# تمارين الأعداد المركبة

## في البكالوريا

**من 2008 إلى 2019**

شعبة : تقني رياضي

✍ كتابة : خالد بخاخشة

آخر تحديث : جانفي 2020

## التمرين الأول

[باك 2008][م1]

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ المعرفة كمايلي :

$$z^3+(2-4i)z^2-(6+9i)z+9(-1+i)=0 \quad .............. \quad (*)$$

1) بيَن أن $z_0=3i$ هو حل للمعادلة $(*)$ .

2) حل ، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(*)$ ثم أكتب حلولها $z_0$ ، $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي ، حيث $|z_1|<|z_2|$.

3) لتكن $A$ ، $B$ و $C$ صور الحلول $z_0$ ، $z_1$ و $z_2$ على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

عيَن النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ .

4) عيَن المجموعة $(E)$ للنقط $M$ حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$ .

بيَن أن النقطة $A$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$ ، ثم أنشئ $(E)$ .

5) تحقق أن النقط $O$ ، $B$ و $G$ في إستقامية ثم عيَن صورة المجموعة $(E)$ بالتحاكي الذي مركزه النقطة $O$ و يحول $B$ إلى $G$ محددا عناصره المميزة .

## التمرين الثاني

[باك 2008][م2]

$r$ عدد حقيقي موجب تماما و $\theta$ عدد حقيقي كيفي .

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ :

$$z^2-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z-r^2=0$$

أكتب الحلين على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين $A$ و $B$ صورتي الحلين .

عيَن $\theta$ حتى يكون المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع .

## التمرين الثالث

[باك 2009][م1]

1) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2-2z+2=0$.

بـ- إستنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول $z$ : $(\bar{z}+3)^2-2(\bar{z}+3)+2=0$ ، حيث $\bar{z}$ مرافق $z$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

النقط $A$ ، $B$ و $M$ لواحقها $(1-i)$ ، $(1+i)$ و $z$ على الترتيب.

أ- عيَن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما $k$ يمسح $\mathbb{R}^+$ .

بـ- عيَن $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $|z-1+i|=|z-1-i|$.

## التمرين الرابع

[باك 2009][م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2-6z+18=0$.

2) ليكن العدد المركب $z_1$ حيث : $z_1=3-3i$ .

أ- أكتب $z_1$ على الشكل الأسي.

بـ- أحسب طويلة العدد $z_3$ و عمدة له حيث : $z_1\times z_3=6\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ . استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ .

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط $A$ ، $B$ و $C$ لواحقها $3+3i$ ، $3-3i$ و $\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ على الترتيب.

أ- عيّن قيم العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تقبل الجملة المثقلة $\left\{(A,1);(B,-1);(C,\alpha)\right\}$ مرجحا نرمزله بـ $G_\alpha$.

بـ- عيّن مجموعة النقط $G_\alpha$ لما يتغيّر $\alpha$ في $\mathbb{R}^*$.

## التمرين الخامس

[باك 2010][م1]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z-3+2i)\left(z^2+6z+10\right)=0$.

2) علم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط $A$ ، $C$ ، $D$ و $I$ لواحقها $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب.

3) $z$ عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\dfrac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$.

أ- بيّن أن الجملة تكافئ : $\dfrac{z-3+2i}{z-1}=i$ ، ثم عيّن قيمة $z$.

بـ- $B$ النقطة التي لاحقتها $z_B=3$ ، تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

جـ- لتكن $J$ النقطة التي لاحقتها $z_J$ حيث : $z_J=1-2i$.

أكتب على الشكل الأسي العدد المركب $z$ حيث : $z=\dfrac{z_A-z_J}{z_B-z_J}$.

تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

## التمرين السادس

[باك 2010][م2]

1) أ- أكتب على الشكل الأسي العدد المركب $a$ حيث : $a=-2+2i\sqrt{3}$.

بـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2=-2+2i\sqrt{3}$.

2) ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها $z_A=-2$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$ و $z_C=1+\sqrt{3}i$ على الترتيب.

أ- أحسب طويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له.

بـ- استنتج طبيعة المثلث $ABC$.

