

## الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية: الشهيدة جبار عائشة-تيارت-

مديرية التربية لولاية تيارت

السنة الدراسية: 2023 / 2024

المستوى : الثالثة علوم تجريبية

المدة: 03 ساو 30 د

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بحددها الأول  $u_0 = \frac{3}{2}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $u_n > 0$ .

(2) أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ .

ب/ استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  هل هي متقاربة؟ - برر.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ .

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{2}{5}$  ثم اكتب عبارة  $(v_n)$  بدلالة  $n$

ب- استنتج عبارة  $(u_n)$  بدلالة  $n$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = \frac{3}{u_0} + \frac{3}{u_1} + \frac{3}{u_2} + \dots + \frac{3}{u_n}$

احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$ .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به 7 كرات متماثلة ولانفرق بينها باللمس منها 3 مرقمة ب: 0، 0، 0 وكرتان مرقمتان ب: 1، 1

وكرتان مرقمتان ب: 2، 2 نسحب من الصندوق 3 كرات على التوالي وبارجاع الكرة المسحوبة الى الصندوق

(1) احسب احتمال الحوادث التالية :

الحدث A : الكرات الثلاث تحمل نفس الرقم ، الحدث B : الكرات الثلاث تحمل ارقاما مختلفة مثنى مثنى

الحدث C : الحصول على ثلاث كرات جداء ارقامها معدوم

الحدث D : الحصول على ثلاث كرات مجموع ارقامها هو 2.

(2) احسب  $p(A \cap C)$  ثم استنتج  $p(A \cup C)$ .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 0.

(3) عين قيم المتغير العشوائي X وعرف قانون احتماله .

(4) احسب الامل الرياضي  $E(X)$ .

التمرين الثالث: (05 نقاط) أجب بصح أو خطأ مع التبرير:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 5x + 1) - x = -\infty \quad (1)$$

(2) لتكن المتتالية الهندسية المعرفة بـ  $v_n = \frac{1}{2}(3)^n$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:

$$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3^n}$$

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x) dx = 2 \quad (3)$$

(4)  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ  $u_n = \int_{\ln 2}^n \frac{e^x}{e^x + 2} dx$  ومنه قيمة الحد الثالث هي  $u_2 = \ln\left(\frac{e^n + 2}{4}\right)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I نعتبر دالة  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ:  $g(x) = x^2 - \ln x^2$ .

(1) احسب نهايات الدالة  $g$  عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  وشكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج أنه من أجل كل حقيقي غير معدوم يكون:  $g(x) > 0$

II نعتبر دالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ:  $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln x^2}{x}$

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$  حيث  $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  - فسر النتائج بيانياً.

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  فإن:  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

(4) أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) أ/ بين أن المنحنى ( $C_f$ ) يقبل ( $\Delta$ ) المنصف الأول كمقارب مائل له.

ب / ادرس الوضع النسبي بينهما.

(6) من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  و  $-x \in \mathbb{R}^*$  بين أن:  $f(x) + f(-x) = 0$ ، فسر هذه النتيجة بيانياً.

(7) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً  $\alpha$  حيث  $0, 3 < \alpha < 0, 4$

-استنتج أنها تقبل حلاً آخر  $\beta$  يطلب تعيين حصر له.

(8) بين أن المنحنى ( $C_f$ ) يقبل مماسين ( $T_1$ ) و ( $T_2$ ) موازيين للمستقيم ( $\Delta$ )

(9) أنشئ كلا من ( $\Delta$ ) ، ( $T_1$ ) ، ( $T_2$ ) والمنحنى ( $C_f$ ).

(10) عين القيم الوسيط الحقيقي  $m$  حتى تقبل المعادلة  $\ln(x^2) = mx - 2$  ثلاثة حلول.

III احسب بوحدة المساحة  $S$  مساحة الحيز المحدد بالمنحنى ( $C_f$ ) و المستقيم ( $\Delta$ ) والمستقيمين

## الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (5 نقاط)

(1) المتتالية  $(u_n)$  معرفة بحددها الأول  $u_1 = \frac{1}{2}$  ومن أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$ . احسب الحدود  $u_2$  و  $u_3$ .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن  $u_n > 0$ .

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم استنتج انها متقاربة.

