل من (Δ)، (T) و (C_f):



❻ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$(5-m)x-2\ln x=0 \Rightarrow -2\ln x=-(5-m)x$$
$$\Rightarrow -\frac{2\ln x}{x}=-(5-m)$$
$$\Rightarrow -\frac{2\ln x}{x}=-5+m$$
$$\Rightarrow -\frac{2\ln x}{x}+5=m$$
$$\Rightarrow -\frac{2\ln x}{x}-x+5=-x+m$$
$$\Rightarrow f(x)=-x+m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة $y_m=-x+m$

- لما $m<5-2e^{-1}$ المعادلة لا تقبل حلول
- لما $m=5-2e^{-1}$ المعادلة تقبل حل وحيد
- لما $e<m<5$ المعادلة تقبل حلين
- لما $m\geq 5$ المعادلة تقبل حل وحيد

حل المسـألة رقم: 05

(I

❶

أ/ تعيين إشارة $f'(x)$ مع التبرير:

نضع γ, β, α حيث:

x	$-\infty$	α		β		1		$\sqrt{3}$	γ
$f'(x)$	...	0	$-$		‖		...	0	$+$

لدينا الدالة f فردية ، معناه:

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

ومنه:

$$-f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

لدينا من جدول التغيرات (المُعطى):

$x \in]\alpha; \beta[$ لما $f'(x) < 0$

$\Leftarrow$ $\underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} < 0$ لما $-x \in]\alpha; \beta[$

$\Leftarrow$ $f'(x) < 0$ لما $x \in]-\beta; -\alpha[$

ولدينا كذلك:

$x \in]\sqrt{3}; \gamma[$ لما $f'(x) > 0$

$\Leftarrow$ $\underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} > 0$ لما $-x \in]\sqrt{3}; \gamma[$

$\Leftarrow$ $f'(x) > 0$ لما $x \in]-\gamma; -\sqrt{3}[$

ولدينا: $f'(x) = 0$ لما $x = \sqrt{3}$

معناه $f'(-x) = 0$ لما $-x = \sqrt{3}$

ومنه $x = -\sqrt{3}$

ومنه: $\alpha = -\sqrt{3}$ و $\beta = -1$ و $\gamma = +\infty$

اذن:

$f'(x) > 0$ لما: $x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$

$f'(x) < 0$ لما: $x \in]-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}[$

ب/ تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)] = -\infty$:

لدينا من الجدول السابق: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] = +\infty$

نضع $x = -t$

(الدالة f فردية أي: $f(-t) = -f(t)$)

ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x)] = \lim_{-t\to-\infty} [f(-t)]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} [f(-t)]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} [-f(t)]$$

$$= -\underbrace{\lim_{t\to+\infty} [f(t)]}_{\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]=+\infty}$$

$$= -\infty$$

- تبيين أن: $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} [f(x)] = +\infty$:

بنفس الفكرة السابقة (نضع $x = -t$) نجد:

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} [f(x)] = +\infty$$

- تبيين أن: $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$:

لدينا:

$$\underbrace{f(-\sqrt{3})}_{f(-\sqrt{3})=-f(\sqrt{3})} = -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow -f(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$$

ج/ اكمال جدول تغيرات الدالة f السابق:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1		1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f(-\sqrt{3})$	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\nearrow +\infty$

حيث:

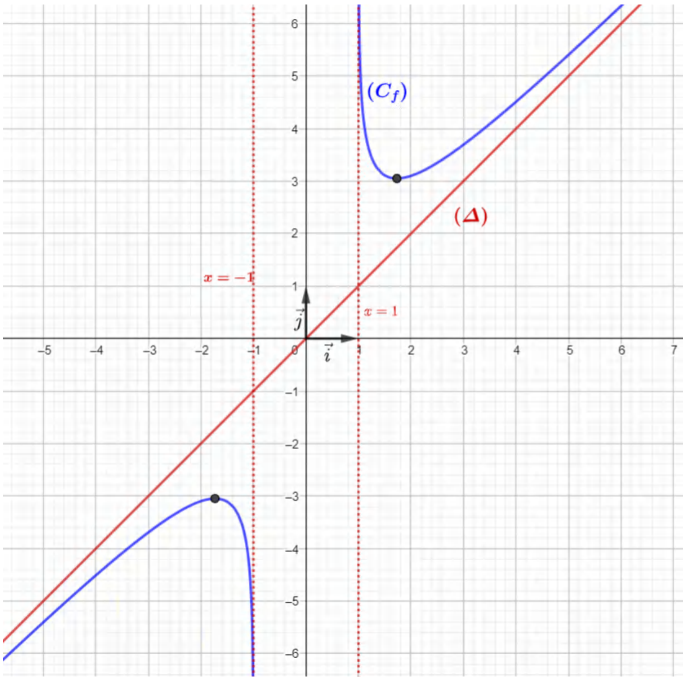
$$f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$$
$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$$

❷ التمثيل البياني:

قبل أن نشرع في التمثيل البياني، نستخرج من جدول التغيرات المستقيمات المقاربة

لدينا:

- (C_f) يقبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$.
- (C_f) يقبل مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$.



❸ تبيين أنّ : $a=1$ ، $b=0$ و $c=1$:

لدينا:

$$f'(x)=a+\frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{c+\frac{2}{x-1}}$$
$$=a-\frac{\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{c(x-1)+2}{x-1}}$$
$$=a-\frac{\frac{2}{x-1}}{c(x-1)+2}$$
$$=a-\frac{2}{c(x-1)^2+2(x-1)}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} f'(\sqrt{3})=0 \\ f'(-\sqrt{3})=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-\dfrac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}=0 \\ a-\dfrac{2}{c(-\sqrt{3}-1)^2+2(-\sqrt{3}-1)}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-\dfrac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}=0 \ldots(*) \\ a-\dfrac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)}=0 \ldots(**) \end{cases}$$

بطرح $(*)$ من $(**)$ نجد:

$$-\frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}+\frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)}=0$$
$$\Rightarrow c(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)=c(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)$$
$$\Rightarrow c(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}-2=c(4-2\sqrt{3})+2\sqrt{3}-2$$
$$\Rightarrow c(4+2\sqrt{3})-c(4-2\sqrt{3})-4\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow c(4\sqrt{3})=4\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \boxed{c=1}$$

نعوض قيمة c في $(*)$ نجد:

$$a-\frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}=0$$
$$\Rightarrow a=\frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2}$$
$$\Rightarrow a=\frac{2}{4-2}$$
$$\Rightarrow \boxed{a=1}$$

ولدينا:

$$f(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}+b+\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow b+\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)=\ln(2+\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow b=\ln(2+\sqrt{3})-\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)$$
$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}}\right)$$
$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}\right)$$
$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}\right)$$
$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right)$$
$$\Rightarrow b = \ln(1)$$
$$\Rightarrow \boxed{b = 0}$$

❹ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{xe^m - xe^x - e^m - e^x}{e^m - e^x} = 0$$
$$\Rightarrow xe^m - xe^x - e^m - e^x = 0$$
$$\Rightarrow e^m(x-1) - e^x(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow e^m(x-1) = e^x(x+1)$$
$$\Rightarrow e^m = e^x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$\Rightarrow m = \ln\left[e^x \times \left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]$$
$$\Rightarrow m = \ln(e^x) + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$\Rightarrow m = x + \ln\left(\frac{x+1+1-1}{x-1}\right)$$
$$\Rightarrow m = x + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$

ومنه:

- لما $m < f(-\sqrt{3})$

أي لما: $m \in \left]-\infty; f(-\sqrt{3})\right[$

للمعادلة حلان سالبان

- لما $m = f(-\sqrt{3})$

للمعادلة حل مضاعف هو $x = -\sqrt{3}$

- لما $f(-\sqrt{3}) < m < f(\sqrt{3})$

أي لما: $m \in \left]f(-\sqrt{3}); f(\sqrt{3})\right[$

المعادلة لا تقبل حلول

- لما $m = f(\sqrt{3})$

للمعادلة حل مضاعف هو $x = \sqrt{3}$

- لما $m > f(\sqrt{3})$

أي لما: $m \in \left]f(\sqrt{3}); +\infty\right[$

للمعادلة حلان موجبان

II) دراسة تغيرات الدالة g:

لدينا: $g(x) = \ln(f(x))$

نلاحظ أن: $g(x) = k \circ f = k(f(x))$

حيث: $k(x) = \ln x$

- حساب النهايات:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}}[f(x)] = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty}[k(x)] = +\infty$

اذن: $\bullet\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}}[g(x)] = +\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)] = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty}[k(x)] = +\infty$

اذن: $\bullet\ \lim\limits_{x \to 1}[g(x)] = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

لدينا: $f(x) > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

حل المسألة رقم: 06

مشاهدة المسألة

(I

❶ حساب نهاية الدالة g :

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = +\infty$

لأنّ: $\begin{cases} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (-\ln x) = +\infty \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \end{cases}$

❷ دراسة تغيرات الدالة g على $]0;+\infty[$:

$$g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$$

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ لدينا: $g'(x) < 0$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

❸

أ/ تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$:

الدالة g مستمرة ورتيبة على $]0;+\infty[$، وصورة هذا المجال هي $]-\infty;+\infty[$، ومنه فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$

ب/ التحقق أنّ $0.45 < \alpha < 0.46$:

لدينا: $g(0.45) = 0.02$ و $g(0.46) = -0.05$

أي $g(0.45) \times g(0.46) < 0$

إذن $0.45 < \alpha < 0.46$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$:

x	$-\infty$ $\quad$ α $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

(II

❶ حساب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$، وتفسير النتائج هندسيا:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x}\right) = 0$
- $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$

التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$ بجوار $-\infty$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة f، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(3+\ln x) + \frac{1}{x}e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(-3 - \ln x + \frac{1}{x}\right) \\ &= g(x)e^{-x} \end{aligned}$$

لدينا: $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

❸ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^{\alpha}}$:

لدينا: $g(\alpha) = 0$

ومنه: $-3 - \ln\alpha + \frac{1}{\alpha} = 0$

إذن: $\ln\alpha = -3 + \frac{1}{\alpha}$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= e^{-\alpha}(3+\ln\alpha) \\ &= e^{-\alpha}\left(3 - 3 + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= e^{-\alpha}\frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha e^{\alpha}} \end{aligned}$$

- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $0.45 < \alpha < 0.46$

ومنه: $1.57 < e^{\alpha} < 1.58$

ومنه: $0.63 < \frac{1}{e^{\alpha}} < 0.64 \ldots (*)$

لدينا: $0.45 < \alpha < 0.46$

ومنه: $2.17 < \frac{1}{\alpha} < 2.22 \ldots (**)$

بضرب $(*)$ في $(**)$ نجد:

$$1.38 < \frac{1}{\alpha e^{\alpha}} < 1.42$$

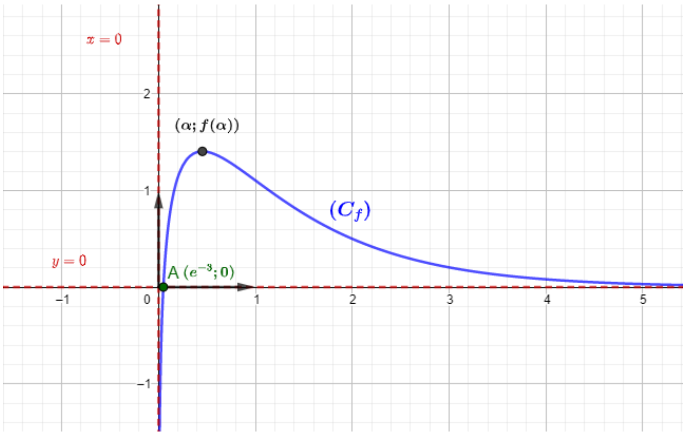
❹ حل المعادلة $f(x) = 0$، وتفسير النتيجة هندسيا:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow e^{-x}(3+\ln x) = 0 \\ &\Rightarrow 3 + \ln x = 0 \\ &\Rightarrow \ln x = -3 \\ &\Rightarrow x = e^{-3} \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة e^{-3}

