التمرين 01

a و b عددان حقيقيان و g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x^2+ax+b}$.

عين قيمتي a و b الموافقتين لجدول تغيرات الدالة g التالي :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$e^{-\frac{5}{4}}$	↗ $+\infty$

الحل

من جدول التغيرات لدينا : $g'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ و $g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$

مشتقة الدالة g : $g'(x) = (2x+a)e^{x^2+ax+b}$.

$g'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ تكافئ $(3+a)e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)}$ تكافئ $3+a=0$ لأن : $e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} \neq 0$

إذن : $a=-3$.

$g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$ تكافئ $e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} = e^{-\frac{5}{4}}$ و منه : $\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b\right) = -\frac{5}{4}$ و منه : $b=1$

و بالتالي : $a=-3$ و $b=1$.

التمرين 02

(C_f) هو التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ للدالة f حيث : $f(x) = ae^{-2x} + be^{-x} + cx$ مع c,b,a أعداد حقيقية ثابتة.

عين الدالة f إذا علمت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معادلته $y = 2x - \frac{1}{2}$ في النقطة $H\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ و يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=2x$.

الحل

النقطة $H\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى (C_f) معناه : $f(0) = -\frac{1}{2}$ أي : $a+b = -\frac{1}{2}$

المماس (T) عند النقطة $H\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ معادلته : $y = 2x - \frac{1}{2}$ معناه : $f'(0) = 2$.

$f'(x) = -2ae^{-2x} - be^{-x} + c$ و منه : $f'(0) = 2$ تكافئ : $-2a-b+c = 2$ أي : $-2a-b = 2-c$

$y=2x$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - cx] = \lim\limits_{x\to+\infty} [ae^{-2x} + be^{-x}] = 0$

معناه : $y=cx$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$ و بالتالي : $c=2$.

لتعيين a و b نحل الجملة : $\begin{cases} a+b=-\frac{1}{2} \\ -2a-b=2-c \end{cases}$ التي تكافئ : $\begin{cases} a+b=-\frac{1}{2} \\ -2a-b=0 \end{cases}$

و منه : $a=\frac{1}{2}$ و $b=-1$ و بالتالي : $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}+2x$.

التمرين 03

✍ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{x}$ حيث a و b عددان حقيقيان. (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و كتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يشمل المنحني (C_f) النقطة $\Omega(1,e)$ و يقبل مماسا معامل توجيهه $3e$.

2) أحسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-4;5]$.

3) أكتب معادلة المماس للمنحني عند النقطة التي فاصلتها 0.

4) بين أن المنحني يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

5) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[-4;5]$ كما يلي : $g(x)=[f(x)]^2$.
استنتج جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4;5]$.

الحل

1) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

المنحني (C_f) يشمل النقطة $\Omega(1,e)$ معناه : $f(1)=e$

معامل توجيه المماس عند $\Omega(1,e)$ يساوي $3e$ معناه : $f'(1)=3e$

نحسب $f'(x)$ فنجد : $f'(x)=(ax+a+b)e^{x}$ و بالتالي نحل الجملة : $\begin{cases} f(1)=e \\ f'(1)=3e \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} (a+b)e=e \\ (2a+b)e=3e \end{cases}$ و بالتالي نجد : $a=2$ و $b=-1$ أي : $f(x)=(2x-1)e^{x}$.

2) حساب $f'(x)$: $f'(x)=2e^{x}+e^{x}(2x-1)=e^{x}(2+2x-1)=e^{x}(2x+1)$.

إشارة المشتقة من إشارة $(2x+1)$ لأن : $e^{x}>0$

جدول تغيرات الدالة f :

x	-4		$-\frac{1}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-9-4e^{-4}$	↘	$-2e^{-\frac{1}{2}}$	↗	$9e^{5}$

3) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها 0 .

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه معادلة المماس المطلوبة هي : $y=x-1$

4) نبين أن المنحني يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

حساب الدالة المشتقة الثانية فنجد $f''(x)=(2x+3)e^{x}$ تنعدم عند $-\frac{3}{2}$ و جدول إشارتها هو :

x	-4		$-\frac{3}{2}$		5
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

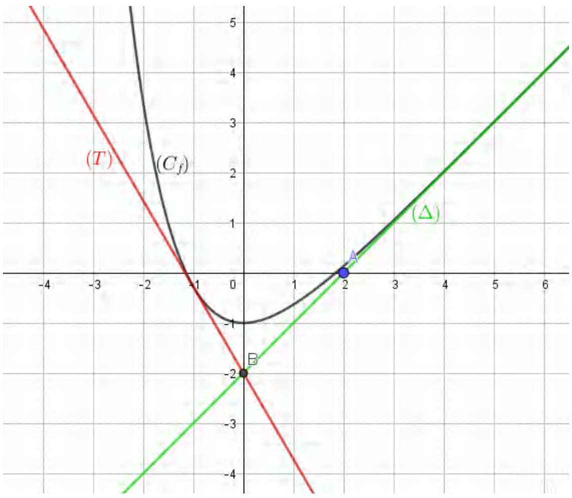
بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند $-\frac{3}{2}$ و غيرت من إشارتها فإن النقطة $\omega\left(-\frac{3}{2};-4e^{-\frac{3}{2}}\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

5) جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4;5]$ حيث : $g(x)=[f(x)]^2$.

$g'(x)=2f'(x).f(x)$ حيث : $f(x)=(2x-1)e^{x}$ و $f'(x)=(2x+1)e^{x}$.

x	4		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$81e^{-8}$	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$81e^{30}$

التمرين 04



✍ (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=ax+b+e^{-x}$ حيث : a و b عددان حقيقيان .

(Δ) المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$.

(T) هو المماس للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها -1 و معامل توجيهه هو $1-e$.

1) أكتب معادلة للمستقيم (Δ).

2) إستنتج قيمة كلا من a و b.

3) أكتب معادلة للمماس (T).

الحل

1) بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

فإن معادلة (Δ) هي : $y = ax+b$ و المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$

فيكون لدينا : $\begin{cases} 0 = 2(a)+b \\ -2 = 0(a)+b \end{cases}$ فنحصل على : $a=1$ و $b=-2$.