(4) المتتالية  $(v_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}^*$  ب:  $v_n = \frac{u_n}{n}$ .

(أ) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول  $v_1$ .

(ب) اكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $u_n = \frac{n}{2^n}$ .

(5) (أ) احسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x \ln 2$ .

(ب) استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

(6) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث  $S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \dots + \frac{n}{u_n}$ .

التمرين الثاني : (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 11 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها اربع كريات بيضاء مرقمة: 1، 1، 1، 3 ، وخمس كريات حمراء مرقمة 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 2 ، وكريتين سوداوين مرقمة 3 و 3 .  
نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كريات من هذا الصندوق .

(1) نعتبر الحوادث: A " سحب 3 كريات من نفس اللون " B " سحب 3 كريات من نفس الرقم "

C " سحب على الأقل كرية بيضاء "

(أ) احسب  $P(A)$  و  $P(C)$  و  $P(B)$ .

(ب) بين  $P(A \cap B) = \frac{1}{33}$  ثم استنتج  $P(A \cup B)$ .

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الفردية المسحوبة .

(أ) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  ثم احسب  $E(X)$  أمله الرياضي

التمرين الثالث : (4 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير:

(1) منحنى الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب  $f(x) = x + 2 + \frac{3}{e^x + 3}$  يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار  $-\infty$  معادلته :

(أ)  $y = x + 2$  (ب)  $y = x + 3$  (ج)  $y = x + \frac{6}{3}$

(2) حل المعادلة ذات المجهول  $a$  في  $\mathbb{R}$  حيث  $\int_0^{\ln 2} e^{2x+a} dx = \ln 2$  هو :

(أ)  $a = \ln\left(\frac{\ln 4}{3}\right)$  (ب)  $a = \ln\left(\frac{\ln 2}{e-1}\right)$  (ج)  $a = \frac{e^2}{2}$



وهذا :  $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$  من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$

(-). بما أنه من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  فإن

$$U_{n+1} < U_n \quad \text{وهذا : } \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$$

نتيجة أن المتكافئ  $(U_n)$  متناقصة تمامًا

وهذا : بما أنها متناقصة تمامًا ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

(3) - نبرهن أن  $(U_n)$  متناقص متقارب

لدينا : 
$$V_{n+1} = \frac{4U_{n+1}}{2U_{n+1} + 3}$$

$$= \frac{8U_n}{2U_{n+1} + 3}$$

$$= \frac{4U_n}{2U_{n+1} + 3} + 3$$

$$= \frac{8U_n}{2U_{n+1} + 3} \times \frac{2U_{n+1} + 3}{10U_{n+1} + 15}$$

$$= \frac{8U_n}{10U_{n+1} + 15} = \frac{2(4U_n)}{5(2U_{n+1} + 3)}$$

$$U_{n+1} = \frac{2}{5} \cdot U_n$$

وهذا المتكافئ  $(U_n)$  متقارب

$$q = \frac{2}{5}$$

- عبارة  $(U_n)$  بدلالة  $n$  :

$$U_n = U_0 \cdot q^n$$

$$U_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$U_0 = \frac{4\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\frac{3}{2}\right) + 3}$$

$$U_0 = 1$$

"0A" صيغة

الموضوع I :  
\* التمرين الأول :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{2U_n + 5} \end{cases}$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  فإن :  $P(n) \dots U_n > 0$

- P نبرهن صحة  $P(0)$  :

لدينا :  $U_0 = \frac{3}{2}$  وهذا  $U_0 > 0$

وهذا  $P(0)$  صحيحة .

(-) من أجل  $n$  من الافتراض صحة  $P(n)$  أي :  $U_n > 0$

ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي :  $U_{n+1} > 0$

لدينا :  $U_n > 0$  وهذا  $2U_n > 0$

$$2U_{n+1} > 0$$

$$\frac{2U_n}{2U_{n+1} + 3} > 0$$

أي :  $U_{n+1} > 0$

وهذا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $U_n > 0$

(2) - P إثبات أن :  $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2U_n}{2U_{n+1} + 3}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2}{2U_{n+1} + 3}$$

لدينا :  $U_n > 0$

وهذا :  $2U_{n+1} + 3 > 3$

$$\frac{1}{2U_{n+1} + 3} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{2U_{n+1} + 3} < \frac{2}{3} < 1$$