❺ إنشاء المنحنى (C_f) :



(III

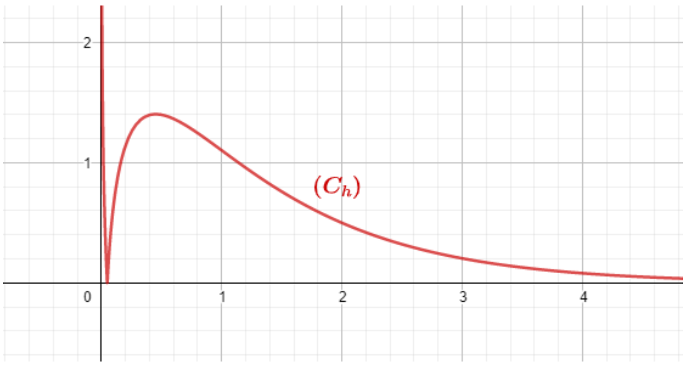
❶ كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = \frac{|3 + \ln x|}{e^x}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{3 + \ln x}{e^x} \; ; \; x \geq e^{-3} \\ \dfrac{-(3 + \ln x)}{e^x} \; ; \; x < e^{-3} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(x) \; ; \; x \geq e^{-3} \\ -f(x) \; ; \; x < e^{-3} \end{cases}$$

❷ إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h :

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq e^{-3}$

ويناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما $x < e^{-3}$



حل المسـألة رقم: 07

مشاهـــدة المسألة

3

أ/ حساب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}[f(x)]$:

- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}[f(x)] = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}\left[x + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{-\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)}_{-\infty}\right]$

$= +\infty$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$.

ب/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)]$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\underbrace{x}_{+\infty} + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)}_{+\infty}\right]$

$= +\infty$

4

أ/ التبيين:

نضع: الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$h(x) = x - 1 + \ln x$$

لدينا:

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

لدينا: $h'(x) > 0$ ولدينا: $h(1) = 0$ ومنه:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$			$+$		
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نجد أن: لكل x من المجال $]0;1]$:

$$(x-1) + \ln x \leq 0$$

وأنّ لكل x من المجال $[1;+\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$

ب/ تبيين أنّه من أجل كل من $]0;+\infty[$:

$f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{2}{x}\ln x$$

$$= \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

$x > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة $h(x)$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5 دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (D) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln x\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \frac{1}{2}\ln x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

ومنه:

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{2}\ln x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- (C_f) فوق (D) لما: $x \in]0;1[\cup]e^2;+\infty[$
- (C_f) يقطع (D) في النقطتين: $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$ وَ $B\left(e^2;e^2+\frac{1}{2}\right)$
- (C_f) تحت (D) لما: $x \in]1;e^2[$.

6 تعيين احداثيي النقطة ω :

المماس (T) يوازي المستقيم (D) معناه:

$$f'(a) = 1 \Rightarrow \frac{a - 1 + \ln a}{a} = 1$$

$$\Rightarrow a - 1 + \ln a = a$$

$$\Rightarrow \ln a = 1$$

$$\Rightarrow a = e$$

ومنه:

$$(T): y = f'(e)(x - e) + f(e)$$

$$= x - e + e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$$

$$= x$$

اذن المستقيم (T) مماس لـ (C_f) في النقطة $\omega(e;e)$

الخليل للرياضيات

❼

أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$:

$$f''(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-(x-1+\ln x)}{x^2}$$
$$=\frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{2-\ln x}{x^2}$$

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

لدينا: $x^2>0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2-\ln x)$

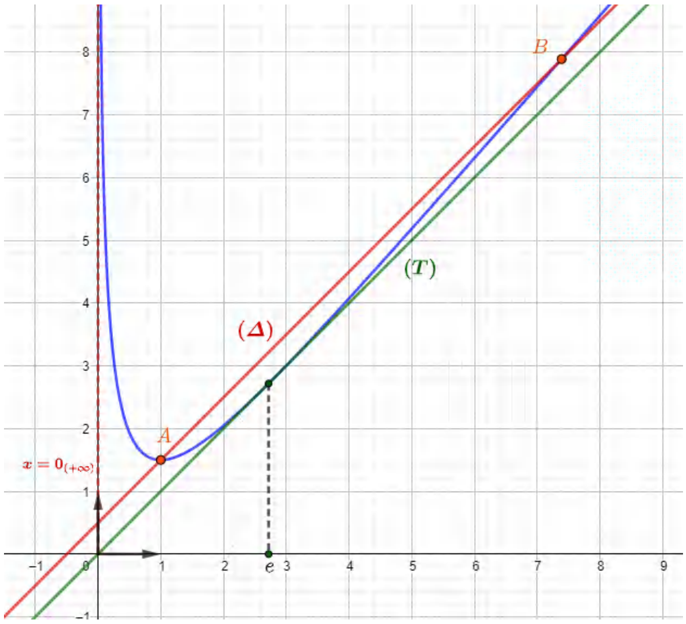
$$2-\ln x=0\Rightarrow \ln x=2$$
$$\Rightarrow x=e^2$$

ومنه:

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

لدينا $f''(x)$ تنعدم وتغير اشارتها، ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف $B\left(e^2;e^2+\frac{1}{2}\right)$

❽ التمثيل البياني:



❾ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m=x-2m$:

ومنه:

• لما $-2m<0$ أي لما $m>0$

المعادلة لا تقبل حلول

• لما $-2m=0$ أي لما $m=0$

المعادلة تقبل حل مضاعف

• لما $0<-2m<\frac{1}{2}$ أي لما $-\frac{1}{4}<m<0$

المعادلة تقبل حلان

• لما $-2m=\frac{1}{2}$ أي لما $m=-\frac{1}{4}$

المعادلة تقبل حلان أحدهما مضاعف

• لما $-2m>\frac{1}{2}$ أي $m<-\frac{1}{4}$

المعادلة تقبل حلان

حل المسألة رقم: 08

مشاهـــدة المسألة

I)

❶ حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)] = -\infty$ • $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} [g(x)] = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} \left[\frac{x}{x+1}\right] = -\frac{1}{0^+} = -\infty$

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة g :

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2\frac{1}{x+1}$$
$$= \frac{1-2x-2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط

$$-(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x = -1$$
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

❸

أ/ حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

ب/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين:

لدينا $h(0) = 0$

اذن منحنى الدالة g يقطع محور الفواصل في المبدا

ولدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال

$]-0.72; -0.71[$

ولدينا $g(-0.72) \times g(-0.71) < 0$

لأن: $g(-0.72) = -0.02$ و $g(-0.71) = 0.02$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.72; -0.71[$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$:

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II)

❶ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} [f(x)] = -\infty$

- $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} [f(x)] = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$

$$= \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \left[\frac{1}{x} \times \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{1}\right]$$

$$= \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

> $$\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] = 1$$
> نهاية شهيرة ويمكن اثباتها بالعدد المشتق
>
> نضع: $k(x) = \ln(x+1)$
>
> ومنه: $k'(x) = \frac{1}{x+1}$
>
> لدينا:
>
> $$\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\ln(x+1) - 0}{x - 0}\right]$$
> $$= \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{k(x) - k(0)}{x - 0}\right] = k'(0) = 1$$

- $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} [f(x)] = \frac{1}{0^+} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = 0$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$.

أ/ تبيين أنه من أجل كل x من D_f $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}x^2 - 2x\ln(x+1)}{x^4}$$
$$= \frac{\frac{1}{x+1}x - 2\ln(x+1)}{x^3}$$
$$= \frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x^3		$-$		$-$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

❷ تبيين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2\ln(\alpha+1)$$
$$\Rightarrow 2\ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{\alpha+1}$$
$$\Rightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}$$
$$= \frac{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}{\alpha^2}$$
$$= \frac{\alpha}{2\alpha^2(\alpha+1)}$$
$$= \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$-0.72 < \alpha < -0.71$$
$$0.28 < \alpha + 1 < 0.29 \ldots (*)$$

ولدينا:

$$-1.44 < 2\alpha < -1.42 \ldots (**)$$

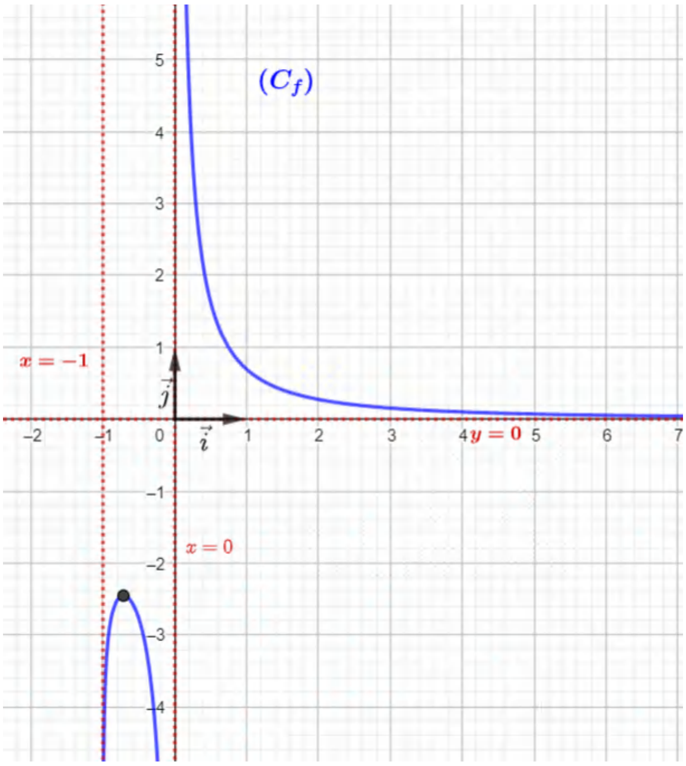
بضرب $(*)$ في $(**)$ نجد:

$$-0.41 < 2\alpha(\alpha+1) < -0.39$$
$$-2.56 < \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} < -2.43$$

اذن:

$$-2.56 < f(\alpha) < -2.43$$

❸ التمثيل البياني:



❹ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = \ln m$ وهي:

- لما $\ln m < f(\alpha)$ أي لما: $m < e^{f(\alpha)}$ للمعادلة حلان سالبان
- لما $\ln m = f(\alpha)$ أي لما: $m = e^{f(\alpha)}$ للمعادلة حل مضاعف
- لما $f(\alpha) < \ln m < 0$ أي لما: $e^{f(\alpha)} < m < 1$ المعادلة لا تقبل حلول
- لما $\ln m > 0$ أي لما: $m > 1$ للمعادلة حل وحيد موجب

