



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

أسئلة متنوعة شائعة في دراسة الدوال والإجابات عليها

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 11 / 29

① السلوك التقاربي \ المقاربات \ الوضعية النسبية

السؤال	الإجابة
فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الترتيب، معادلته: $x = a$
فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا محور الفواصل معادلته: $y = b$
فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = ax + b$ عند $\pm\infty$
بين أن المستقيم $y = ax + b$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)	نبرهن: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته	• إذا كان: $f(x) = ax + b + g(x)$ نبرهن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ ومعادلة المستقيم: $y = ax + b$ • إذا لم يكن ذلك (*): نحسب العددين a و b من $\mathbb{R}$ كما يلي: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$
ملاحظة: (*) خاص بشعبي: رياضيات + تقني رياضي	
ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = ax + b$: (Δ)	ندرس إشارة الفرق: $d(x) = f(x) - y$
نطبق نفس الإجابة على السؤال: ادرس وضعية المنحنيين (C_f) و (C_g) ، بوضع:	$d(x) = f(x) - g(x)$ • $d(x) > 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع فوق (Δ) • $d(x) = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقطع (Δ) • $d(x) < 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع تحت (Δ)
فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$	المنحنيين (C_f) و (C_g) متقاربان عند $\pm\infty$

② عناصر تناظر منحنى \ شفعية دالة

D_f هي مجموعة تعريف الدالة f

السؤال	الإجابة
بين أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f)	نبين أن: $\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$
بين أن $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$
بين أن المستقيم $d: x = \alpha$ محور تناظر (C_f)	نبين أن: $\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) = f(x) \end{cases}$
بين أن $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم $d: x = \alpha$
بين أن الدالة f فردية	نبين أن: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
بين أن الدالة f زوجية	نبين أن: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
بين أن: $f(-x) + f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: f فردية، ومبدأ المعلم مركز تناظر (C_f)
بين أن: $f(-x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: f زوجية، و (C_f) متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب (yy')
بين أن: $f(\alpha - x) + f(x) = \beta$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}\right)$
بين أن: $f(\alpha - x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة: $x = \frac{\alpha}{2}$

③ إشارة دالة \ مبرهنة القيم المتوسطة

السؤال	الإجابة
- يعطى لك المنحنى (C_f) مرسوما في معلم م م، - عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل. - استنتج إشارة $f(x)$	- نحل بيانيا المعادلة: $f(x) = 0$ - ثم نحدد المجالات التي يكون عليها (C_f) إما فوق محور الفواصل وإما أسفله - وأخيرا نحدد إشارة $f(x)$
أحسب $f(\alpha)$ واستنتج إشارة $f(x)$	نجد $f(\alpha) = 0$ ثم نحدد المجالات حيث: $f(x)$ إما موجبة أو سالبة
- بين أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حل وحيد α حيث: $a < \alpha < b$ - أو بصيغة أخرى: - بين أن (C_f) يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α	- نبين أن: f مستمرة ورتيبة تماما على $[a; b]$ - ونحسب: $f(a)$ و $f(b)$ ونبين أن k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فينتج وجود α وحيد من $[a; b]$ حيث: $f(\alpha) = k$
- بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $a < \alpha < b$ - أو بصيغة أخرى: - بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α	- نبين أن f مستمرة ورتيبة تماما على $[a; b]$ - ونحسب: $f(a)$ و $f(b)$ ونجد: $f(a) \times f(b) < 0$ - وينتج وجود α وحيد من $[a; b]$ حيث: $f(\alpha) = 0$

السؤال	الإجابة
فسّر: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l$ أو: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	• f تقبل الاشتقاق عند a و $f'(x) = l$ • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا معامل توجيهه l
فسّر: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = 0$	• f تقبل الاشتقاق عند a و $f'(x) = 0$ • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y = f(a)$
فسّر: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = \pm\infty$	• f لا تقبل الاشتقاق عند a و (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا (أو نصف مماس) يوازي حامل محور الترتيب معادلته $x = a$
فسّر: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l_1$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l_2$ حيث: $l_1 \neq l_2$	• f لا تقبل الاشتقاق عند a. • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ نصفي مماسين معاملي توجيههما على الترتيب l_1 و l_2 وتسمى النقطة $A(a; f(a))$ نقطة زاوية.

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب المعادلة $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ثم نحسب $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ و نعوض في المعادلة أعلاه
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الترتيبة y_0	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ثم نكتب معادلة المماس عند x_0
عين بيانيا العدد المشتق $f'(x_0)$ <u>ملاحظة:</u> معامل توجيه المماس $f'(x_0) =$	معامل التوجيه $f'(x) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ حيث A و B من المماس
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها يساوي a ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(a; b)$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟ (في معلم متعامد ومتجانس)	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات

⑥ إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة a, b

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت: a, b, c
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_0; y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل. أو: (C_f) يقبل ذروة في النقطة $A(x_0; y_0)$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة: $y = mx + k$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

⑦ رسم منحنى (C_g) إنطلاقاً من المنحنى (C_f)

إذا كان	فإنّ
$g(x) = -f(x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')
$g(x) = f(x)$	g زوجية، وعندما: $x \geq 0$ ، يكون (C_g) منطبقاً على (C_f)
$g(x) = f(x) $	(C_g) ينطبق على (C_f) في المجالات التي تكون عليها f موجبة. و (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى (xx') في المجالات التي تكون عليها f سالبة.