3) لتكن $(E)$ مجموعة النقط ذات اللاحقة $z$ حيث $\arg\left(\overline{z}+2\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

أ- تحقق أن $B$ تنتمي إلى $(E)$.

بـ- عيّن المجموعة $(E)$.

## التمرين السابع

[باك 2011][م1]

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)$ ........ $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ ، ثم أكتب حلولها على الشكل المثلثي.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ .

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ و $z_C=\sqrt{3}-i$ على الترتيب.

نضع : $L=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

أ ـ أكتب $L$ على الشكل الأسي.

بـ ـ أثبت أن $z_A-z_B=L\left(z_C-z_B\right)$ ، ثم استنتج أن $A$ صورة $C$ بتحويل نقطي يطلب تعيينه و تحديد عناصره المميزة.

جـ ـ استنتج نوع المثلث $ABC$ ثم أحسب مساحته.

## التمرين الثامن

[باك 2011][م2]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ .

العدد المركب $L$ المعرف كما يلي : $L=\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$ .

1) أ ـ أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

بـ ـ بيَن أن $L^{12}+1=0$ ، ثم أحسب : $\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+\left(5+3i\right)^{12}$ .

جـ ـ $n$ عدد طبيعي فردي و $p$ عدد طبيعي زوجي. أثبت أن : $L^{4n}+L^{4p}=0$ .

2) أ ـ النقطتان $A$ و $B$ لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=5+3i$ و $z_B=5-3i$ .

عيَن اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة $A'$ صورة النقطة $A$ بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة $B$ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$ .

بـ ـ عيَن $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مركز ثقل المثلث $ABA'$ .

## التمرين التاسع

[باك 2012][م1]

1) عيَن العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ بحيث : $\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\3z_1-z_2=8+8i\end{cases}$ .

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط $A$ ، $B$ و $\Omega$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=3+2i$ ، $z_B=-3$ و $z_\Omega=1-2i$ .

أ ـ أثبت أن : $z_B-z_\Omega=i\left(z_A-z_\Omega\right)$ .

بـ ـ عيَن طبيعة المثلث $\Omega AB$ .

3) $h$ التحاكي الذي مركزه النقطة $A$ و نسبته 2 .

أ ـ عيَن الكتابة المركبة للتحاكي $h$ .

بـ ـ عيَن $z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $\Omega$ بالتحاكي $h$ .

جـ ـ عيَن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\left\{(A,1);(B,-1);(C,1)\right\}$ .

د ـ بيَن أن $ABCD$ مربع.

4) $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$ .

أ ـ تحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$ ، ثم عيَن طبيعة $(E)$ و عناصرها المميزة.

بـ ـ أنشئ المجموعة $(E)$ .

## التمرين العاشر
[باك 2012][م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

$A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ النقط التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ ، $z_C=-1-\sqrt{3}i$ و $z_D=-1+\sqrt{3}i$.

أ- أكتب كلا من $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ و $z_D$ على الشكل الأسي.

بـ- تحقق أن: $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين $(AC)$ و $(BD)$ متعامدان.

3) $z_n$ العدد المركب الذي طويلته $\dfrac{1}{2^n}$ و $\dfrac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث $n$ عدد طبيعي.

$L_n$ العدد المركب المعرف بـ: $L_n=z_D\times z_n$.

أ- أكتب كلا من $L_0$ و $L_1$ على الشكل الجبري.

بـ- $(u_n)$ المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $u_n=|L_n|$.

- أثبت أن المتتالية $(u_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

- $M_0$ ، $M_1$ ، ...... ، $M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0$ ، $L_1$ ، ...... ، $L_n$ على الترتيب.

أحسب، بدلالة $n$ ، المجموع $S_n$ حيث: $S_n=\|\overrightarrow{OM_1}\|+\|\overrightarrow{OM_2}\|+...........+\|\overrightarrow{OM_n}\|$

- جد نهاية $S_n$ لما يؤول $n$ إلى $+\infty$.

## التمرين الحادي عشر
[باك 2013][م1]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $2z^2+6z+17=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-4$ ، $z_B=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$ و $z_C=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i$.

أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$.

3) أ- عين $z_D$ و $z_E$ لاحقتي النقطتين $D$ و $E$ على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه $A$.

بـ- عين $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\|=10\sqrt{2}$.

4) $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي، ذات اللاحقة $z$ حيث: $\arg(z+4)=\dfrac{\pi}{4}$

تحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى $(\Gamma_2)$ ، ثم عين المجموعة $(\Gamma_2)$.

## التمرين الثاني عشر
[باك 2013][م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-5+i\sqrt{3}$.

$S$ التشابه المباشر الذي يحول $A$ إلى $C$ و يحول $O$ إلى $B$.

- جد العبارة المركبة للتشابه $S$ ، ثم عين العناصر المميزة له.

3) أ- عين $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$.

بـ- أكتب العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABD$.

جـ- عيّن المجموعة $(\Gamma)$ للنقط $M$ من المستوي حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

## التمرين الثالث عشر

[باك 2014][م1]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z-i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$ .

أ- أكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

بـ- هل توجد قيم للعدد الطبيعي $n$ يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك.

3) أ- عيّن العبارة المركبة للتشابه $S$ الذي مركزه $A$ و يحول $B$ إلى $C$، محددا نسبته و زاويته.

بـ- استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

4) أ- عيّن العناصر المميزة لـ $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ و التي تحقق : $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=5$

بـ- عيّن $(E')$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي لاحقتها $z$ حيث : $|z-z_1|=|z-z_3|$.

## التمرين الرابع عشر

[باك 2014][م2]

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطة $A$ ذات اللاحقة $z_0=1+i$ .

1) أ- عيّن ثم أنشئ $(\gamma)$ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_0+2e^{i\theta}$ و $\theta$ يمسح $\mathbb{R}$ .

بـ- عيّن ثم أنشئ $(\gamma')$ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و $k$ يمسح $\mathbb{R}^+$ .

جـ- عيّن إحداثيات نقطة تقاطع $(\gamma)$ و $(\gamma')$ .

2) نسمي $B$ النقطة التي لاحقتها $z_1$ حيث : $z_1=z_0+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ .

أ- عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1-z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $OAB$ .

بـ- عيّن $z_2$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ .

جـ- عيّن العددين $\alpha$ و $\beta$ بحيث تكون النقطة $O$ مرجحا للجملة $\left\{(A,\alpha);(C,\beta)\right\}$ و $\alpha+\beta=\sqrt{2}$ .

د- عيّن ثم أنشئ $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ .

## التمرين الخامس عشر

[باك 2015][م1]

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين $A$ و $B$ اللتين لاحقتيهما على الترتيب $z_A$ و $z_B$ حيث : $z_A=-1-i$ و $z_B=3+3i$ .

1) أ- أكتب $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي.

بـ- $n$ عدد طبيعي، عيّن قيم $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا .

جـ- $z$ عدد مركب حيث $\frac{z}{z_A}=4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، أحسب طويلة العدد $z$ و عمدة له، ثم أكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري.

د- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ .

2) أ ـ أحسب $z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

بـ ـ أحسب $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$ ، ثم بيّن أن $ABDC$ مربع .

## التمرين السادس عشر

**[باك 2015] [م2]**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2-4(\sin\theta)z+4=0$ ......... $(I)$ ، حيث $\theta$ وسيط حقيقي .

2) من أجل $\theta=\frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة $(I)$ بـ $z_1$ و $z_2$ . أكتب $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي .

3) نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=3\sqrt{3}+i$ .

أ ـ أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

بـ ـ استنتج النقطة $C$ هي صورة النقطة $B$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ يطلب تعيين نسبته و زاوية له .

جـ ـ عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثم حدد طبيعة الرباعي $ABDC$ .

4) أ ـ عيّن $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف مع $z\neq z_B$ .

بـ ـ عيّن $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقيا مع $z\neq z_B$ .

## التمرين السابع عشر

**[باك 2016] [م1]**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$ .

2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقطتين $A$ و $B$ لاحقتاهما على الترتيب :

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i$ و $z_B=\overline{z_A}$ .