3 ب) استخرج عبارة  $(U_n)$  بدلالة  $n$ : لدينا

$$U_n = \frac{-3V_n}{2(V_n-1)}$$

$$\frac{1}{U_n} = \frac{2V_n-2}{-3V_n}$$

$$\frac{3}{U_n} = \frac{-2V_n+2}{V_n}$$

$$\frac{3}{U_n} = -2 + \frac{2}{\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

$$\boxed{\frac{3}{U_n} = -2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)^n}$$

$$S_n = -2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)^0 + (-2) + 2\left(\frac{5}{2}\right)^1 + \dots + (-2) + 2\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

صيغة عددية متناهيته  $\rightarrow$  صيغة

$$S_n = \underbrace{(-2 + 2 - 2 - \dots - 2)}_{\text{صيغة (n+1)}} + 2\left(\left(\frac{5}{2}\right)^0 + \left(\frac{5}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{5}{2}\right)^n\right)$$

$$S_n = -2(n+1) + 2\left(\frac{1 - \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{2}}\right)$$

0, r

صيغة "ol"

$$V_n = \frac{2U_n}{2U_n+3}$$

$$V_n(2U_n+3) = 2U_n$$

$$2V_n - U_n + 3V_n - 2U_n = 0$$

$$2U_n(V_n-1) = \frac{-3V_n}{2}$$

$$U_n = \frac{-3V_n}{2(V_n-1)}$$

$$\boxed{U_n = \frac{-3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{2\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right)}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{2\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right)}$$

$$= 0$$

لا  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ ، واللا  $-1 < \frac{2}{5} < 1$

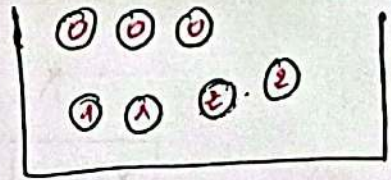
حساب المجموع  $S_n \rightarrow$  4

$$S_n = \frac{3}{U_0} + \frac{3}{U_1} + \frac{3}{U_2} + \dots + \frac{3}{U_n}$$

0, r

0, 2r

التجربة "ه"



تعبء 3 كرات عدديا وارجاع الكرة لكسوية إلى الصندوق.

لدينا:

$$\text{Card } E = 7^3 = 343$$

① حساب احتمال الحوادث:

الحدث A: سحب ثلاث كرات تحمل نفس الرقم.

$$\text{Card } A = \underbrace{3^3}_{\substack{\text{ثلاثة} \\ \text{كرات تحمل} \\ \text{الرقم "3"} \\ \text{أو تحمل الرقم "0"}}} + \underbrace{2^3}_{\substack{\text{أو ثلاثة} \\ \text{كرات تحمل} \\ \text{الرقم "1"} \\ \text{أو تحمل الرقم "2"}}} + \underbrace{2^3}_{\substack{\text{ثلاثة} \\ \text{كرات تحمل} \\ \text{الرقم "2"} \\ \text{أو تحمل الرقم "1"}}}$$

$$= 43$$

$$P(A) = \frac{43}{343}$$

ومنه:

الحدث B: الكرات الثلاثة تحمل أرقاما مختلفة من صنف

$$\text{Card } B = \underbrace{(3^1 \times 2^1 \times 2^1)}_{\substack{\text{رقم واحد} \\ \text{بها 3} \\ \text{رقم واحد} \\ \text{بها 2} \\ \text{رقم واحد} \\ \text{بها 1}}} \times 6$$

$$\text{Card } B = 72$$

لاحظ أن الترتيب مهم

$$n = \frac{(1+1+1)!}{1! \times 1! \times 1!} = 6$$

$$P(B) = \frac{72}{343}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3^3}{343} = \frac{27}{343}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{"صحة" "0"} = \frac{43}{343} + \frac{261}{343} - \frac{27}{343} = \frac{277}{343}$$