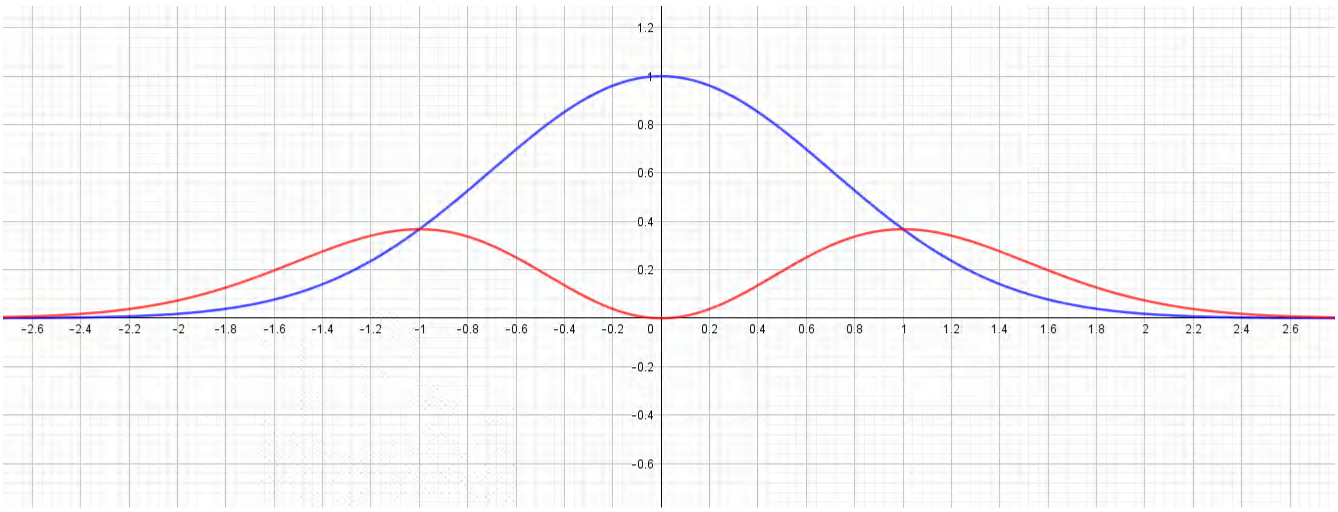
إذن : $f(x) = x-2+e^{-x}$ و معادلة (Δ) هي : $y = x-2$.

2) معادلة (T) : $y = f'(-1)(x+1)+f(-1)$ أي : $y = (1-e)(x+1)-3+e$ و بالتالي : معادلة (T) هي : $y = (1-e)x-2$.

التمرين 05

✍ f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بحيث : $f(x) = e^{-x^2}$ و $g(x) = x^2e^{-x^2}$.

و ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان لهما على الترتيب.



1) ميز (C_f) و (C_g) مع التعليل .

2) أدرس شفعية الدالتين f و g .

3) عين النهاية عند $+\infty$ و أدرس إتجاه تغيرات الدالتين f و g.

4) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g).

الحل

1) (C_f) هو المنحني الذي يشمل النقطة $A(0,1)$ لأن : $f(0) = 1$

و (C_g) هو المنحني الذي يشمل المبدأ $O(0,0)$ لأن : $g(0) = 0$.

2) شفعية الدالتين f و g :

شفعية f : من أجل $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ و منه f دالة زوجية.

شفعية g : من أجل $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ و $g(-x) = (-x)^2e^{-(-x)^2} = x^2e^{-x^2} = g(x)$ و منه f دالة زوجية.

3)أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ حيث : f و g زوجيتان.

ب) دراسة تغيرات الدالة f :

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

ج) دراسة تغيرات الدالة g : $g'(x) = 2xe^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}(x^2) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$

جدول إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

4) الوضعية النسبية : ندرس إشارة الفرق $g(x) - f(x)$.

$g(x) - f(x) = x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} = (x^2-1)e^{-x^2}$ إشارة هذا الفرق من إشارة x^2-1 لأن : $e^{-x^2} > 0$ و منه :

على المجالين $]1, +\infty[$ و $]-\infty, -1[$ يكون $x^2 - 1 > 0$ و بالتالي المنحنى (C_g) يقع فوق المنحنى (C_f).

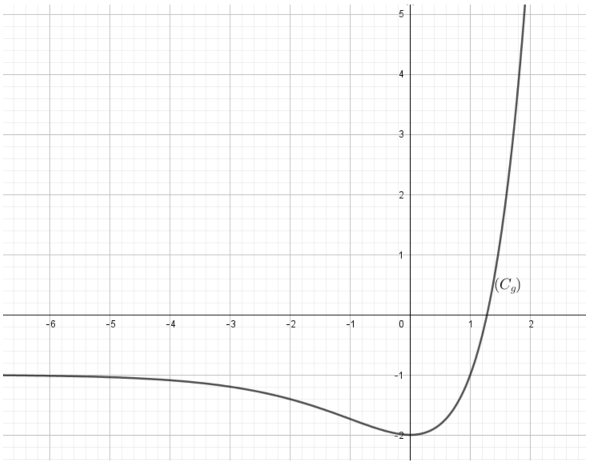
على المجال $]-1, 1[$ يكون $x^2 - 1 < 0$ و بالتالي المنحنى (C_g) يقع تحت المنحنى (C_f).

المنحنيان يتقاطعان في النقطتين $B(-1; e^{-1})$ و $C(1; e^{-1})$.

التمرين 06

✍ في الشكل المقابل (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x)=(ax+b)e^x+c$



1) بقراءة بيانية :

أ) عين $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ثم إستنتج قيمة c.

ب) عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ج) عين كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$ ثم إستنتج قيمتي كل من a و b .

2) نفرض فيما يلي: $g(x)=(x-1)e^x-1$.

أ) شكل جدول تغيرات الدالة g

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.2<\alpha<1.3$

ج) إستنتج إشارة $g(x)$.

✍ f هي الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$ ،وليكن (C_f) تمثيليها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3) أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4) بين $f(\alpha)=\alpha-1$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) أنشئ المنحني (C_f).

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

7) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=f(|x|)$

أ) بين أن h دالة زوجية .

ب)أرسم (C_h)المنحنى البياني للدالة h إعتمادا على (C_f) في نفس المعلم السابق .

الحل

I) 1) بقراءة بيانية :

أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$, و نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[(ax+b)e^x+c]=\lim\limits_{x\to-\infty}(axe^x+be^x+c)=c$.

إذن نستنتج أن : $c=-1$.

ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

ج) لدينا : $g(0)=-2$ و $g'(0)=0$

لدينا : $g(0)=-2$ أي : $(a\times0+b)e^0-1=-2$ أي : $b-1=-2$ و منه : $b=-1$.