أ ـ أكتب كلا من $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي .

بـ ـ بيّن أن : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$ .

جـ ـ عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا .

3) $f$ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ لاحقتها $z'$ حيث : $z'=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$ .

أ ـ عيّن طبيعة التحويل النقطي $f$ و عناصره المميزة .

بـ ـ أحسب $z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالتحويل $f$ .

جـ ـ عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ حتى تكون $O$ مركز ثقل الرباعي $ABCD$ .

## التمرين الثامن عشر

**[باك 2016] [م2]**

1) أ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(2z-\sqrt{2})(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0$ .

بـ ـ أكتب الحلول على الشكل الأسي .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ .

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب: $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $c=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ .

أ- علم النقط $A$ ، $B$ و $C$ في المعلم السابق.

ب- نعتبر النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ و نسبته 3 و زاويته $\pi$ .

و النقطة $E$ صورة النقطة $C$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ .

- أحسب اللاحقتين $d$ و $e$ للنقطتين $D$ و $E$ على الترتيب.

3) نضع: $z=\frac{d-b}{e-b}$ .

أ- أكتب العدد $z$ على الشكل المثلثي.

ب- نعتبر النقطة $I$ منتصف القطعة $[DE]$ ، $F$ نظيرة النقطة $B$ بالنسبة للنقطة $I$ . ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

## التمرين التاسع عشر

[باك 2017] [م1]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-1$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=-i$ .

1) أكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

2) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $C$ و يحول $B$ إلى $A$ .

3) نعتبر النقطة $D$ نظيرة $B$ بالنسبة إلى $C$ و النقطة $E$ صورة النقطة $D$ بالتشابه $S$.

أ- عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ ، ثم تحقق أن: $z_E=1-2i$ حيث $z_E$ لاحقة النقطة $E$ .

ب- حدد طبيعة الرباعي $ADEB$ .

4) $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ . ( $M$ تختلف عن $A$ و $B$ )

حيث: $\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ .

تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم حدد طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و أنشئها.

## التمرين العشرون

[باك 2017] [م2]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=\frac{1}{2}(1-i)$ و $z_D=\overline{z_C}$ .

1) أكتب $z_A$ و $z_C$ على الشكل الأسي، ثم استنتج الشكل الأسي لكل من $z_B$ و $z_D$ .

ب- عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي تحقق: $(z_A)^n=(z_B)^n$ .

2) أ- جد نسبة و مركز التحاكي $h$ الذي يحول $D$ إلى $A$ و يحول $C$ إلى $B$ .

ب- أحسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$ .

3) أحسب $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A,2);(B,2);(C,-1);(D,-1)\}$ ،

4) لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$ .

بيّن أن النقطة $A$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم حدد طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و عناصرها المميزة و أنشئها.

## التمرين الواحد و العشرون

[باك 2017] [د إ] [م1]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z-4)(z^2-2z+4)=0$.

II) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$ .

1) أكتب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

2) أ- عيّن لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ و زاويته $\dfrac{2\pi}{3}$ .

ب- عيّن طبيعة الرباعي $ABDC$ .

3) من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $z_n=(z_A)^n+(z_B)^n$

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $z_n=2^{n+1}\times\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $t_n=z_{6n}$

عبّر عن $t_n$ بدلالة $n$ ثم أحسب $P_n$ بدلالة $n$ حيث : $P_n=t_0\times t_1\times t_2\times......\times t_n$ .

## التمرين الثاني و العشرون

[باك 2017] [د إ] [م2]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.

II) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1+\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$ .

1) بيّن أن $z_B-z_A=i\,(z_C-z_A)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ و أحسب مساحته.

2) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد $L$ حيث : $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_C}$ .

ب- بيّن أن : $L=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ .

3) نعتبر التحويل النقطي $S$ الذي يحول النقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ إلى النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ و المعرّف بـ:

$z'=(z-z_B)L+z_B$ .

- بيّن أن $S$ تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة.

4) لتكن النقط $A'$ ، $B'$ و $C'$ صور النقط $A$ ، $B$ و $C$ على الترتيب بالتحويل $S\circ S$ .