حل المسألة رقم: 09

مشاهـــدة المسألة

I)

❶ دراسة تغيرات الدالة g، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

- تعيين النهايات:

  - $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = e + \frac{2}{x+1} = \frac{ex + e + 2}{x+1} > 0$$

ومنه :

x	-1 $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.34 < \alpha < -0.33$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$

ولدينا: $g(-0.34) \times g(-0.33) < 0$

لأنّ: $g(-0.34) \approx -0.04$ و $g(-0.33) \approx 0.02$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.34 < \alpha < -0.33$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II)

❶

أ/ تبيين أن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{=+\infty}\left(e + \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{=-\infty}\right)\right] = -\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$

- حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$:

$$f'(x) = -\frac{e}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{x+1}(x+1)^2 - 2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-e(x+1)^2 + (x+1) - 2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-e(x+1) + 1 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$= -\frac{e(x+1) - 1 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

ج/ دراسة اتجاه تغير الدالة:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $[-g(x)]$

لأنّ: $(x+1)^3 > 0$ $\quad$ لما : $x \in D_f$

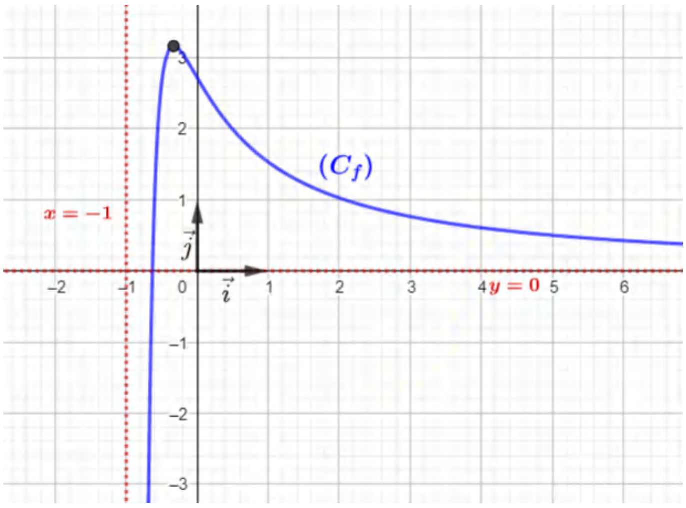
ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f:

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3.16	$\searrow$	0

د/ رسم المنحنى (C_f) :

- نرسم المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = 0$
- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$
- نعين النقطة α
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نكمل رسم (C_f)



❷

أ/ تبيين أن الدالة k زوجية:

$$\begin{aligned} k(-x) &= f(-|-x|) \\ &= f(-|x|) \\ &= k(x) \end{aligned}$$

ومنه k دالة زوجية.

ب/ تبيين كيف يمكن استنتاج (C_k) انطلاقا من (C_f) :

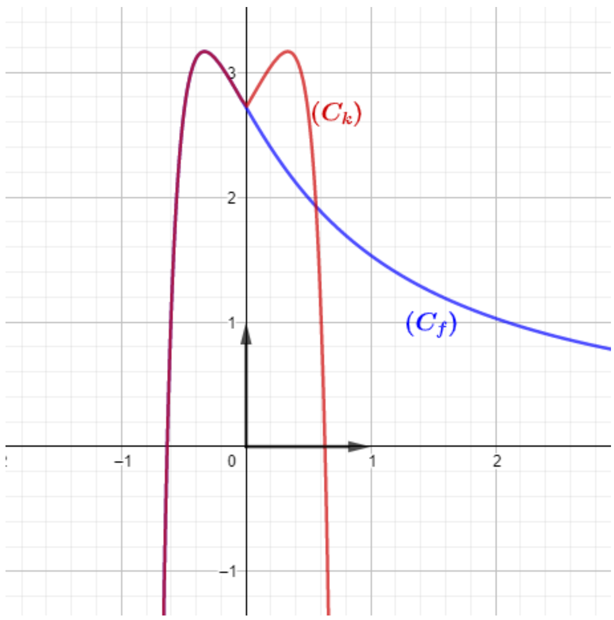
لدينا:

$$\begin{aligned} k(x) &= f(-|x|) \\ &= \begin{cases} f(-x) & ; \quad x \in [0;1[\\ f\big(-(-x)\big) & ; \quad x \in]-1;0[\end{cases} \\ &= \begin{cases} f(-x) & ; \quad x \in [0;1[\\ f(x) & ; \quad x \in]-1;0[\end{cases} \end{aligned}$$

ومنه (C_k) ينطبق على (C_f) في المجال $]-1;0[$

وبما أن الدالة k زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

- رسم (C_k) :



ج/ المناقشة البيانية:

$$k(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_k) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$.

لدينا: $k(0) = f(0) = e$

ومنه المناقشة:

لما $m < e$ المعادلة تقبل حلين متمايزين

لما $m = e$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول: حل معدوم وحل موجب وآخر سالب

لما $e < m < f(\alpha)$ المعادلة أربع حلول: حلين موجبين وآخرين سالبين

لما $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين مضاعفين أحدهما موجب والآخر سالب

لما $m > f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول

حل المسـألة رقم: 10

مشاهـــدة المسألة

I)

❶ دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$\bullet \lim\limits_{x \to 0^{>}} [g(x)] = -\infty$ $\bullet \lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)] = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❷ تبيين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا: $g(2.2) \times g(2.11) < 0$

لأنّ: $g(2.2) = -0.01$ و $g(2.11) = 0.002$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.2 < \alpha < 2.21$

❸ تعيين إشارة $g(x)$ على المجال : $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II)

❶ حساب: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]$ و $\lim\limits_{x \to 0^{>}} [f(x)]$:

$\bullet \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$ $\bullet \lim\limits_{x \to 0^{>}} [f(x)] = +\infty$

❷

أ/ حساب $f'(x)$ ، ودراسة اشارتها:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}(\ln x - 2 + x - 1)$$
$$= \frac{1}{x^2}(\ln x + x - 3)$$
$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

❸ تعيين دون حساب $\lim\limits_{x \to \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}\right]$:

$$\lim_{x \to \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}\right] = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha^2} = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماس موازٍ لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α .

❹ تبيين أنّ: $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln \alpha + \alpha - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \ln \alpha = 3 - \alpha$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln \alpha - 2)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(3 - \alpha - 2)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(1 - \alpha)$$
$$= \frac{(\alpha - 1)(1 - \alpha)}{\alpha}$$
$$= \frac{-(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

❺ حل المعادلة $f(x) = 0$:

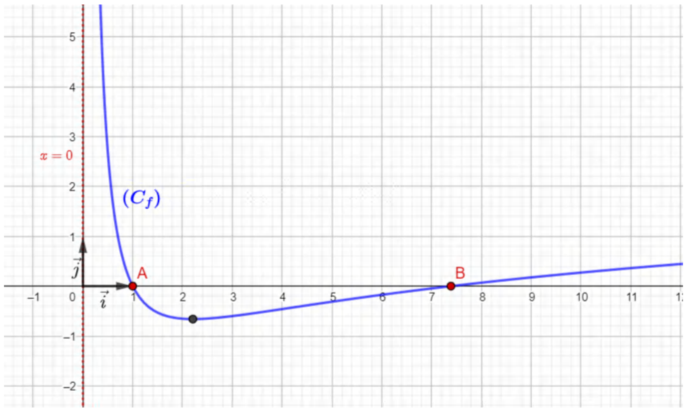
$$f(x) = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = 0 \\ \ln x - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

- **التفسير الهندسي:**

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين: $A(1;0)$ و$B(e^2;0)$.

❻ **التمثيل البياني:**



حل المسألة رقم: 11

مشاهدة المسألة

I)

❶ تبيين أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$:

$$g'(x)=2\frac{1}{x}-\left(-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}=\frac{2x^2+2}{x^3}>0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$

❷

أ/ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0;+\infty[$

ولدينا: $g(1.9)\times g(1.89)<0$

لأنّ : $g(1.9)\approx 0.01$ و $g(-1.9)\approx -0.01$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II)

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$، وتفسير النتيجة هندسيا:

- $$\lim_{x\to 0^{>}} f(x)=\lim_{x\to 0^{>}}\left(\frac{1}{x}(-x^2-2x+3+2\ln x)\right)=-\infty$$

التفسير الهندسي:

(C_f) قبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x=0$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x-2+\underbrace{\frac{3}{x}}_{0}+2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}\right)=-\infty$$

❷

أ/ تبيين أنه $f'(x)=\frac{1}{x^2}g\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$f'(x)=-1+\frac{2\frac{1}{x}x-3-2\ln x}{x^2}$$
$$=-1+\frac{-1-2\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{-x^2-1-2\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{1}{x^2}(-x^2-1-2\ln x)$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{\frac{1}{x^2}}-1+2\ln\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ب/ تبيين أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$

ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$:

لدينا: $\frac{1}{x^2}>0$ لما $x\in]0;+\infty[$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

ومنه:

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	↘ $-\infty$

❸

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x-2)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+\ln x}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$=0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته:

$$y_{(\Delta)}=-x-2$$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x)-y_{(\Delta)}=0\Rightarrow\frac{3+\ln x}{x}=0$$
$$\Rightarrow 3+\ln x=0$$
$$\Rightarrow \ln x=-3$$
$$\Rightarrow x=e^{-3}$$

ومنه:

x	0	e^{-3}	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in]0;e^{-3}[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(e^{-3};-e^{-3}-2)$

الخليل للرياضيات

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]e^{-3}; +\infty[$

❹

أ/ تبيين أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 1 - 2\ln x}{x^2}$$

ومنه:

$$f''(x) = \frac{\left(-2x - 2\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(-x^2 - 1 - 2\ln x)}{x^4}$$
$$= \frac{-2x^3 + 2x + 2x^3 + 2x + 4x\ln x}{x^4}$$
$$= \frac{4x\ln x}{x^4}$$
$$= \frac{4\ln x}{x^3}$$

لدينا: $x^3 > 0$ لما $x \in \mathbb{R}_+^*$

ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $\ln x$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

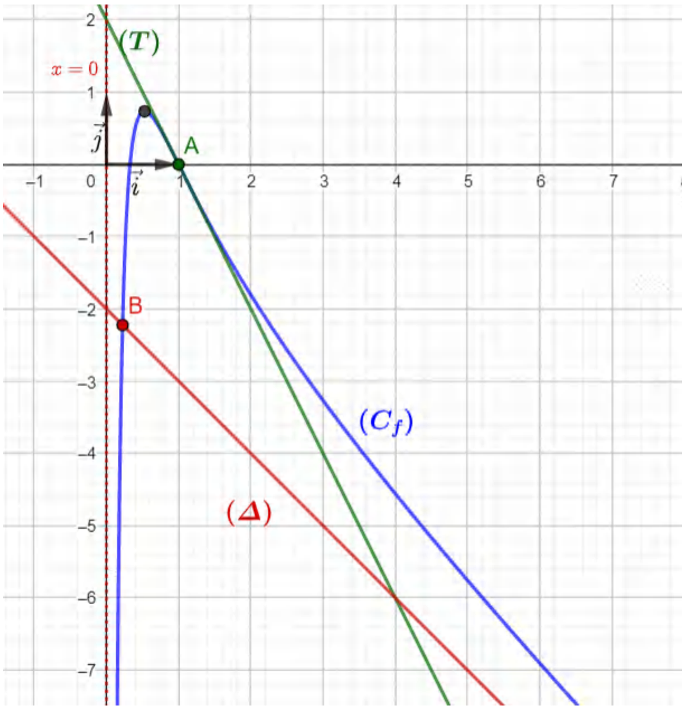
المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها

إذن (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها 1

ب/ كتابة معادلة مماس لـ (C_f) عند A:

$$y_{(T)} = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= -2(x-1)$$
$$= -2x + 2$$

❺ رسم (T)، (Δ) و (C_f) :



(III

❶ تبيين أنّ الدالة h زوجية:

$$h(-x) = |-x| + 2 - \frac{3 + ln((-x)^2)}{|-x|}$$
$$= |x| + 2 - \frac{3 + ln(x^2)}{|x|}$$
$$= h(x)$$

❷ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $h(x) = -f(x)$:

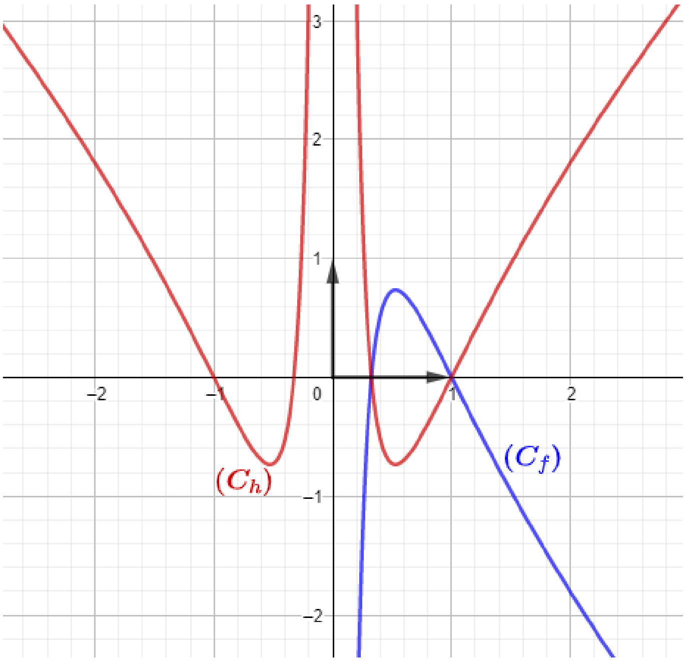
$$h(x) = |x| + 2 - \frac{3 + ln(x^2)}{|x|}$$
$$= \begin{cases} x + 2 - \dfrac{3 + ln(x^2)}{x} & ; \ x > 0 \\ -x + 2 - \dfrac{3 + ln((-x)^2)}{-x} & ; \ x < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -\left(-x - 2 + \dfrac{3 + 2\,ln(x)}{x}\right) & ; \ x > 0 \\ -x + 2 + \dfrac{3 + 2\,ln(-x)}{x} & ; \ x < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -f(x) & ; \ x > 0 \\ -x + 2 + \dfrac{3 + 2\,ln(-x)}{x} & ; \ x < 0 \end{cases}$$

❸ شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) :

لما $x \in \mathbb{R}_+^*$:

(C_h) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أنّ الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب



حل المسألة رقم: 12

مشاهدة المسألة

I)

❶

أ/ اثبات أنّ $y=\frac{1}{m}x-1+\ln m$ معادلة لـ (T_m):

لدينا: $f(x)=\ln x$

ومنه:

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$
$$y_{(T_m)}=f'(m)(x-m)+f(m)$$
$$=\frac{1}{m}(x-m)+\ln m$$
$$=\frac{1}{m}x-1+\ln m$$

ب/ التحقق أنّ المماس (T_e) للمنحنى (C) في النقطة $B(e;1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم:

لدينا:

$$y_{(T_e)}=\frac{1}{e}x-1+\ln e=\frac{1}{e}x$$

نعوض النقطة $O(0;0)$ في معادلة المستقيم (T_e) نجد:

$$0=\frac{1}{e}(0)\Rightarrow 0=0$$

إذن (T_e) يمر بمبدأ المعلم

❷

أ/ دراسة تغيرات الدالة g:

- النهايات:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\frac{1}{m}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{\ln m}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}\right)\right)$$

$=+\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty$

- دراسة إشارة $g'(x)$:

$$g'(x)=\frac{1}{m}-\frac{1}{x}$$
$$=\frac{x-m}{mx}$$

لدينا:

$$g'(x)=0\Rightarrow\frac{x-m}{mx}=0$$
$$\Rightarrow x-m=0$$
$$\Rightarrow x=m$$

x	0	m	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنها تبلغ قيمة حدية دنيا موجبة 0

وعليه فالدالة g موجبة على $]0;+\infty[$

❸ استنتاج مما سبق أن (C) يقع تحت أي مماس له:

ندرس الوضعية بين (C) و (T_m)

$$y_{(C)}-y_{(T)}=\ln x-\left(\frac{1}{m}x-1+\ln m\right)$$
$$=\ln x-\frac{1}{m}x+1-\ln m$$
$$=-\left(-\ln x+\frac{1}{m}x-1+\ln m\right)$$
$$=-g(x)$$

إشارة الفرق عكس إشارة $g(x)$

وعليه فإن (C) يقع تحت أي مماس له

II)

❶

أ/ استنتاج أنه من أجل كل عددين حقيقين موجبين تماما m و x يكون: $\ln x\le\ln m+\frac{x-m}{m}$:

لدينا:

$$g(x)\ge 0\Rightarrow\frac{1}{m}x-1+\ln m-\ln x\ge 0$$
$$\Rightarrow\frac{1}{m}x-1+\ln m\ge\ln x$$
$$\Rightarrow\frac{x-m}{m}+\ln m\ge\ln x$$

ب/ استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m يكون: $\ln(m+1)-\ln m\le\frac{1}{m}$:

III)

❶

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1=\frac{1+x}{x}$$

لدينا: $f'(x) > 0$ لما $x \in]0; +\infty[$

ومنه فالدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

ب/ استنتاج صحة المتباينة $\ln x \leq x - 1$:

لدينا مما سبق

$$\frac{x-m}{m} + \ln m \geq \ln x$$

بأخذ $m = 1$ نجد:

$$x - 1 \geq \ln x$$

❷

أ/ اثبات أنّ: $\ln(t+1) \leq t$:

يكفي أن نثبت انّ: $\ln(t+1) - t \leq 0$

نضع: $h(t) = \ln(t+1) - t$

لدينا: $h'(t) = \frac{1}{t+1} - 1 = \frac{-t}{t+1}$

لدينا: $t + 1 < 0$ لما $t > -1$ ومنه إشارة $h'(t)$ من إشارة $(-t)$

$$-t = 0 \Rightarrow t = 0$$

ومنه الدالة h متناقصة تماما لما $t > -1$

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نلاحظ أنها تبلغ قيمة حدية كبرى قيمتها 0

وعليه فالدالة h سالبة على $]-1; +\infty[$

ومنه: $\ln(t+1) - t \leq 0$

وعليه: $ln(t+1) \leq t$

ب/ اثبات أنّ: $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$:

لدينا سابقا:

$$x - 1 \geq \ln x$$

بوضع: $x = \frac{1}{1+t}$

نجد:

$$\frac{1}{1+t} - 1 \geq \ln\left(\frac{1}{1+t}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1-1-t}{1+t} \geq -\ln(1+t)$$
$$\Rightarrow \frac{-t}{1+t} \geq -\ln(1+t)$$
$$\Rightarrow \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$$

ج/ استنتاج صحة المتباينة $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$

لدينا سابقا:

$$\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \ldots (*)$$

ولدينا أيضا:

$$ln(t+1) \leq t \ldots (*)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\frac{t}{1+t} \leq ln(1+t) \leq t$$

حل المسألة رقم: 13

مشاهدة المسألة

I)

❶ دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x\to 0}[g(x)] = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to +\infty}[g(x)] = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$
$$= \frac{2x^2+1}{x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(0.32) = -0.03$ و $g(0.33) = 0.0002$

أي: $g(0.33) \times g(0.32) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

❸ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II)

❶ حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[-x + \frac{\overbrace{2+\ln x}^{-\infty}}{\underbrace{x}_{0^+}}\right] = -\infty$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته:

$$x = 0$$

• $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[-x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right] = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0$

❷ تبيين أنه من أجل كل x من D_f: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$:

$$f'(x) = -1 + \frac{\frac{1}{x}x - (2+\ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2 - 1 - \ln x}{x^2}$$
$$= -\frac{x^2+1+\ln x}{x^2}$$
$$= -\frac{g(x)}{x^2}$$

لدينا $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول التغيرات:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

❸ تبيين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 1 + \ln\alpha = 0$$
$$\Rightarrow \ln\alpha = -(\alpha^2+1)$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = -\alpha + \frac{2+\ln\alpha}{\alpha}$$
$$= \frac{-\alpha^2 + 2 - (\alpha^2+1)}{\alpha}$$
$$= \frac{-2\alpha^2+1}{\alpha}$$
$$= 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33$$
$$-0.33 < -\alpha < -0.32 \ldots (1)$$

ولدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33$$
$$0.64 < 2\alpha < 0.66$$
$$\frac{1}{0.66} < \frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{0.64}$$

$$1.51 < \frac{1}{2\alpha} < 1.66 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$1.18 < \frac{1}{2\alpha} - \alpha < 1.34$$

$$2.18 < 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right) < 2.34$$

إذن:

$$2.18 < f(\alpha) < 2.34$$

4

أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \lim_{x\to+\infty}\left[-x + \frac{2+\ln x}{x} + x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+\ln x}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right]$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2+\ln x}{x}$$

لدينا $x > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$2 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -2$$
$$\Rightarrow x = e^{-2}$$

ومنه:

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; e^{-2}[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e^{-2} .
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]e^{-2}; +\infty[$.