نحسب $g'(x)$: $g'(x)=a\times e^x+e^x(ax+b)=e^x(a+ax+b)$

لدينا : $g'(0)=0$ أي : $e^0(a+a\times0-1)=0$ أي : $a-1=0$ و منه : $a=1$

إذن : $g(x)=(x-1)e^x-1$.

2) أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

ب) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $[1,2;1,3]$ و بما أن : $g(1.2)=-$ و $g(1.3)=+$ أي : $g(1.2)\times g(1.3)<0$
إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : 1.2 و 1.3 .
ج) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$
1) حساب النهايات :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=-\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}=0$.
بجوار $+\infty$ المنحنى (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .
2) لدينا : $(\Delta): y=x$, نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{e^x+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-xe^x-x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-xe^x}{e^x+1}=0$
إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و (Δ) .
ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$.
أي ندرس إشارة $\dfrac{-xe^x}{e^x+1}$ إذن إشارة الفرق من إشارة : $(-x)$.

3) دراسة إتجاه تغير الدالة f:
نحسب المشتقة $f'(x)$: $f'(x)=\dfrac{(e^x+1)-xe^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{(-x+1)e^x+1}{(e^x+1)^2}=\dfrac{-[(x-1)e^x-1]}{(e^x+1)^2}=\dfrac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$.
إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأن : $(e^x+1)^2>0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4) إثبات : $f(\alpha)=\alpha-1$.

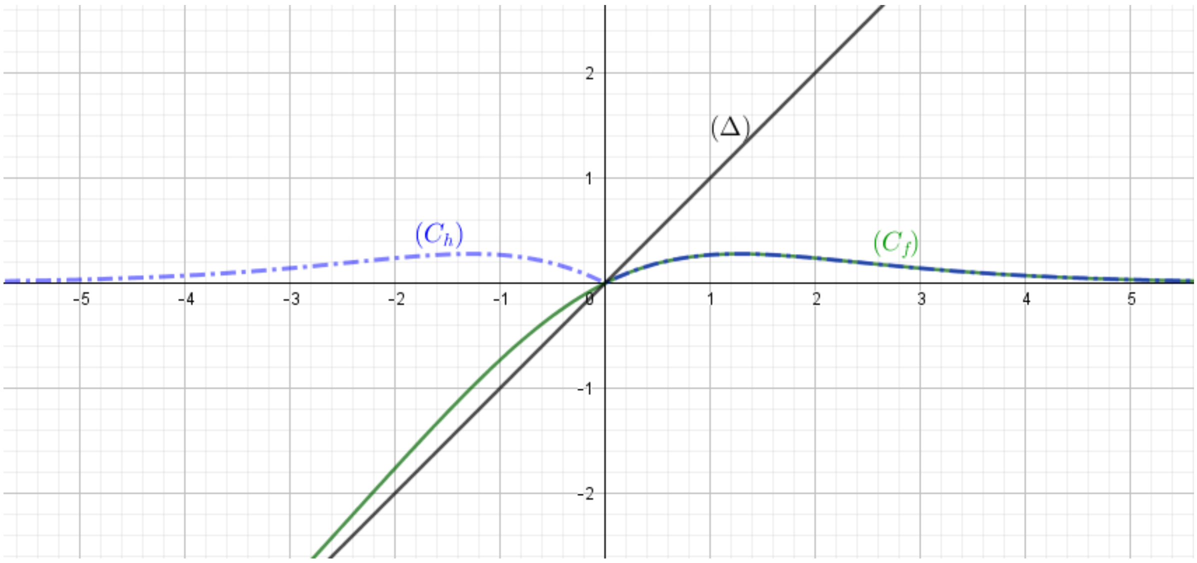
نعلم أن : $g(\alpha)=0$, أي : $(\alpha-1)e^{\alpha}-1=0$ أي : $(\alpha-1)e^{\alpha}=1$, ومنه : $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$.

لنحسب الآن $f(\alpha)$: $f(\alpha)=\frac{\alpha}{e^{\alpha}+1}=\frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\frac{\alpha}{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}=\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=\alpha\times\frac{\alpha-1}{\alpha}=\alpha-1$.

و هو المطلوب .

حصر لـ $f(\alpha)$: لدينا : $1.2<\alpha<1.3$ أي : $0.2<\alpha-1<0.3$ و منه : $0.2<f(\alpha)<0.3$.

5) الإنشاء :



6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x)=f(m)$, عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل و الذي معادلته : $y=f(m)$.

إذا كان : $m\in]-\infty;0]$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

إذا كان : $m\in]0;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ فإنّ : المعادلة تقبل حلان متمايزان .

إذا كان : $m=\alpha$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

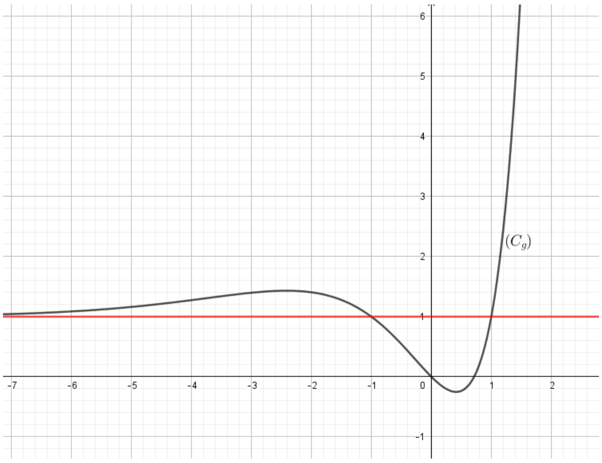
7) لدينا الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=f(|x|)$.

أ) تبيان أن الدالة h زوجية : $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$ و وبالتالي الدالة h زوجية .

إنشاء المنحنى (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $[0;+\infty[$

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب في المجال $]-\infty;0]$.



✍ لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x^2-1)e^x+1$.
(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .
يعطى جدول القيم التالي :

x	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8
g(x)	-0.17	-0.11	-0.03	0.07	0.2

1) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.
2) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.
✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+(x-1)^2e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=g(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
2) تحقق من أن : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.
3) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1,1)$.
ب) بين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المماس (T) .
ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B يطلب تعيين فاصلتها ثم أكتب معادلة للمماس (T') .
4) أرسم كلا من (T) , (T') و (C_f) .
5) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(E):(x-1)^2e^x-m-1=0$ ثلاثة حلول .