الحدث C: الحصول على ثلاث كرات حداد أرقاما معدوم يعني الحصول على كرة تحمل الرقم "0" واحدة على الأقل

$$\text{Card } C = (3^1 \times 4^2) \times 3 + (3^2 \times 4^1) \times 3 + (3^3 \times 4^0) \cdot 1$$

$$= 261$$

$$P(C) = \frac{261}{343}$$

الحدث D: الحصول على ثلاث كرات

مجموع أرقامها هو 2

معناه: كرة بها الرقم 2 وكرتان بها الرقم 0 أو كرتان بهما الرقم 1 وكرة بها الرقم 0

$$\text{Card } D = (2^1 \times 3^2) \times 3 + (2^2 \times 3^1) \times 3$$

$$\text{Card } D = 54 + 36 = 90$$

$$P(D) = \frac{90}{343}$$

② المتغير العشوائي X يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات التي تحمل الرقم 0

$$X(\omega) = \{0; 1; 2; 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{3^0 \times 4^3}{343} = \frac{64}{343}$$

$$P(X=1) = \frac{(3^1 \times 4^2) \cdot 3}{343} = \frac{144}{343}$$

$$P(X=2) = \frac{(3^2 \times 4^1) \times 3}{343} = \frac{108}{343}$$

$$P(X=3) = \frac{3^3 \times 4^0}{343} = \frac{27}{343}$$

قانون الإحصاء المتوازي X :

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{64}{343}$	$\frac{144}{343}$	$\frac{208}{343}$	$\frac{27}{343}$



④ حساب الأصل الرياضي :

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_i = \frac{441}{343} = \frac{9}{7}$$



$$S_n = 2 \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \right]$$

$$S_n = 2 \left[ \frac{1 - 3^{-n-1}}{\frac{2}{3}} \right]$$

$$S_n = 2 \times \frac{3}{2} (1 - 3^{-n-1})$$

$$S_n = 3 - 3^{-n}$$



← ②

③ حساب I حيث :  $I = \int_0^{\pi} x \cdot \cos x \, dx$

نستخدم التكامل بالتجزئة -  
نقل أ ت

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = [u(x) v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

نوع

$$\begin{cases} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x \end{cases}$$

$$I = [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= [x \sin x]_0^{\pi} - [-\cos x]_0^{\pi}$$

نفسه 04

ت 03 :

$$l. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 5x + 1) - x$$

$$= l. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 5x + 1) - \ln e^x$$

$$= l. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x^2 + 5x + 1}{e^x} \right)$$

$$= l. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[ \frac{x^2}{e^x} + \frac{5x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right]$$

$$= -\infty$$

← ①

② حساب المجموع  $S_n : v_n = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 3^n$

$$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

$$\frac{1}{v_n} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 3^n}$$

$$= 2 \cdot 3^{-n} = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

وهذا  $S_n$  هو عبارة عن مجموع حوز  
متناهي متساوية متساوية ذات  
اساس  $q = \frac{1}{3}$  وح اول  $2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \frac{\ln(x^2)}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left( 1 - \frac{\ln(x^2)}{x^2} \right) = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$

الدالة  $g$  تبتدأ ولدينا:

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$$

$$g'(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$2(x+1)(x-1)$	+	0	-	-	+
x	-	0	-	+	+
$g'(x)$	-	0	+	-	+
g(x)	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

من أجل  $x \in \mathbb{R}^*$  كل  $x$  يوجد  $g(x) \geq 1$    
 ومن أجل  $x \in \mathbb{R}^*$  كل  $x$  يوجد  $g(x) > 0$

$$f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$$

دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{x} + x + \frac{2 \ln(x)}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2}{x} + x - \frac{2 \ln(x)}{-x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

$$I = [x \sin x + \cos x]_0^\pi$$

$$= (\pi \sin \pi + \cos \pi) - (0 \sin 0 + \cos(0))$$

$$= -1 - 1 = -2$$

$$U_n = \int_{\ln(2)}^n \frac{e^x}{e^x + 2} dx \quad (A)$$

$$U_2 = \int_{\ln(2)}^2 \frac{e^x}{e^x + 2} dx$$

$$U_2 = \left[ \ln(e^x + 2) \right]_{\ln(2)}^2$$

$$U_2 = (\ln(e^2 + 2)) - (\ln(e^{\ln(2)} + 2))$$

$$U_2 = \ln(e^2 + 2) - \ln(2 + 2)$$

$$U_2 = \ln\left(\frac{e^2 + 2}{4}\right)$$

التمرين الرابع

$$g(x) = x^2 - \ln(x^2)$$

دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \frac{\ln(x^2)}{x^2}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \frac{\ln(x^2)}{-x^2}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln(x^2)) = +\infty - \infty$$