- أحسب مساحة المثلث $A'B'C'$ .

## التمرين الثالث و العشرون

[باك 2018] [م1]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

II) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن النقطتين $A$ و $B$ لاحقتاهما: $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_B=\overline{z_A}$ .

1) أكتب على الشكل الأسي كلا من العددين المركبين $z_A$ و $\dfrac{1}{z_B}$ ، ثم بيّن أن العدد $\left(\dfrac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف.

2) لتكن النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالتحاكي $h$ الذي مركزه $\omega$ ذات اللاحقة $z_\omega=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و نسبته $-3$ .

- بيّن أن لاحقة النقطة $C$ هي : $z_C=-\sqrt{2}+i\,3\sqrt{2}$ .

3) عيّن لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ .

4) أ ـ بيّن أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ACD$ .

ب ـ جد لاحقة النقطة $E$ بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا .

## التمرين الرابع و العشرون

[باك 2018] [م2]

I) أ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $4z^2 - 2z + 1 = 0$ ........ $(E)$.

ب ـ أكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي، حيث $z_1$ و $z_2$ حلا المعادلة $(E)$ .

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 4$ ، $z_B = 1+i\sqrt{3}$ و $z_C = 1-i\sqrt{3}$ .

1) أحسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم حدد طبيعة المثلث $ABC$ .

ب ـ استنتج أن $B$ هي صورة $C$ بدوران مركزه $A$ يطلب تعيين زاويته .

2) جد لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $A$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$ .

3) حدد طبيعة $(\gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ التي تحقق: $\left|iz + \sqrt{3} - i\right| = \left|z - 1 + i\sqrt{3}\right|$ .

4) بيّن أن النقطة $G$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ تنتمي إلى $(\gamma)$ .

## التمرين الخامس و العشرون

[باك 2019][م1]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 1+i$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

$(\Gamma)$ الدائرة التي مركزها $A$ و نصف قطرها 1 .

1) أ ـ تحقق أن النقطة $C$ من الدائرة $(\Gamma)$ .

ب ـ عين قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ ، ثم استنتج أن $C$ صورة $B$ بالدوران $r$ الذي مركزه $A$ يُطلب تعيين زاويته .

2) $S$ التشابه المباشر الذي يحول النقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ إلى النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث :

$$z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

أ ـ حدد العناصر المميزة للتشابه $S$ .

ب ـ عيّن $z_D$ لاحقة $D$ صورة $B$ بالتشابه $S$ .

3) ما هي نسبة التحاكي $h$ الذي مركزه $A$ حيث: $S = h \circ r$ ؟ استنتج أن النقط $A$ ، $C$ و $D$ في إستقامية.

4) $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ ، حيث: $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$ .

تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى $(E)$ ، ثم حدد طبيعة المجموعة $(E)$ .

I) أ- تحقق أن : $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2=16-8\sqrt{3}$ .

ب- أكتب على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين $L_1$ و $L_2$ للعدد المركب $z$ حيث : $z=-16\sqrt{3}-16i$ .

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}+4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_B=\frac{1}{2}iz_A$ و $z_C=-\frac{1}{4}z_A$ .

1) أكتب $z_A$ على الشكل الجبري ، ثم بين أن : $z_A=4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ .

2) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

3) $S$ التشابه المباشر الذي يحول $A$ إلى $B$ و $B$ إلى $C$ .

لتكن $M'$ النقطة ذات اللاحقة $z'$ صورة النقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ بالتشابه $S$ .

أ- بين أن : $z'=\frac{1}{2}iz$ .

ب- حدد العناصر المميزة للتشابه $S$ .

4) $G$ النقطة ذات اللاحقة $z_G$ مرجح الجملة $\left\{(A;2),(B;-2),(C;4)\right\}$ .

أ- بين أن : $z_G=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

ب- $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ ، حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{2}$ .

حدد طبيعة المجموعة $(E)$ و عناصرها المميزة ، ثم أحسب محيط $(E')$ صورة $(E)$ بالتشابه $S$ .