5 اثبات أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ) :

(T) يوازي (Δ) معناه: $f'(a) = -1$

ومنه:

$$f'(a) = -1 \Rightarrow -\frac{a^2 + 1 + \ln a}{a^2} = -1$$
$$\Rightarrow a^2 + 1 + \ln a = a^2$$
$$\Rightarrow 1 + \ln a = 0$$
$$\Rightarrow \ln a = -1$$
$$\Rightarrow a = e^{-1}$$

ومنه:

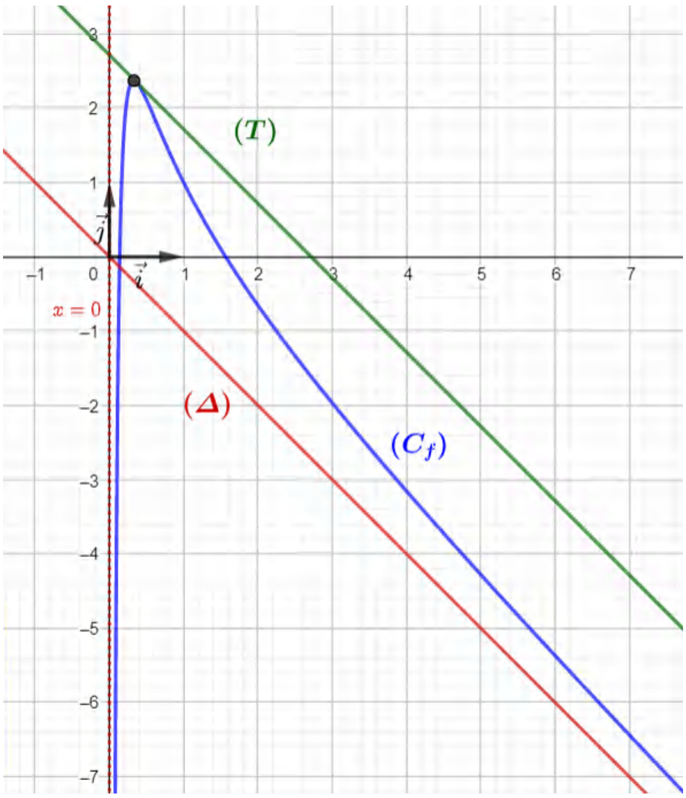
$$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$= -x + e^{-1} - e^{-1} + \frac{2+\ln e^{-1}}{e^{-1}}$$
$$= -x + e$$

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = 0$
- نعين نقط x_0 و x_1 تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ):
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



III)

1

أ/ تبيين أنه: $h(x) = f(x+1) + 2$:

$$f(x+1) + 2 =$$
$$= -(x+1) + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} + 2$$
$$= -x - 1 + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} + 2$$
$$= -x + 1 + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1}$$
$$= h(x)$$

ب/ تبيين أن (D) مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[h(x)-(-x+1)] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-x+1+\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}-(-x+1)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

❷

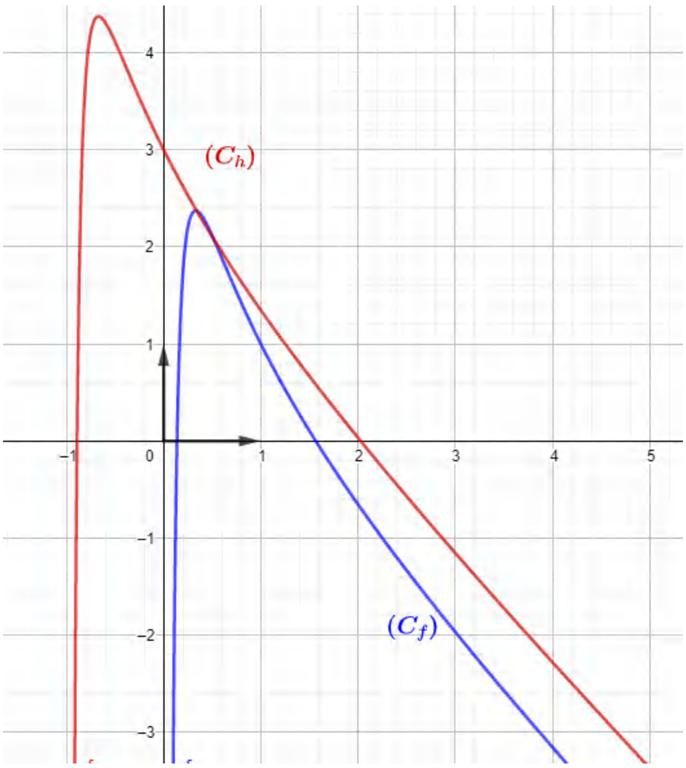
أ/ تبيين أن المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه :

$$h(x)=f(x+1)+2$$
$$=f\big(x-(-1)\big)+2$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{u}(-1;2)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :

تمثيل (C_f) و (C_h) :



❸

أ/ برهان أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها:

نفرض أن النقطة $A(x_1;y_1)$ تنتمي إلى المستقيم (T_m)

ونبرهن أنها ثابتة:

لدينا: A تنتمي إلى (T_m) معناه:

$$y_1=\ln(|m|)\,x_1+1$$
$$\Rightarrow \ln(|m|)\,x_1-y_1+1=0\ \dots(3)$$

المعادلة (3) عبارة عن كثير حدود متغيره $\ln(|m|)$ وينعدم اذا انعدمت جميع معاملاته

أي:

$$\begin{cases} x_1=0 \\ -y_1+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=1 \end{cases}$$

اذن: المستقيمات (T_m) تشمل النقطة $A(0;1)$

ب/ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_h) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m=\ln(|m|)\,x+1$$

ومنه:

- لما $ln|m|=-1$ أي لما $|m|=e^{-1}$

أي لما $m\in\{-e^{-1};e^{-1}\}$

المعادلة تقبل حلا وحيدا

- لما $\ln|m|<-1$ أي لما $|m|<e^{-1}$

أي لما $-e^{-1}<m<e^\wedge-1$

المعادلة تقبل حلا وحيدا

- لما $\ln|m|>-1$ أي لما $|m|>e^{-1}$

أي لما $m\in]-\infty;-e^{-1}[\cup]e^{-1};+\infty$

المعادلة تقبل حلان

حل المسألة رقم: 14

مشاهدة المسألة

I)

❶ دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}[g(x)] = -\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3\frac{1}{x}(\ln x)^2$$

لدينا: $g'(x) > 0$ و $g'(1) = 0$

ومنه

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

❷ حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (\ln x)^3 + 1 \\ &\Rightarrow (\ln x)^3 = -1 \\ &\Rightarrow \ln x = -1 \\ &\Rightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة $g(x) = 0$ هي: $s = \{e^{-1}\}$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II)

❶ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

• $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}[f(x)] = +\infty$

• $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1}[f(x)] = -\frac{2}{0^-} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1}[f(x)] = -\frac{2}{0^+} = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = +\infty$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$

❷ تبيين أن $f'(x) = 2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\frac{1}{x}\ln x - \left(\frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x)^2}\right) \\ &= \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2} \\ &= 2\left[\frac{(\ln x)^3 + 1}{x(\ln x)^2}\right] \\ &= \frac{2g(x)}{x(\ln x)^2} \end{aligned}$$

❸ استنتاج إشارة $f'(x)$:

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ ‖	$+$
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$+\infty$

III)

❶ دراسة تغيرات الدالة h :

- النهايات:

• $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}[h(x)] = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)] + \infty$

- دراسة $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{2}{x}\ln x$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه :

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول تغيرات الدالة h:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

❷ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - h(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - h(x)] =$$

الخليل للرياضيات

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[(\ln x)^2+1-\frac{2}{\ln x}-(\ln x)^2-1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{\ln x}\right]$$
$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_h) و (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$

❸ دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-h(x)$:

$$f(x)-h(x)=\frac{2}{-\ln x}$$

لدينا:

$$-\ln x=0\Rightarrow x=1$$

ومنه:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-h(x)$		$+$		$-$	

- (C_f) فوق (C_h) لما $x\in]0;1[$.
- (C_f) تحت (C_h) لما $x\in]1;+\infty[$

❹ تبيين أن (C_h) يقبل نقطة انعطاف A:

لدينا:

$$h''(x)=\frac{-2}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}$$
$$=\frac{-2\ln x+2}{x^2}$$
$$=\frac{2}{x^2}(1-\ln x)$$

لدينا $\frac{2}{x^2}>0$ ومنه الإشارة من $(1-\ln x)$:

$$1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1$$
$$\Rightarrow x=e$$

x	0		e		$+\infty$
$h''(x)$		$+$	0	$-$	

لدينا $h''(x)$ انعدمت وغيرت اشارتها ومنه المنحنى (C_h)
يقبل نقطة انعطاف احداثييها $A(e;2)$

❺ كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A :

$$(T): y=h'(e)(x-e)+h(e)$$
$$=\frac{2}{e}\ln e\,(x-e)+(\ln e)^2+1$$
$$=\frac{2}{e}x$$

❻ حساب $f(e)$:

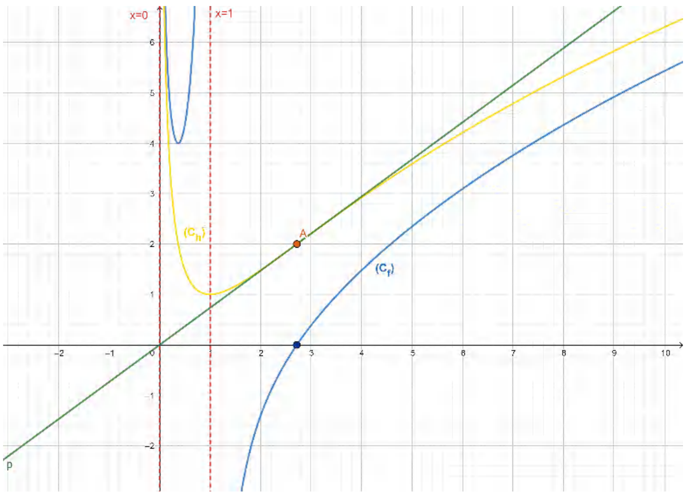
$$f(e)=(\ln e)^2+1-\frac{2}{\ln e}=0$$

- الاستنتاج:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة e .

❼ التمثيل البياني:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=1$ و $x=0$
- نرسم المماس (T)
- نعين نقطة A انعطاف المنحنى (C_h)
- باستعمال جدول تغيرات الدالة h نرسم (C_h)
- نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



❽ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$e^m(\ln x)^3+e^m\ln x-\ln x-2e^m=0$$
$$\Rightarrow e^m[(\ln x)^3+\ln x-2]=\ln x$$
$$\Rightarrow e^m\left[(\ln x)^2+1-\frac{2}{\ln x}\right]=1$$
$$\Rightarrow e^m[f(x)]=1$$
$$\Rightarrow f(x)=e^{-m}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=e^{-m}$

- لما: $e^{-m}<4$ أي لما: $-m<\ln 4$

أي لما: $m>-\ln 4$ المعادلة تقبل حل وحيد

- لما: $e^{-m}=4$ أي لما: $-m=\ln 4$

أي لما: $m=-\ln 4$

المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف

- لما: $e^{-m}>4$ أي لما: $-m>\ln 4$

أي لما: $m<-\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

(I

❶ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}} f(x)=-\infty$

❷ تبيين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I:

$$f'(x)=\frac{2}{2x-1}>0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال I

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

❸ تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$:

$$f'(x_0)=1 \Rightarrow \frac{2}{2x_0-1}=1$$
$$\Rightarrow 2x_0-1=2$$
$$\Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$$

فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) هي $x_0=\frac{1}{2}$

❹

أ/ اثبات أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=\ln(x+a)+b$:

$$f(x)=1+\ln(2x-1)$$
$$=1+\ln\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$=1+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+\ln 2$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=1+\ln 2 \end{cases}$$

ب/ استنتاج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغارتمية النيبيرية:

نضع: $h(x)=\ln x$

لدينا:

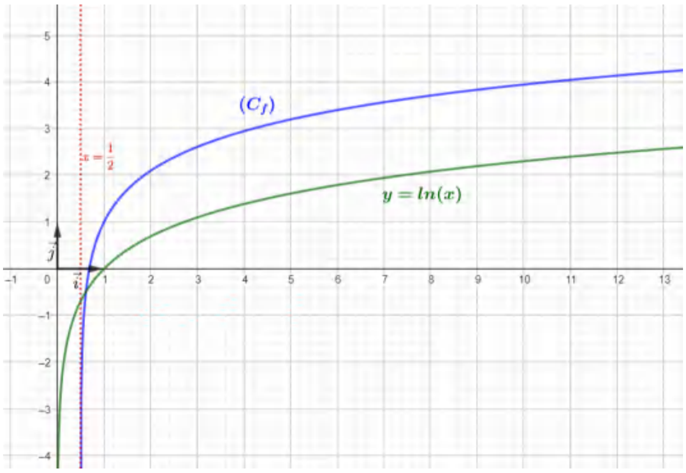
$$f(x)=\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+\ln 2$$
$$=h\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+\ln 2$$
$$=h(x+a)+b$$