$x$	$-\infty$	$e^{-1}$	$0$	$e^{-2}$	$+\infty$
$2 + \ln(x^2)$	+	0	-	-	+
$x$	-	-	0	+	+
$f(x) - x$	-	0	+	-	+
الوضع النسب	(CP) يقع تحت	(CP) يقع تحت	(CP) يقع تحت	(CP) يقع تحت	(CP) يقع تحت
	(A) المنحني	(A) المنحني	(A) المنحني	(A) المنحني	(A) المنحني

0.1

6. بيان  $f(x) + f(-x) = 0$

لدينا:  
 $f(x) + f(-x) = \frac{x}{n} + n + \frac{\ln(x^2)}{n}$   
 $+ \frac{-x}{n} - n + \frac{\ln((-x)^2)}{-n} = 0$   
 $= \frac{x}{n} + n + \frac{\ln(x^2)}{n} - \frac{x}{n} - n - \frac{\ln(x^2)}{n}$   
 $= 0$

بإشارة:  $f(x) + f(-x) = 0$   
 $f(-x) = -f(x)$

تصبح  $f$  دالة فردية  
 المقصود البياني: (CP) ضئيل  
 بالنسبة للمبدأ 0.

تحت 0.6

5. لونا  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{n} + \frac{\ln(x^2)}{n} \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{n} + 2 \frac{\ln(x)}{n} \right] = 0$   
 ولدينا:  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x}{n} + \frac{\ln(x^2)}{n} \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x}{n} - \frac{2 \ln(-x)}{-n} \right]$

0.5  
 ومنه المقام  $y = n$   
 مقادير  $x$  متزايدة (CP) عند  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$   
 دراسة الوضع النسبي:  
 دراسة إشارة الفرق:  
 $f(x) - x = \frac{x}{n} + \frac{\ln(x^2)}{n}$   
 $= \frac{2 + \ln(x^2)}{n}$

إشارة  $2 + \ln(x^2)$   
 $2 + \ln(x^2) \geq 0$   
 $\ln(x^2) \geq -2$   
 $x^2 \geq e^{-2}$   
 $|x| \geq \sqrt{e^{-2}}$   
 $|x| \geq e^{-1}$

وهذا  $x \in [e^{-1}; +\infty[$  و  $x \in ]-\infty; -e^{-1}]$

2. حساب النهايات عند 0:  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} + n + \frac{\ln(x^2)}{n}$   
 $= +\infty \rightarrow \left(\frac{x}{x^2}\right)$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ \frac{2 + x^2 + \ln(x^2)}{-\infty} \right]$   
 $= -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ \frac{2 + x^2 + \ln(x^2)}{-\infty} \right] = +\infty$   
 معادلة مستقيم متوازي  $x=0$   
 نموذج (CP)

3. حساب  $f'(x)$   
 $f$  ق.أ. ولدينا:  
 $f'(x) = \frac{-2}{x^2} + 1 + \frac{\frac{1}{n} 2x - \ln(x^2)}{x^2}$   
 $= \frac{-2 + x^2 + 2 - \ln(x^2)}{x^2}$   
 $= \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

4. اتجاه تغير الدالة  $f$   
 لدينا:  $g(x) > 0$  و  $g(x) < 0$   
 ومنه  $f'(x) > 0$  و  $f'(x) < 0$  متزايدة  
 كما على  $\mathbb{R}^+$   
 جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

8) نبيأ أنه يوجد مسابغ

(T<sub>1</sub>) و (T<sub>2</sub>) موازيين  
 ⇒ (Δ) متساويان لأن (T<sub>1</sub>) و (T<sub>2</sub>)  
 موازيان لـ (Δ)  
 معنا = :  
 $f'(x) = 1$

$$\frac{g(x)}{x^2} = 1$$

$$g(x) = x^2$$

$$x^2 - L(x^2) = x^2$$

$$-L(x^2) = 0$$

$$L(x^2) = 0$$

$$x^2 = e^0$$

$$|x| = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1$$

$$x = 1$$

$$-x = 1 \Rightarrow x = -1$$

إذا كانا موازيين لـ (Δ)