الحل

I) 1) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.
لدينا : $g(0)=(0^2-1)e^0+1=-1+1=0$ و منه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.
ولدينا : g دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0.7;0.75]$ و $g(0.70)\times g(0.75)=-0.03\times 0.07=-0.0021<0$.
و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.
و بالتالي المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.
2) إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x)=x+(x-1)^2e^x$ معرفة على $D_f=\mathbb{R}$.
1) أ) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+(x-1)^2e^x\right]=\lim_{x\to-\infty}(x+x^2e^x-2xe^x+e^x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x+(x-1)^2e^x\right] = +\infty$$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا :

$f'(x) = 1+2(x-1)e^x+(x-1)^2e^x = 1+[2x-2+(x-1)^2e^x] = 1+(2x-2+x^2-2x+1)e^x = 1+(x-1)^2e^x = g(x)$.

أي : $f'(x) = g(x)$.

إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين : $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ و f متناقصة تماما على المجال $[0;\alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) التحقق من أن : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$.

لدينا : $f(\alpha) = \alpha+(\alpha-1)^2e^\alpha$.

و لدينا : $g(\alpha) = 0$ و منه : $1+(\alpha^2-1)e^\alpha = 0$ و بالتالي : $e^\alpha = -\dfrac{1}{\alpha^2-1}$.

إذن : $f(\alpha) = \alpha+(\alpha-1)^2\times(-\dfrac{1}{\alpha^2-1})$ أي : $f(\alpha) = \alpha-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2-1} = \dfrac{\alpha^3-\alpha-\alpha^2+2\alpha-1}{\alpha^2-1}$

و بالتالي : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3-\alpha^2+\alpha-1}{\alpha^2-1} = \dfrac{\alpha^2(\alpha-1)+(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$.

تعيين حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $0.70<\alpha<0.75$ و منه : $(0.70)^2+1<\alpha^2+1<(0.75)^2+1$ و $0.70+1<\alpha+1<0.75+1$.

إذن : $\dfrac{(0.70)^2+1}{0.70+1} < \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1} < \dfrac{(0.75)^2+1}{0.75+1}$ وبالتالي : $0.85<f(\alpha)<0.92$.

3) أ) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;1)$:

$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1) = g(1)(x-1)+1 = x-1+1 = x$.

ب) تبيان أن المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}(x^2e^x-2xe^x+e^x) = 0$ $= \lim_{x\to-\infty}\left[x+(x-1)^2e^x-x\right]$ $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] =$

و منه المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

دراسة الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و المماس (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$: $f(x)-y = x+(x-1)^2e^x-x = (x-1)^2e^x$.

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ) $\quad$ (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$ $\quad$ (C_f) فوق (Δ)

تبيان أن المنحنى (C_f) يقبا مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B :

لدينا : $(T') \parallel (T)$ يعني معامل توجيه المماس (T') يساوي 1 أي : $f'(x_0)=1$

و منه : $1+(x_0^2-1)e^{x_0}=1$ وبالتالي : $(x_0^2-1)e^{x_0}=0$ و منه : $(x_0^2-1)=0$ لأن : $e^{x_0}\neq 0$ و عليه : $x_0=1$ أو $x_0=-1$.

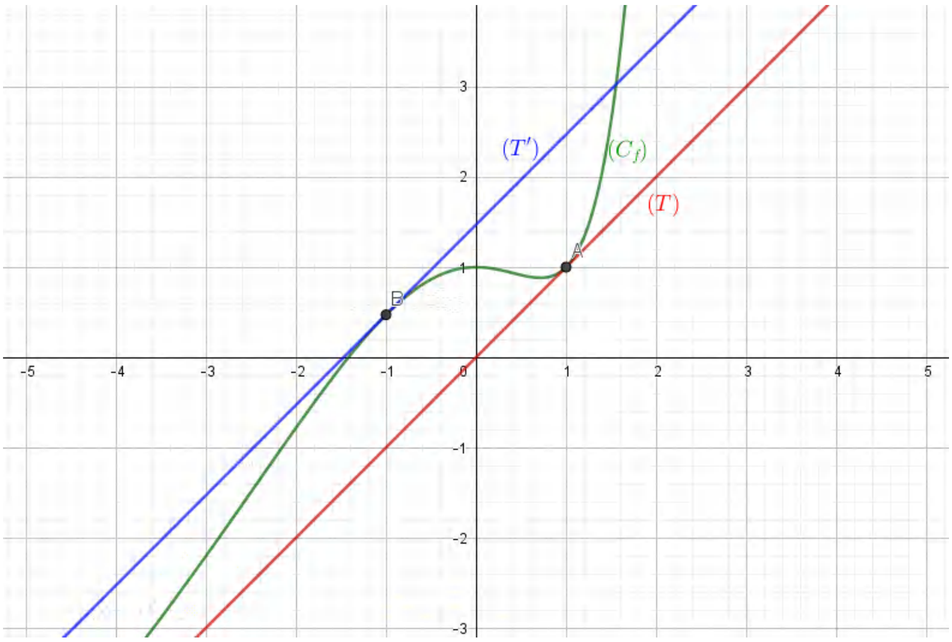
إذن (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في النقطة B ذات الفاصلة -1.

كتابة معادلة المماس (T') :

لدينا : $B(-1;-1+4e^{-1})$

إذن : $(T'): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=1\times(x+1)-1+4e^{-1}=x+4e^{-1}$.

الرسم :



تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) ثلاثة حلول:

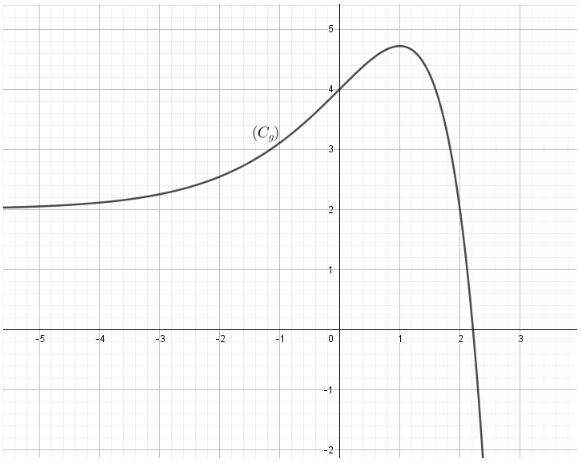
لدينا : $(x-1)^2e^x=m+1$ تكافئ : $x+(x-1)^2e^x=x+m+1$ تكافئ : $f(x)=x+m+1$.