ومنه (C_f) هو صورة (C) بإنسحاب شعاعه $\vec{v}(-a;b)$

أي:

$$\vec{v}\left(\frac{1}{2};1+\ln 2\right)$$

- رسم (C) و (C_f):



(II

❶ حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}} g(x)$:

$$\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}} g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}} f(x)-\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}(x)=-\infty$$

- تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(1+\ln(2x-1)-x)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{(2x-1)}_{+\infty}\left(\underbrace{\frac{1-x}{2x-1}}_{-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}}_{0}\right)\right]$$
$$=-\infty$$

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة g على I:

$$g'(x) = f'(x) - 1$$
$$= \frac{2}{2x-1} - 1$$
$$= \frac{2 - 2x + 1}{2x-1}$$
$$= \frac{-2x+3}{2x-1}$$

لدينا: $(2x - 1 > 0)$ على المجال I

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(-2x + 3)$:

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

ومنه:

لما $x \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$: $g'(x) > 0$

لما $x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$: $g'(x) < 0$

- جدول تغيرات الدالة g:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g\left(\frac{3}{2}\right)$	↘	$+\infty$

❸

أ/ حساب $g(1)$:

$$g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

- تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ حلا وحيدا α:

لدينا: الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

ولدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \times g\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ حلا وحيدا α

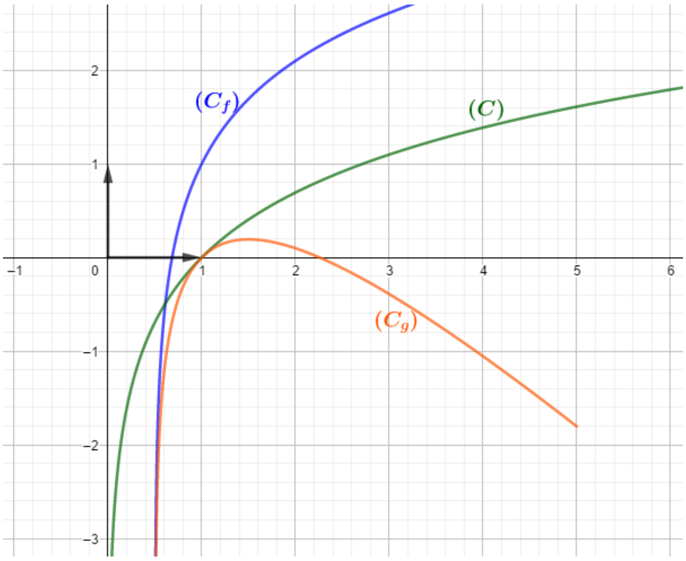
- التحقق أنّ $2 < \alpha < 3$:

لدينا: $g(2) \times g(3) < 0$

لأن $g(2) \approx 0.1$ و $g(3) \approx -0.39$

ومنه $2 < \alpha < 3$ محققة

ب/ رسم (C_g) :



❹ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال I :

لدينا: $\begin{cases} g(1) = 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$ ومنه:

x	$\frac{1}{2}$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = f(x) - x = g(x)$$

إذن:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in \left]\frac{1}{2}; \alpha\right[\cup \left]1; +\infty\right[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = \{\alpha; 1\}$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in \left]\alpha; 1\right[$

❺ برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; \alpha[$

فإنّ: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1; \alpha[$:

لدينا الدالة f متزايدة على $]1; \alpha[$

ولدينا: $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha$

وبما أن: $g(\alpha) = 0$

فإنّ $0 = f(\alpha) - \alpha$

أي: $f(\alpha) = \alpha$

ولدينا: $f(1) = 1$

ومنه:

لما: $x \in]1; \alpha[$ يكون: $f(x) \in]1; \alpha[$

(III

❶ تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$:

$$u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2 \Rightarrow f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$$

$$\Rightarrow \ln\left(2\left(1+\frac{1}{2n}\right)-1\right)$$
$$= \ln 3^2 - \ln 2^3$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{n+1}{n} = \frac{9}{8}$$
$$\Rightarrow 8n+8-9n=0$$
$$\Rightarrow -n=-8$$
$$\Rightarrow n=8$$

❷ **تعيين** S_n :

لدينا:

$$u_n = f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$
$$= 1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ومنه:

$$S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$$
$$= 1+\ln\left(\frac{1+1}{1}\right)+1+\ln\left(\frac{2+1}{2}\right)+\cdots+1$$
$$+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= 1(n-1+1)+\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots$$
$$+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= n+\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\ldots\times\frac{(n+1)}{n}\right)$$
$$= n+\ln\left(\frac{2\times3\times4\times\ldots\times n\times(n+1)}{2\times3\times4\times\ldots\times n}\right)$$
$$= n+\ln(n+1)$$

حل المسألة رقم: 16

مشاهدة المسألة

I)

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)]$:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)] = +\infty$

- تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = 0$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{x}\right]$

نضع $t = \ln x$ نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{x}\right] = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t^2}{e^t}\right] = 0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{t^n}{e^t}\right] = 0$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $x = 0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\left(2\frac{1}{x}\ln x\right)(x) - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

لدينا: $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

ولدينا: $2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

❷

أ/ كتابة معادلة المماس (T_m) :

$$y_{(T_m)} = f'(m)(x-m) + f(m)$$
$$= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)(x-m) + \frac{(\ln m)^2}{m}$$
$$= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x - \frac{(2-\ln m)\ln m}{m} + \frac{(\ln m)^2}{m}$$
$$= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x + \frac{2(\ln m)^2 - 2\ln m}{m}$$
$$= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x + \frac{2\ln m\,(\ln m - 1)}{m}$$

ب/ تعيين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ:

(T_m) يشمل المبدأ معناه:

$$0 = \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)(0) + \frac{2\ln m\,(\ln m - 1)}{m}$$
$$\Rightarrow \frac{2\ln m\,(\ln m - 1)}{m} = 0$$
$$\Rightarrow 2\ln m\,(\ln m - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\ln m = 0 \\ \ln m - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \ln m = 0 \\ \ln m = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = e \end{cases}$$

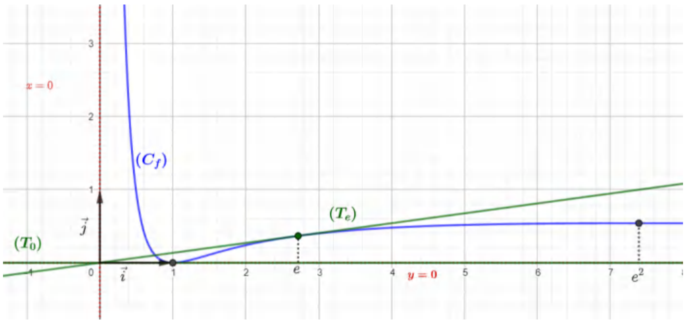
ج/ كتابة معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها:

$$(T_1): y = 0x + 0 = 0$$

$$(T_e): y = \left(\frac{(2-1)\times 1}{e^2}\right)x + \frac{2(1-1)}{e} = \frac{1}{e^2}x = e^{-2}x$$

❸ التمثيل البياني:

الخليل للرياضيات



II)

❶ تبيين أن الدالة g فردية:

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(ln|-x|)^2}{-x} \\ &= -\frac{(ln|x|)^2}{x} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة g فردية.

❷ تبيين أنه يمكن رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) :

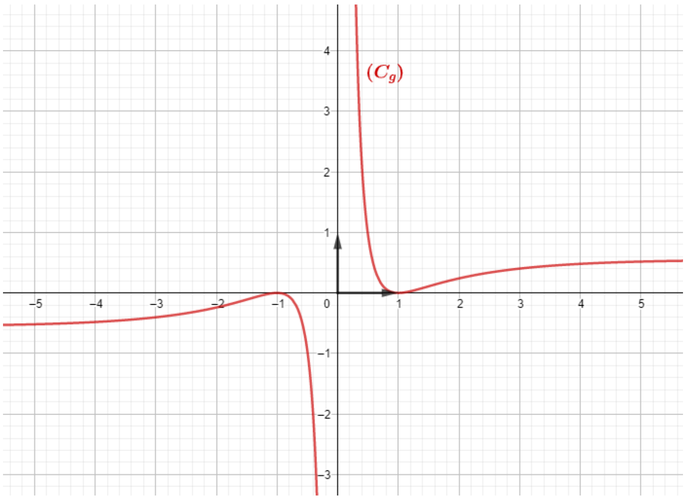
لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ \dfrac{(\ln(-x))^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ -\dfrac{(\ln(-x))^2}{-x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$: (C_g) ينطبق على (C_f)

ولما $x < 0$: (C_g) يناظر (C_g) بالنسبة للمبدأ

- تمثيل (C_g)



حل المسألة رقم: 17

مشاهدة المسألة

I)

❶ دراسة اتجاه تغير الدالة g:

$$g'(x) = 1 + 2\frac{1}{x} = \frac{1+2x}{x}$$

لدينا: $g'(x) > 0$ لما $x \in \mathbb{R}_+^*$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$

❷ حساب $g(1)$:

$$g(1) = -1 + 1 + 2\ln 1 = 0$$

- استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$:

بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0; +\infty[$ و $g(1) = 0$ فإنّ:

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

II)

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{-1 + \overbrace{x\,ln\,x}^{0} - 2\,ln\,x}{x}\right) = +\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

ب/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

❷

أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$:

$$f'(x) = \frac{\left(\ln x + \frac{x-2}{x}\right)x - \left(-1 + (x-2)\,ln\,x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{x\ln x + x - 2 + 1 - x\,ln\,x + 2\,ln\,x}{x^2}$$

$$= \frac{x - 1 + 2\,ln\,x}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

ب/ تعيين اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $x^2 > 0$ لما $x \in \mathbb{R}_+^*$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ -1 $\nearrow$ $+\infty$

❸

أ/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-1 + (x-2)\,ln\,x}{x} - ln\,x\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - 2\frac{\ln x}{x} - ln\,x\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right)$$

$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) و (Γ) متقاربان بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ):

$$f(x) - \ln x = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow -1 - 2\ln x = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

x	0 $\quad$ $e^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ $+\infty$
$f(x) - \ln x$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

- (C_f) فوق (Γ) لما $x \in \left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[$
- (C_f) يقطع (Γ) لما $x = e^{-\frac{1}{2}}$
- (C_f) تحت (Γ) لما $x \in \left]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[$

❹ تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]0; 1[$

ومستمرة ومتزايدة على $]1; +\infty[$

وتقبل قيمة حدية دنيا سالبة هي -1

و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

إذن: (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين

- التحقق أنّ: $0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$:

• لدينا: $f(0.6) \times f(0.5) < 0$

لأن: $f(0.6) \approx -0.47$ و $f(0.5) \approx 0.08$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.5; 0.6[$