(T<sub>1</sub>) و (T<sub>2</sub>) هما عند التقاطع

ذات العاصمتين  $x=1$  و  $x=-1$

ملاحظة:

$$A_1(1; 3)$$

(T<sub>1</sub>) يمثل القطعة

$$A_2(-1; -3)$$

(T<sub>2</sub>) " القطعة

منطقة " of

7) بين أنه المتعادلة  $f(x) = 0$

تقبل صلاوة صيغة:  $0,4 < \alpha < 0,5$

لدينا المتعادلة  $f$  صخرة و متزايدة  
 نطاقها هو  $[0,4; 0,5]$

$$f(0,3) \approx 0$$

$$f(0,4) \approx 0$$

$$f(0,3) \times f(0,4) < 0$$

منه (P) و (B) و حين من صفة  
 القيم المتوسطة فإن متعادلة

0,4

$f(x) = 0$  تقبل صلاوة

صيغة  $\alpha$  في المجال  $[0,3; 0,4]$

$$f(\alpha) = 0$$

استخرج الحل الآخر  $\beta$

بما أن  $f$  دالة فردية

$$f(-x) = -f(x)$$

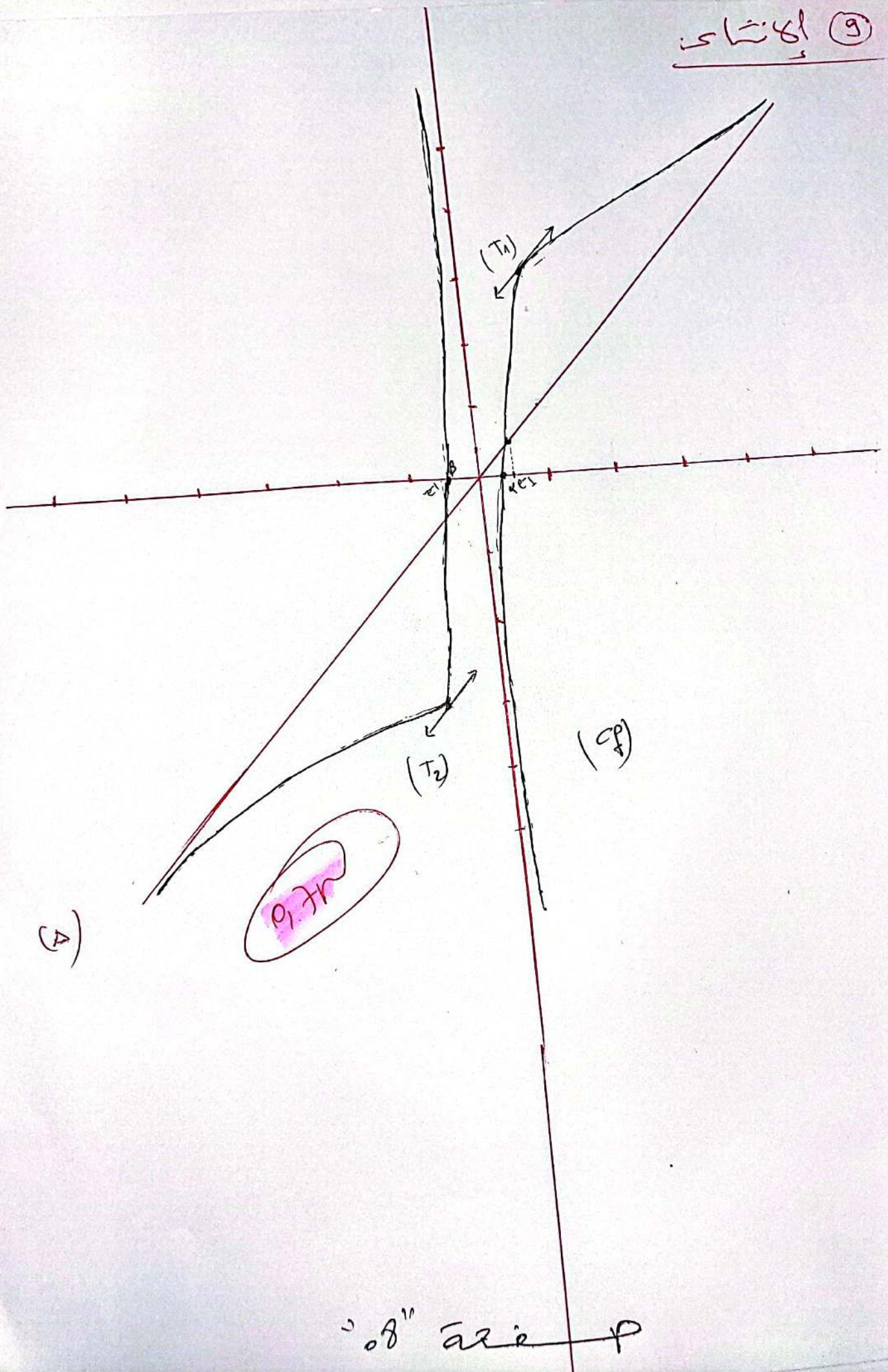
$$-f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$$