حلول المعادلة (E) بيانيا هي فواصل النقط المشتركة بين المنحنى (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y=x+m+1$ الموازي لكل من المماسين (T) و (T').

المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول يعني : $0<m+1<4e^{-1}$ وبالتالي : $-1<m<-1+4e^{-1}$.

التمرين 08

✍ g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(2-x)e^x$.
(C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (الشكل المقابل)



1) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2.21<\alpha<2.22$.

2) بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$.

✍ نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2}{1+e^{-x}}$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، فسر النتيجة بيانيا .

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{x.g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أن : $f(-\alpha)=\alpha(\alpha-2)$ ، ثم عيّن حصرا للعدد $f(-\alpha)$.

4) (δ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ في المعلم السابق .

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x^2\right)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (δ) .

5) أنشئ كلا من المنحنى (δ) و المنحنى (C_f) (تعطى $f(-\alpha)=0.48$).

الحل

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(2-x)e^x$.

1) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2,21<\alpha<2,22$.

• الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1;3[$ و $]2.21;2.22[\subset]1;3[$ و $\begin{cases} g(2.21)\approx 0,08 \\ g(2.22)\approx -0,02 \end{cases}$ أي $g(2.21)\times g(2.22)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]1;3[$ حلا وحيدا α ، حيث $2,21<\alpha<2,22$.

بقراءة بيانية : إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2}{1+e^{-x}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) تبيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x+1}=0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

2) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{x.g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

الدالة f قابلة للأشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{2x(1+e^{-x})+x^2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\frac{x((2+(x+2)e^{-x}))}{(1+e^{-x})^2}=\frac{xg(-x)}{(1+e^{-x})^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(-\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) لدينا : $f(-\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{1+e^{\alpha}}=\dfrac{\alpha^2}{1-\dfrac{2}{2-\alpha}}=\dfrac{\alpha^2}{\dfrac{-\alpha}{2-\alpha}}=-\alpha(2-\alpha)=\alpha(\alpha-2)$.

تعيين حصر للعدد $f(-\alpha)$:

لدينا: $2{,}21<\alpha<2{,}22$ و منه $0{,}21<\alpha-2<0{,}22$ إذن $0{,}46<\alpha(\alpha-2)<0{,}48$ و بالتالي $0{,}46<f(-\alpha)<0{,}49$.

4) (γ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ في المعلم السابق .

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+e^{-x}}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)=0$.

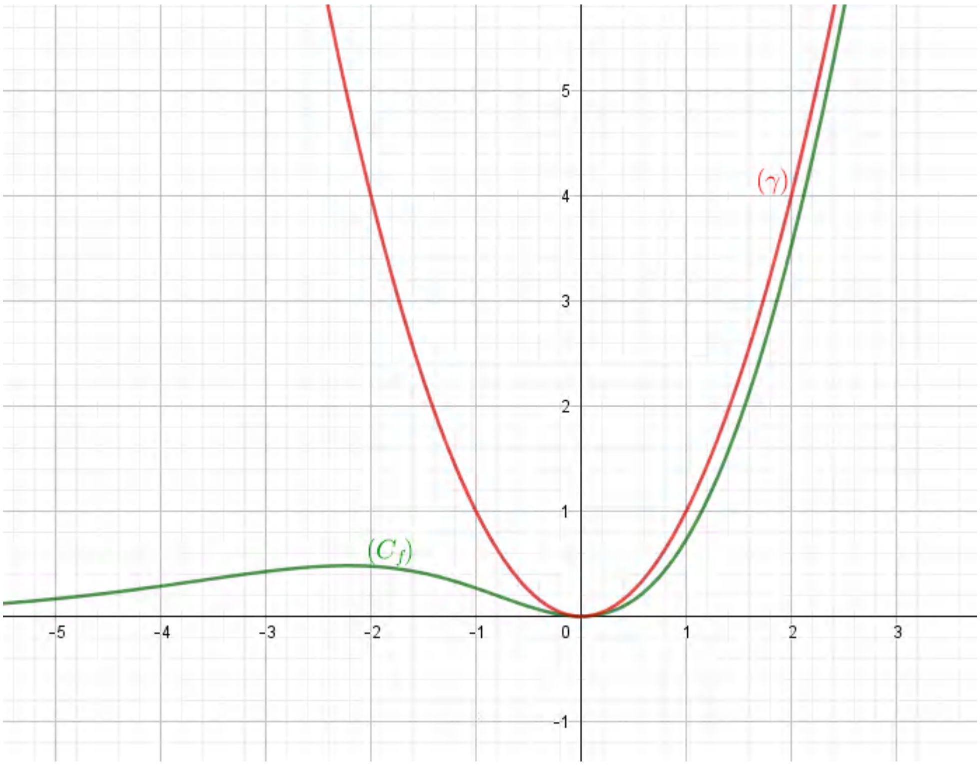
التفسير البياني : المنحنى (γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (γ) :

لدينا : $f(x)-x^2=\dfrac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $\dfrac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}\leq 0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع أسفل المنحنى

. (γ)

5) الرسم :



التمرين 09

✍ نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x - e^{-\frac{1}{2}x}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.70 < \alpha < 0.71$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

✍ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .

1) أ) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2-x)]$ ، و فسر النتيجة بيانيا .

ج) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 2$.

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \times g(x)$, ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن $f(\alpha) = 4 - \alpha - \dfrac{4}{\alpha}$, ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) احسب احداثيتي A نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب .

5) اكتب معادلة المماس T للمنحنى (C_f) في النقطة A.

6) احسب $f(2)$ و $f(2\ln\frac{1}{2})$ ، ثم ارسم كل من المستقيم (Δ) , المماس T والمنحنى (C_f).

7) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $2e^{\frac{1}{2}x} = \dfrac{m-2}{x-2}$.