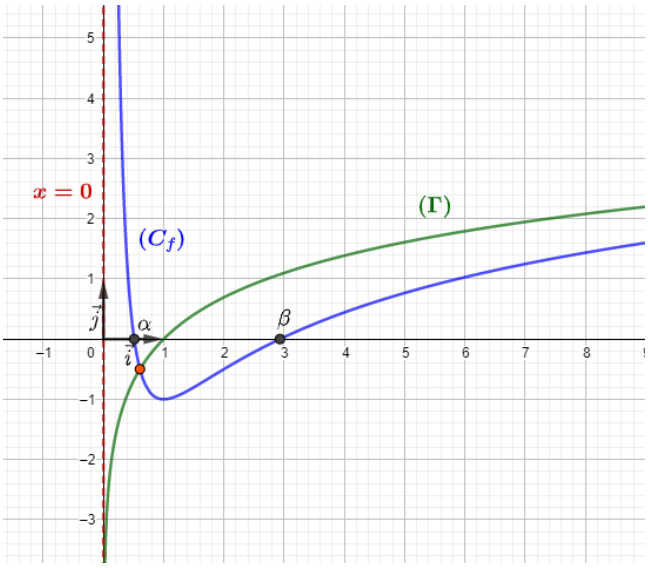
• ولدينا: $f(2.9) \times f(3) < 0$

لأن: $f(3) \approx 0.03$ و $f(2.9) \approx -0.01$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا β في المجال $]2.9; 3[$

❺ رسم (Γ) و (C_f) :



حل المسألة رقم: 18

مشاهـــدة المسألة

1

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

<u>التفسير الهندسي:</u> (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -\ln 2$

ب/ تبيين أنّ: $f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2e^{2x}\left(1+\frac{1}{2e^{2x}}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2e^{2x}}{e^x}\right) + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2e^{2x}}}{1+\frac{2}{e^x}}\right)$$

$$= \ln(2e^x) + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

$$= \ln 2 + x + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln 2 + \underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)}_{0}\right] = +\infty$$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

- <u>دراسة $f'(x)$:</u>

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{4e^{2x}(e^x+2) - e^x(2e^{2x}+1)}{(e^x+2)^2}\right)}{\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)}$$

$$= \frac{4e^{2x}(e^x+2) - e^x(2e^{2x}+1)}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$

$$= \frac{4e^{3x}+8e^{2x}-2e^{3x}-e^x}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$

$$= \frac{e^x(2e^{2x}+8e^x-1)}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$

لدينا:

$$\begin{cases} e^x > 0 \\ (e^x+2)(2e^{2x}+1) > 0 \end{cases}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^{2x}+8e^x-1)$:

$$2e^{2x}+8e^x-1 = 0$$

نضع $e^x = t$ أي $x = \ln t$

فنجد:

$$2t^2+8t-1 = 0$$

لدينا:

$$\Delta = 64 - 4(2)(-1) = 72 = \left(6\sqrt{2}\right)^2$$

لدينا: $\Delta > 0$ ومنه:

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{-8+6\sqrt{2}}{4} = -2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \\ t_2 = \dfrac{-8+6\sqrt{2}}{4} = -2-\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ln t_1 = \ln\left(-2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right) \\ x_2 = \ln t_2 \ (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

- <u>جدول التغيرات:</u>

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\ln 2$ ↘	y_0	↗ $+\infty$

حيث:

$$x_0 = \ln\left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \quad ; \quad y_0 = f\left(\ln\left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right)$$

3

أ/ تبيين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D):

لدينا:

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

$$= y + \varphi(x)$$

حيث:

الخليل للرياضيات

$$\begin{cases} \varphi(x) = \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right) \\ y = x + \ln 2 \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}} = 1$$
$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2}e^{-2x} = 1+2e^{-x}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} = 0$$
$$\Rightarrow e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-x} - 2\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} - 2 = 0$$
$$\Rightarrow e^{-x} = 4$$
$$\Rightarrow -x = \ln 4$$
$$\Rightarrow x = -\ln 4$$

لدينا:

$$x > -\ln 4$$
$$\Rightarrow -x < \ln 4$$
$$\Rightarrow e^{-x} < 4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} < 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} - 2 < 0$$
$$\Rightarrow e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-x} - 2\right) < 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} < 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} + 1 < 2e^{-x} + 1$$

لدينا: $2e^{-x} + 1 > 0$ إذن يمكن القسمة عليه

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1} < 1$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\frac{1}{2}e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1}\right) < 0$$

ومنه لما $x > -\ln 4 : f(x) - y < 0$

بنفس الطريقة نجد: لما لما $x < -\ln 4 : f(x) - y > 0$

ومنه:

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- (C_f) فوق (D) لما $x \in]-\infty; -\ln 4[$.
- (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الاحداثيات: $(-\ln 4\,; -\ln 2)$
- (C_f) تحت (D) لما $x \in]-\ln 4\,; +\infty[$.

❹ تبيين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f) تنتمي إليه - أي إلى (C_f) -

نحدد أولا نقطة تقاطع المستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مع المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = -\ln 2$.

لدينا:

$$\begin{cases} y = x + \ln 2 \\ y = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\ln 2 = -\ln 4 \\ y = -\ln 2 \end{cases}$$

ومنه نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي

$$\omega(-\ln 4\,; -\ln 2)$$

ولدينا:: $f(-\ln 4) = -\ln 2$

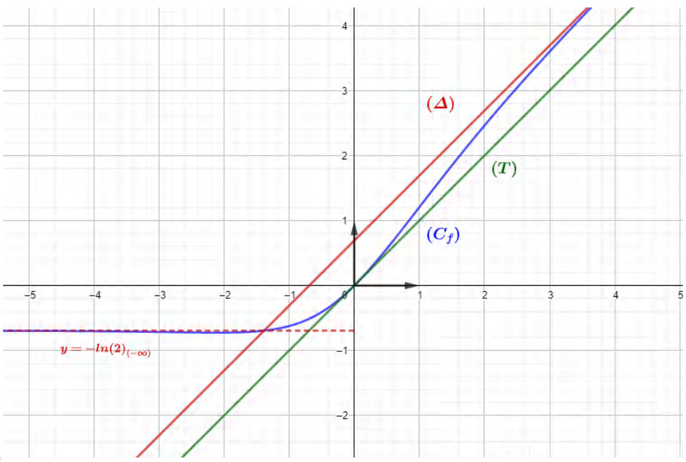
ومنه: $\omega \in (C_f)$

❺ كتابة معادلة للمماس (T) عند المبدأ:

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مماس لـ (C_f) عند المبدأ.

❻ التمثيل البياني:



① المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x - \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{me^x + 2m}\right) = 0$$
$$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{m}\ \frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{m}\right) + \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$$
$$\Rightarrow x = -\ln m + f(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = x + \ln m$$

اذن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = x + \ln m$

وهي:

- لما $\ln m < 0$ أي $m < 1$

المعادلة لا تقبل حلول

- لما $\ln m = 0$ أي لما $m = 1$

للمعادلة حل مضاعف

- لما $0 < \ln m < \ln 2$ أي لما $1 < m < 2$

للمعادلة حلان

- لما $\ln m = \ln 2$ أي لما $m = 2$

للمعادلة حل مضاعف

لما $\ln m > \ln 2$ أي لما $m > 2$

للمعادلة حل وحيد

حل المسـألة رقم: 19

مشاهـــدة المسألة

I)

- حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = e$$

لأنّ: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x \ln x) = 0$

- استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0; +\infty[$

و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = e > 0$

إذن الدالة g موجبة تماما على $]0; +\infty[$

II)

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$$

- تبيين أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(x+1) + \frac{e \overbrace{\frac{\ln x}{x}}^{0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}} \right) = +\infty$$

ب/ تبيين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{e}{x}(x+1) - e \ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x + 1 + \frac{e}{x}(x+1) - \frac{e(x \ln x)}{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x(x+1)}{x} + \frac{e}{x}(x+1) - \frac{e(x \ln x)}{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x+1) + e(x+1) - e(x \ln x)}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(x+e) - e(x \ln x)}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ج/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

لدينا: $x(x+1)^2 > 0$ لما $x \in]0; +\infty[$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

❷ كتابة معادلة (T)

$$y_{(T)} = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$= \frac{1+e}{2}(x-1) + \ln 2$$

$$= \frac{1+e}{2}x - \frac{1+e-2\ln 2}{2}$$

❸

أ/ تبيين أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة :

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$ وغيرت من إشارتها

إذن حتما تقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة

ب/ التحقق أنّ $0.7 < \alpha < 0.8$:

لدينا: $f(0.8) \times f(0.7) < 0$

لأنّ: $f(0.8) \approx 0.25$ و $f(0.7) \approx -0.04$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

❹

أ/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln(x+1)]$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - \ln(x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e \ln x}{x+1}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right]$$

$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) و (Γ) متقاربان بجوار $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ):

$$f(x) - \ln(x+1) = 0 \Rightarrow \frac{e \ln x}{x+1} = 0$$

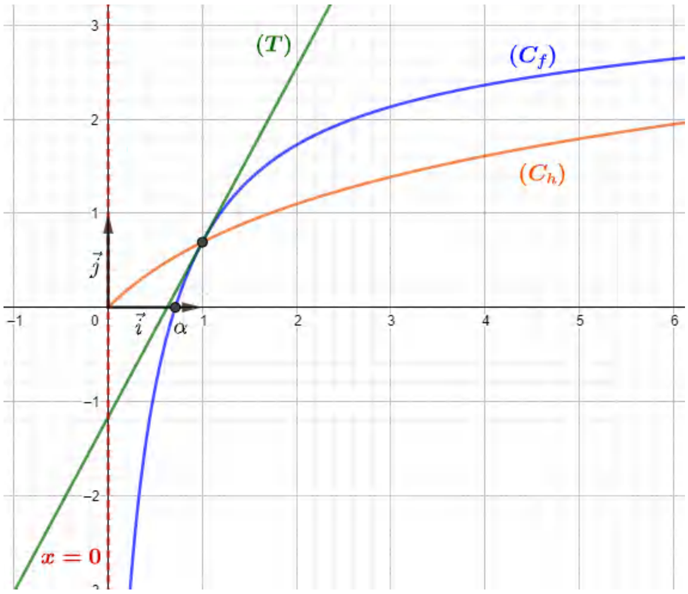
$$\Rightarrow e \ln x = 0$$

$$\Longrightarrow \ln x = 0$$
$$\Longrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - \ln x$	$-$	0	$+$

- (C_f) فوق (Γ) لما $x \in]0;1[$
- (C_f) يقطع (Γ) لما $x = 1$
- (C_f) تحت (Γ) لما $x \in]1;+\infty[$

ج/ رسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f) :



❺ تعيين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ حلين متمايزين:

حلول المعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = \frac{1+e}{2}x - m$ ، ومنه:

لما: $$-m < -\frac{1+e-2\ln 2}{2}$$

أي لما: $$m > \frac{1+e-2\ln 2}{2}$$

المعادلة تقبل حلين متمايزين

حل المسألة رقم: 20

مشاهدة المسألة

I)

❶ دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

  - $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$
  - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[g(x)] = -\infty$

- دراسة $g'(x)$:

لدينا: الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها

ومنه:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

لدينا $x > 0$ و $2x^2 + 1 > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❷

أ/ تبيين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[g(x)] \times \lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

ب/ التحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$:

لدينا: $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) =$ 0.02

ولدينا: $g(1.31) \times g(1.32) < 0$ ، اذن $1.31 < \alpha <$ 1.32

❸ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II)

❶ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = +\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)] = +\infty$

❷ تبيين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x) \\ &= 2x - \frac{2(2-\ln x)}{x} \\ &= \frac{2(x^2 - 2 + \ln x)}{x} \\ &= \frac{2}{x} g(x) \end{aligned}$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

❸ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

❹ تبيين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1+\alpha^2)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \ln\alpha = 2 - \alpha^2 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^2 + (2 - \ln\alpha)^2 \\ &= \alpha^2 + (2 - 2 - \alpha^2)^2 \\ &= \alpha^2 + \alpha^4 \\ &= \alpha^2(1+\alpha^2) \end{aligned}$$

❺ استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال: $]0; +\infty[$:

لدينا $f(\alpha) > 0$ ومنه نجد:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

III)

❶ تبيين أن المسافة AM تعطى بـ $AM = \sqrt{f(x)}$:

لدينا M نقطة من (C_h) فاصلتها x_m أي تكتب على الشكل:

$M(x; h(x))$ أي: $M(x; \ln x)$ ومنه المسافة AM تعطى بـ:

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \left(-(2-\ln x)\right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2-\ln x)^2} \\ &= \sqrt{f(x)} \end{aligned}$$

❷

الخليل للرياضيات

أ/ برهان أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير:

نلاحظ أن:

$$k(x) = (u \circ f)(x)$$

حيث:

$$u(x) = \sqrt{x}$$

لدينا الدالة u متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

والدالة f موجبة تماما على $]0; +\infty[$

اذن $(u \circ f)(x)$ متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ومنه للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$

ب/ برهان أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h)

بما أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير في المجال $]0; +\infty[$

فإن الدالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي $x = \alpha$

ومنه المسافة أصغرية لما $x = \alpha$

إذن:

$$B(\alpha; \ln \alpha) \Leftrightarrow B(\alpha; 2 - \alpha^2)$$

ج/ برهان أن: $AB = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} \\ &= \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} \\ &= |\alpha|\sqrt{1 + \alpha^2} \\ &= \alpha\sqrt{1 + \alpha^2} \end{aligned}$$

❸ تبرير أن (AB) عمودي على المستقيم المماس لـ (C_h) في النقطة B :

لدينا:

ميل المستقيم المماس لـ (C_h) في النقطة B هو:

$$h'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AB) هو :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha - 0} \\ &= -\frac{\alpha^2}{\alpha} \\ &= -\alpha \end{aligned}$$

تذكر أنه:

◄ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 ►

لدينا:

$$-\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -1$$

ومنه المستقيم (AB) عمودي على مماس المنحنى (C_h) في النقطة B.

حل المسألة رقم: 21

مشاهـــدة المسألة

I)

1

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;1[$:

$$g'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$$

لدينا: $g'(x) > 0$ لما $x \in]0;1[$

إذن الدالة g متزايدة تماما على $]0;1[$

ب/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;1[$

ولدينا: $g(0.15) \times g(0.16) < 0$

لأنّ $g(0.15) \approx -0.05$ و $g(0.16) \approx 0.01$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;1[$

2 استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0;1[$:

x	$0 \quad \alpha \quad 1$
$g(x)$	$- \quad 0 \quad +$

II)

1 حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- $$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(C_f) يقبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته: $x = 1$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{x} - 2 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right)$$

$$= -\frac{2}{1} = -2$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(C_f) يقبل مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = -2$

2

أ/ تبيين أنه $f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{\left(-2 + \frac{1}{x}\right)(x-1) - (1 - 2x + \ln x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2x + 2 + 1 - \frac{1}{x} - 1 + 2x - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

ب/ تبيين أنّ الدالة f متزايدة تماما على $\left]1;\frac{1}{\alpha}\right]$

ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$:

لدينا: $(x-1)^2 > 0$ لما $x \in]1;+\infty[$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا:

x	$0 \quad \alpha \quad 1$
$g(x)$	$- \quad 0 \quad +$

لدينا: $g(x) = 0$ أي: $x = \alpha$

ومنه:

$g\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ أي: $\frac{1}{x} = \alpha$ أي: $x = \frac{1}{\alpha}$

$g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ أي: $\alpha < \frac{1}{x} < 1$ أي: $1 < x < \frac{1}{\alpha}$

$g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ أي: $0 < \frac{1}{x} < \alpha$ أي: $\frac{1}{\alpha} < x$

ومنه:

x	1	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow -2$

3 دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x + \ln x}{x-1} - (-2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 2x + \ln x + 2(x-1)}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2x + \ln x + 2(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2x + \ln x + 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + \ln x = 0$$

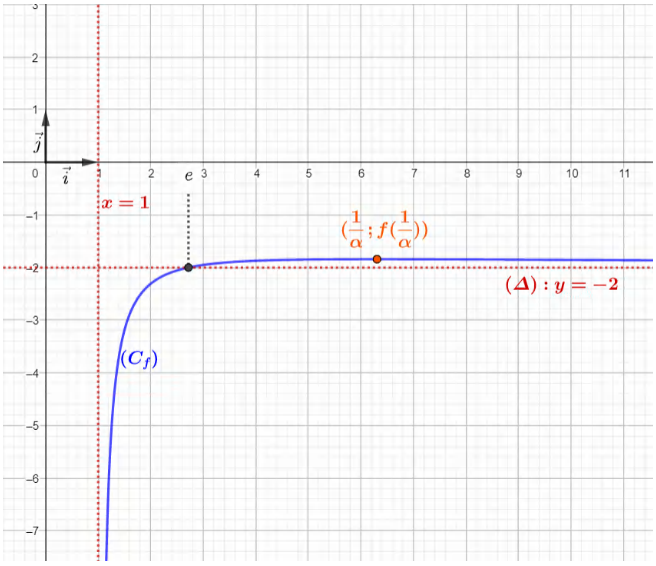
$$\Rightarrow \ln x = 1$$

$$\Rightarrow x = e$$

x	$1 \quad e \quad +\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$- \quad 0 \quad +$

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]1; e[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = e$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]e; +\infty[$

❹ رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) :



❺ تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متمايزين:

نضع $h(x) = |f(x)|$

ومنه:

$$|f(x)| = m \Longrightarrow h(x) = m$$

حلول المعادلة هي فوصل نقط تقاطع (C_h) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$

((C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل)

نرسم أولا (C_h) ثم نعين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $h(x) = m$ حلين متمايزين هي:

$$-f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < m < 2$$

أي:

$$m \in \left]2; -f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right[$$

- **طريقة أخرى:**

لدينا: $|f(x)| = m$ يعني: $f(x) \geq 0$

وهذا يعني $m \geq 0$

ولدينا:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \ ; \ x \geq 0 \\ -f(x) \ ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

لدينا (C_f) يقع تحت حامل محور الفواصل

إذن: $|f(x)| = -f(x)$

ومنه:

$$|f(x)| = m \Longrightarrow -f(x) = m$$
$$\Longrightarrow f(x) = -m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -m$

إذن: قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = -m$ حلين متمايزين هي:

$$-m \in \left]f\left(\frac{1}{\alpha}\right); -2\right[$$

أي:

$$m \in \left]2; -f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right[$$

حل المسألة رقم: 22

مشاهدة المسألة

❶ تبيين أن الدالة f فردية:

$$f(-x) = \frac{2}{3}(-x) + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)$$
$$= -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$= -\frac{2}{3}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$= -\left(\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$
$$= -f(x)$$

- التفسيرالبياني:

(C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ

❷ حساب النهايات:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{2}{3} + \ln\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) = -\infty$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(-\frac{2}{3} + \ln\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right) = +\infty$

لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x+1) = 0^-$

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

❸

أ/ تبيين أن: $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$:

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1}$$
$$= \frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)}$$
$$= \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)}$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2+2 وبما أن $(x^2+2>0)$ فـ $f'(x) > 0$

وعليه:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ -1		1 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

ج/ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$:

لدينا: الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال D

ولدينا: $f(1.8) \times f(1.9) < 0$

لأنّ: $f(1.8) \approx -0.05$ وَ $f(1.9) \approx 0.1$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

❹ تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = 0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $\pm\infty$

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

لدينا:

- لما $x \in]1;+\infty[$:

$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \Rightarrow x-1 > x+1$$
$$\Rightarrow -2 > 0$$

وهذا مستحيل، وعليه $\frac{x-1}{x+1} < 1$ ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$ في المجال $]1;+\infty[$

ومنه (C_f) يقع تحت لما $x \in]1;+\infty[$.

- لما $x \in]-\infty;-1[$:

الخليل للرياضيات

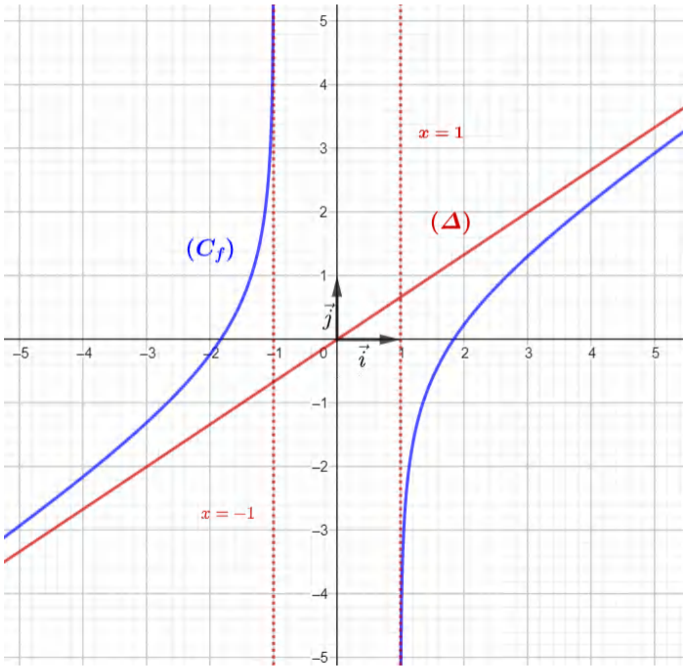
$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \Rightarrow x-1 < x+1$$
$$\Rightarrow -2 < 0$$

وهذا صحيح، وعليه $\frac{x-1}{x+1} > 1$

ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ في المجال $]-\infty; -1[$

ومنه (C_f) فوق تحت لما $x \in]-\infty; -1[$.

❺ انشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :



❻ المناقشة البيانية:

$$(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$
$$\Rightarrow 2x - 3|m|x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$\Rightarrow 2x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 3|m|x$$
$$\Rightarrow 3\left(\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = 3|m|x$$
$$\Rightarrow 3f(x) = 3|m|x$$
$$\Rightarrow f(x) = |m|x$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = |m|x$:

- لما $|m| < \frac{2}{3}$ أي لما $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$
  أي لما $m \in \left]-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right[$
  المعادلة تقبل حلين متمايزين
- لما $|m| \geq \frac{2}{3}$ أي لما $m \geq \frac{2}{3}$ أو $m \leq -\frac{2}{3}$
  أي لما $m \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$
  المعادلة لا تقبل حلول

بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا

لا تنسونا من صالح دعائكم

زورونا في صفحتنا على فيسبوك:

#الخليل_للرياضيات