$$\beta = -\alpha$$

$$-0,4 < \beta < -0,3$$

الحل الآخر

9) الاستشاق



9.7m

(A)

(T<sub>2</sub>)

(B)

(T<sub>1</sub>)

0.8" are p

$$S = \int_1^e f(x) - x \, dx$$

$$= \int_1^e \left( \frac{x}{2} + \frac{\ln(x^2)}{x} \right) dx$$

$\ln(x^2) = 2\ln(x)$  إذا  $x > 0$  كإل

$$S = \int_1^e \left( \frac{x}{2} + \frac{2\ln(x)}{x} \right) dx$$

$$S = \int_1^e \left[ 2\ln(x) + x \left( \frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right) \right] dx$$

$$S = \int_1^e \left[ 2\ln(x) + (\ln(x))^2 \right] dx$$

$$= \left( 2\ln(e) + (\ln(e))^2 \right) - \left( 2\ln(1) + (\ln(1))^2 \right)$$

$$S = 2 \times (1) + 1$$

$$S = 3 \text{ u.a}$$

أحاط  $3 \text{ cm}^2$  فأب

$$S = (3) \times \| \vec{i} \| \times \| \vec{j} \|$$

$$S = 3 \times 2 \times 2 = 12 \text{ cm}^2$$

مساحة

١٥) تعيين قيم  $m$  حتى  
تقبل المعادلة:  $\ln(x^2) = mx - 2$   
ثلاثة حلول:

لدينا  $\ln(x^2) = mx - 2$

إذا  $x \neq 0$

$$\frac{\ln(x^2)}{x} = m - \frac{2}{x}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\ln(x^2)}{x} = m$$

$$\frac{x}{2} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} = x + m$$

ومنه  $f(x) = x + m$

مناقشة بيانية من أجل موازاة

لـ (A) المقارن المعادله (B)

و (A) و (B) ضايف المخرج (C)

المعادلة (\*) تقبل ثلاث حلول

إذا وفقط إذا كانت:  $m \in ]-2; 0[ \cup ]0; 2[$

١٣) حساب مساحة

الكرة كعدد = (C) و (A)

والمسور بالمسور للذين  $\pi$

$u = 1$  معادلتنا:

$u = e$

و

$$u_n = \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{e^{\ln n}}{e^{n \ln 2}} = e^{\ln n - n \ln 2} \text{ لدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ (ب) استنتاج}$$

0.25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x \ln 2 = -\infty \text{ وبما أن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ ، وباستعمال نهاية مركب دالتين نجد:}$$

(6) حساب المجموع  $S_n$ :

$$S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \dots + \frac{n}{u_n}$$

$$\text{ولدينا } v_n = \frac{u_n}{n} \text{ ومنه } \frac{n}{u_n} = \frac{1}{v_n}$$

$$\text{ومنه } S_n = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

$$\text{ونعلم أن } \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2^n} = 2^n \text{ بالتعويض نجد}$$

$$S_n = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$$

1  $S_n$  هو مجموع متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول

$$S_n = 1 \left( \frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) = 2^n - 1$$

(4 نقاط) التمرين الثاني:

(1) سحب 3 كريات من نفس اللون BBB ، RRR

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_5^3}{C_{11}^3} = \frac{4 + 10}{84} = \frac{14}{165} \quad 0.5$$