الحـــل

✍ الجزء الأول

❶ دراسة تغيرات الدالة g : g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x-e^{-\frac{1}{2}x}$

أولا : حساب النهايات $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)=+\infty \text{ و } \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)=-\infty}$

ثانيا :اتجاه التغير الدالة g معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا: $\boxed{g'(x)=1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}}$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)>0$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❷ إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال : $]0,7;0,71[$ و $g(0,7)\times g(0,71)\leq 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,7<\alpha<0,71$

جدول الإشارة

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

✍ الجزء الثاني

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x$

❶ حساب نهايات الدالة f :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2\right)\left(2e^{\frac{1}{2}x}-1\right)=+\infty}$$

و $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^{\frac{1}{2}x}-4e^{\frac{1}{2}x}+2-x\right)=+\infty}$

حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]$

لدينا : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x-2+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^{\frac{1}{2}x}-4e^{\frac{1}{2}x}\right)=0}$

التفسير : المنحنى (C_f) **يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته** $y=2-x$ **بجوار** $(-\infty)$

دراسة الوضع النسبي :

يؤول إلى دراسة اشارة الفرق $f(x)-(2-x)$

لدينا : $f(x)-(2-x)=(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}$

ومن أجل كل عدد حقيقي لدينا : $e^{\frac{1}{2}x}>0$

ومنه دراسة إشارة الفرق تؤول إلى دراسة اشارة العبارة $2x-4$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(2;0)$	(C_f) فوق (Δ)

❷ **دراسة اتجاه تغير الدالة f :** الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$\boxed{f'(x)=2e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}-1=(2+x-2)e^{\frac{1}{2}x}-1=xe^{\frac{1}{2}x}-1=e^{\frac{1}{2}x}\left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)=e^{\frac{1}{2}x}g(x)}$$

بما أن $e^{\frac{1}{2}x}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعليه :

جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

❸ **إثبات ان $f(\alpha)=4-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}$:** لدينا مماسبق $g(\alpha)=0$ تكافيء $\alpha-e^{-\frac{1}{2}\alpha}=0$ ومنه $e^{-\frac{1}{2}\alpha}=\alpha$ إذن $e^{\frac{1}{2}\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

بالتعويض نجد : $\boxed{f(\alpha)=(2\alpha-4)\dfrac{1}{\alpha}+2-\alpha=\dfrac{2\alpha}{\alpha}-\dfrac{4}{\alpha}+2-\alpha=4-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}}$

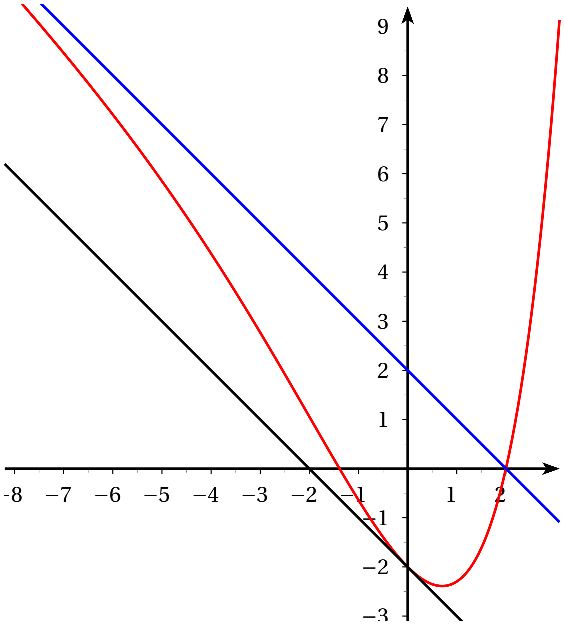
✍ **حصر** $f(\alpha)$:

لدينا $0,7<\alpha<0,71$ ومنه : $3,29<4-\alpha<3,3$ و $-5,71<-\dfrac{4}{\alpha}<-5,61$ إذن : $\boxed{-2,42<f(\alpha)<-2,31}$

✍ **احداثيي النقطة A نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب :** لدينا : $f(0)=-2$ ومنه $\boxed{(C_f)\cap(y'y)=\{A(0;-2)\}}$

✍ **معادلة المماس عند A:** $\boxed{(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x-2}$

✍ الإنشاء



✍ **المناقشة البيانية:**

لدينا: $\frac{m-2}{x-2} = 2e^{\frac{1}{2}x}$ تكافيء $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} = m-2$

أي $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2 = m$ وعليه $\boxed{f(x) = m-x}$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m-x$

✍ من أجل $m < -2$ المعادلة لاتقبل حلولا

✍ من أجل $-2 < m < 2$ المعادلة تقبل حلن مختلفين في الإشارة

✍ من أجل $m = -2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا $x = 0$

✍ من أجل $m > 2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

التمرين 10

✍ لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^{-x}+2$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38, -0.37[$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$.

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x+1-xe^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) .

1) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة f .

3) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

5) بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

6) بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

7) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) (نأخذ $\alpha = -0.375$) .

✍ (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي .

1) عين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة التالية : $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$.

الحل

✍ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

.1 $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x} - e^{-x} + 2\right) = \boxed{2}$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = (2-x)e^{-x}$ ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(2-x)$ وجدول تغيراتها يعطى بالشكل :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{-2}+2$	$\searrow$	2

.2 إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38, -0.37[$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty, 2[$ ومنه على المجال : $]-0.38, -0.37[$.
وبما أن $g(-0.38) \times g(-0.37) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38, -0.37[$.

.3 إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

.1 لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} + 2$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

.2 دراسة تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ ولدينا ايضا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x-1]=\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^{-x}=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4. لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x+1)$

لدينا $f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ ومنه فإن إشارة الفرق هي عكس إشارة x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-(2x+1)$		$+$	$\|$	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	$\|$	(C_f) تحت (Δ)	

5. إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f''(x)=g'(x)$ ومنه

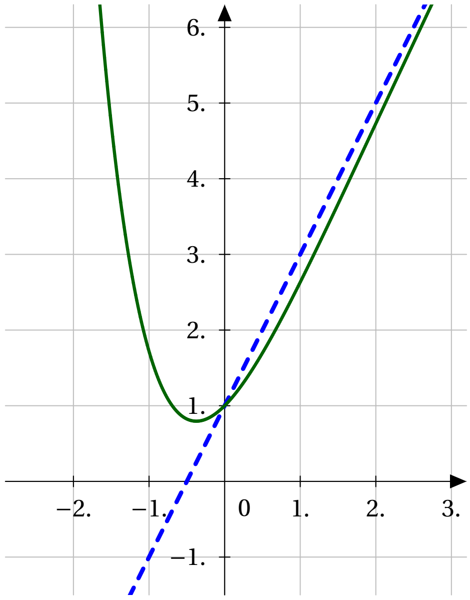
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $\left(2;5-\frac{2}{e^2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

6. إثبات أن : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

$g(\alpha)=0$ تكافئ $e^{-\alpha}=-\dfrac{2}{\alpha-1}$ ومنه: $f(\alpha)=2\alpha+1\alpha-e^{-\alpha}=2\alpha+1+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

7. رسم المنحنى (C_f)



✍ (Δ_m) مستقيم معادلته $y=2x+m$ حيث m عدد حقيقي

1. تعيين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

المستقيم $y=2x+m$ مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة x_0 منه يعني : $f'(x_0)=2$ اي أن $g(x)=2$ ومنه $(x-1)e^{-x}=0$ وبالتالي $x_0=1$

لدينا : $f(1)=3-e^{-1}$ ومنه معادلة المماس هي $y=2x+1-e^{-1}$ بالمطابقة نجد $m=1-e^{-1}$

2. المناقشة البيانية :

$\frac{x}{e^x}+1-m=0$ يعني $m=-xe^{-x}+1$ بإضافة $2x$ للطرفين نجد $m+2x=-xe^{-x}+1+2x$ أي أن $m+2x=f(x)$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m), لدينا عندئذ :

- ✍ إذا كان $m\in]-\infty,1-e^{-1}[$ المعادلة لا تقبل حلولا .
- ✍ إذا كان $m=1-e^{-1}$ للمعادلة حل مضاعف .
- ✍ إذا كان $m\in]1-e^{-1},1[$ للمعادلة حلان .
- ✍ إذا كان $m>1$ للمعادلة حل وحيد.

التمرين 11

✍ g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\mathrm{e}^{-x}+x-1$

1) أحسب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geqslant 0$، استنتج أنّ: $\mathrm{e}^{-x}+x\geqslant 1$.

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}+x}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$.

2) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسر النتيجتين بيانيا.

3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1+x)}{(\mathrm{e}^{-x}+x)^2}$.

4) أدرس اشارة $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5) أكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة O.

6) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$، ثم استنتج اشارة $x-f(x)$.

7) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

8) أنشئ (Δ) و (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

9) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $m=\dfrac{xe^x}{xe^x+1}-1$.

الحل

1. حساب $g'(x)$ تعيين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+1$

$g'(x)\geqslant 0$ يكافئ $-e^{-x}+1\geqslant 0$ و $g'(x)\leqslant 0$ يكافئ $-e^{-x}+1\leqslant 0$

يكافئ $e^{-x}\leqslant 1$ و يكافئ $e^{-x}\geqslant 1$

يكافئ $e\leqslant 1$ و يكافئ $-x\geqslant 0$

يكافئ $x\geqslant 0$ و يكافئ $x\leqslant 0$

إذن إذا كان $x\in]-\infty;0]$ فإن الدالة g متناقصة تماماً، و إذا كان $x\in[0;+\infty[$ فإن الدالة g متزايدة تماماً

2. تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geqslant 0$

من أجل $x\in]-\infty;0]$: $g(x)\geqslant g(0)$ لأن g متناقصة على $]-\infty;0]$ و منه $g(x)\geqslant 0\cdots(1)$

من أجل $x\in[0;+\infty[$: $g(x)\geqslant g(0)$ لأن g متزايدة على $[0;+\infty[$ و منه $g(x)\geqslant 0\cdots(2)$

من (1) و (2) ينتج أن $g(x)\geqslant 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

✍ استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x}+x\geqslant 1$

لدينا: $g(x)\geqslant 0$ يكافئ $e^{-x}+x-1\geqslant 0$ و منه $e^{-x}+x\geqslant 1$

1. التحقق من أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$

لدينا:

$$f(x)=\frac{x}{e^{-x}+x}=\frac{(x)\times 1}{(x)\times(\dfrac{e^{-x}}{x}+1)}=\frac{1}{\dfrac{e^{-x}}{x}+1}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$$

2. حساب النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{xe^x}=-\infty$

و بالتالي $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}=0^-$ أي $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0^-$

$\lim_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{xe^x}=1$

و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}=1$ أي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$

✍ التفسير البياني:

✍ عند $-\infty$: $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيم مقاربا أفقيا (Δ) معادلته: $y=0$ و $(\mathscr{C}_f)$ تحت (Δ)

✍ عند $+\infty$: $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيم مقاربا أفقيا معادلته: $y=1$.

3. f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\frac{e^{-x}+xe^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}=\frac{1(e^{-x}+x)-(-e^{-x}+1)(x)}{(e^{-x}+x)^2}=f'(x)$ إذن $f'(x)=\frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x}+x)^2}$

4. دراسة إشارة $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

لدينا $f'(x)=\frac{e^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}(x+1)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x+1$ لأن $e^{-x}>0$ و المقام موجب تماما، اذن :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$\frac{1}{1-e}$	↗	1

5. معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة O:

لدينا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$، إذن معادلة المماس هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x$

6. التحقق من أن $x-f(x)=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$

$$x-f(x)=x-\frac{x}{e^{-x}+x}=\frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x}=\frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x-1+1}=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

✍ إشارة $x-f(x)$:

لدينا $g(x)\geqslant 0$ و منه $g(x)+1\geqslant 1$ و منه $g(x)+1>0$، إذن إشارة $x-f(x)$ من إشارة x

إذا كان $x<0$ فإن $x-f(x)<0$ ،

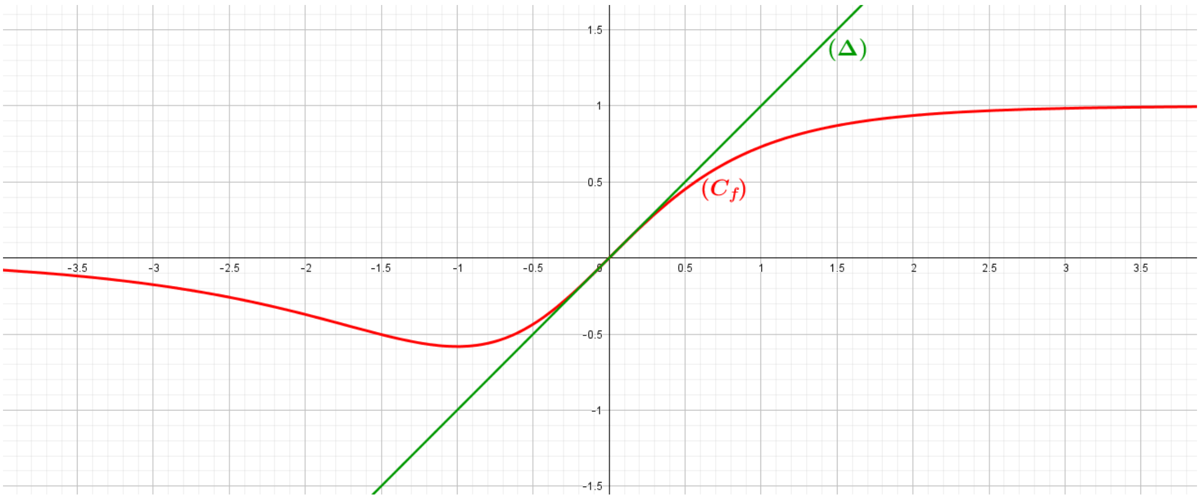
$x>0$ فإن $x-f(x)>0$

و إذا كان $x=0$ فإن $x-f(x)=0$.

7. الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$:

$x<0$	$x=0$	$x>0$
(C_f) فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة O	(C_f) تحت (Δ)

8. رسم (C_f) و (Δ)



9. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $\frac{xe^x}{xe^x+1}-1=m$

المناقشة: لدينا $\frac{xe^x}{xe^x+1}-1=m$ يكافئ $\frac{e^x}{e^x}\frac{x}{x+e^{-x}}=m+1$ يكافئ $\frac{x}{x+e^{-x}}=m+1$ أي $f(x)=m+1$، حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m+1$، نميز الحالات التالية:

- ✍ إذا كان $m+1\geqslant 1$ أي $m\geqslant 0$ ، المعادلة ليس لديها حلول
- ✍ إذا كان $0<m+1<1$ أي $-1<m<0$، للمعادلة حل وحيد موجب
- ✍ إذا كان $m+1=0$ أي $m=-1$، للمعادلة حل وحيد معدوم $x_0=0$
- ✍ إذا كان $\frac{1}{1-e}<m+1<0$ أي $\frac{1}{1-e}-1<m<-1$، للمعادلة حلين سالبين متمايزين
- ✍ إذا كان $m+1=\frac{1}{1-e}$ أي $m=\frac{1}{1-e}-1$، للمعادلة حل واحد سالب هو $x_1=-1$
- ✍ إذا كان $m+1<\frac{1}{1-e}$ أي $m<\frac{1}{1-e}-1$، المعادلة ليس لديها حلول .

التمرين 12

✍لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

نضع $a=1\,,\ b=0\,,\ c=-3$.

2) أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

3) ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$
5) عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .
6) أرسم (T) و (C_f) .
7) m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2-3+me^x=0$.

الحل

✍لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$.
حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

$f(0)=-3$ و هذا يعني $c=-3$

و لدينا $f'(x)=(2ax+b)\ e^{-x}-\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$

$f'(0)=3$ يعني أن $b-c=3$ و منه $b=0$.

$f\left(\sqrt{3}\right)=0$ يعني ان $f\left(\sqrt{3}\right)=(3a-3)e^{-\sqrt{3}}=0$ و منه $a=1$.

2) نضع $a=1\ ,\ b=0\ ,\ c=-3$ تصبح $f(x)=\left(x^2-3\right)e^{-x}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3\right)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ لأنه بوضع $x=2t$

نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4t^2}{e^{2t}}\right]=4\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{t}{e^t}\right)^2=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)e^{-x}=+\infty$.

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

حساب المشتقة : $f'(x)=(2x)e^{-x}-e^{-x}(x^2-3)=\left(-x^2+2x+3\right)e^{-x}$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $\left(-x^2+2x+3\right)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ و متزايدة على المجال $[-1;3]$.

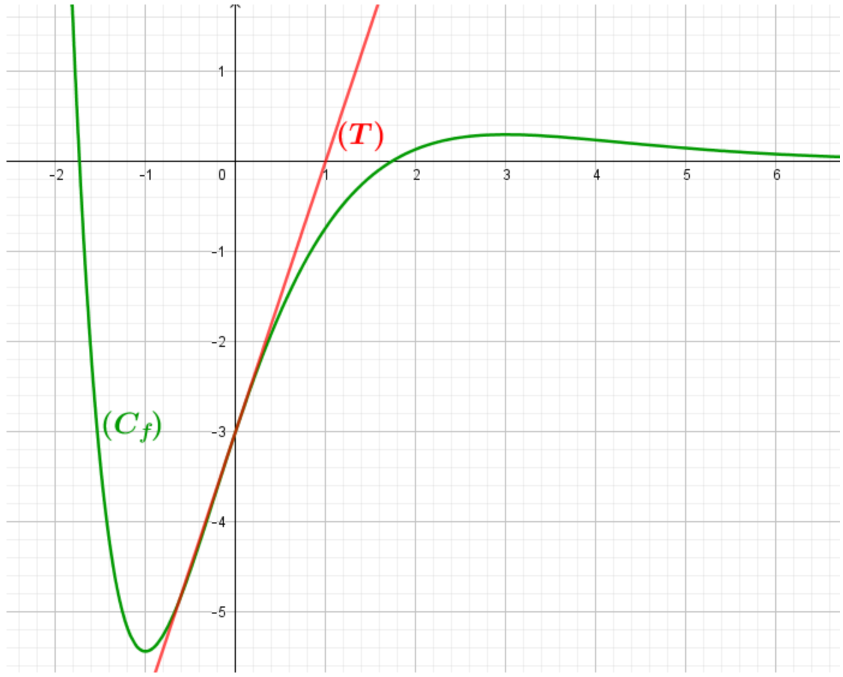
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\dfrac{6}{e^3}$	$\searrow$	0

4) كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$.

5) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$. اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B\left(\sqrt{3};0\right)$ و $C\left(-\sqrt{3};0\right)$.

6) رسم (T) و (C_f)



7) m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2-3+me^x=0$ المعادلة تكافئ $me^x=-(x^2-3)$ أي ان $-m=(x^2-3)e^{-x}$ يكافئ $-m=f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=-m$.

المناقشة :

✍ لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

✍ لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

✍ لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين.

✍ لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

✍ لما $0\geq -m>-3$ أي ان $0\leq m<3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

✍ لما $\frac{6}{e^3}>-m>0$ أي ان $-\frac{6}{e^3}<m<0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

✍ لما $-m=\frac{6}{e^3}$ أي أن $m=-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة.

✍ لما $-m>\frac{6}{e^3}$ أي ان $m<-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2021 و لا تنسونا من خالص دعائكم