B سحب 3 كريات من نفس الرقم "111, 222, 333"

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_4^3 + C_3^3}{C_{11}^3} = \frac{4 + 4 + 1}{165} = \frac{9}{165} = \frac{3}{55} \quad 0.5$$

C سحب على الأقل كرية بيضاء

الحادثة العكسية  $\bar{C}$  هي عدم سحب اي كرية بيضاء:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{C_7^3}{C_{11}^3} = \frac{165 - 35}{165} = \frac{130}{165} = \frac{26}{33}$$

$$P(A \cap B) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_{11}^3} = \frac{5}{165} = \frac{1}{33} \quad 0.5$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad 0.5$$

$$= \frac{14}{165} + \frac{9}{165} - \frac{5}{165} = \frac{18}{165} = \frac{6}{55}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{165}}{\frac{9}{165}} = \frac{5}{9} \quad 0.25$$

التمرين الأول: (5 نقاط)

(1) حساب الحدود

$$u_2 = \frac{1+1}{2 \times 1} u_1 = \frac{1}{2} \cdot$$

0.5

$$u_3 = \frac{2+1}{2 \times 2} u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \cdot$$

(2)

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

n فإن  $u_n > 0$ :

1

$$(*) \text{ من أجل } n = 1 \text{ لدينا } u_1 = \frac{1}{2} > 0$$

ومنه الخاصية محققة من أجل  $n = 1$ .(\*\*) نفرض أن  $u_n > 0$  من أجل عدد طبيعي غير معدومn ونبرهن أن  $u_{n+1} > 0$ .

$$\text{لدينا } u_n > 0 \text{ و } \frac{n+1}{2n} > 0 \text{ ومنه } \frac{n+1}{2n} u_n > 0 \text{ ومنه } u_{n+1} > 0$$

من (\*) و (\*\*\*) نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n: u_n > 0$ .(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ 

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N}^* \text{، ومنه } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{n+n} \leq 1$$

وبما أن  $u_n > 0$  نستنتج  $u_{n+1} \leq u_n$  ومنه المتتالية  $(u_n)$ 

متناقصة تماما.

بما أن  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل ب 0 فهي متقاربة.

1

(4) أ) تبيان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية:

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N}^* \text{، ومنه } v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n} u_n}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} u_n = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_1 = u_1 = \frac{1}{2}$ .(ب) عبارة الحد العام لمتتالية هندسية من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_n = \frac{n}{2^n} \text{ فإن } v_n = \frac{u_n}{n} \text{ وبما أن } v_n = v_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$$

0.25

(أ) حساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x \ln 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{x} - \ln 2 \right) = -\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

1

0.25 (2) الجواب ب)

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.35 \text{ لدينا}$$

$$P(A \cup B) = 1 - 0.35 = 0.65 \text{ ومنه}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \text{ ومنه}$$

$$= 0.4 + 0.5 - 0.65 = 0.25$$

1

$$\ln\left(\frac{\ln 4}{3}\right) \text{ (3) الاجابة أ)}$$

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x+a} dx = \ln 2 \text{ التبرير:}$$

$$\left[\frac{1}{2}e^{2x+a}\right]_0^{\ln 2} = \ln 2 \text{ ومنه}$$

$$\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2+a}\right) - \left(\frac{1}{2}e^{2(0)+a}\right) = \ln 2 \text{ ومنه}$$

$$\left(\frac{1}{2}e^{\ln 4+a}\right) - \left(\frac{1}{2}e^a\right) = \ln 2$$

$$e^{\ln 4}e^a - e^a = 2 \ln 2$$

$$e^a(4 - 1) = \ln(2^2)$$

$$e^a = \frac{\ln 4}{3}$$

$$a = \ln\left(\frac{\ln 4}{3}\right)$$

1

(4) الاجابة أ)  $-2 < \alpha < 3$

التبرير: المتتالية  $(U_n)$  متقاربة معناه

$$-5 < 2\alpha - 1 < 5 \text{ ومنه } -1 < \frac{2\alpha - 1}{5} < 1$$

$$-2 < \alpha < 3 \text{ ومنه } \frac{-4}{2} < \alpha < \frac{6}{2}$$

0.5

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$

(1) المشتقة من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:

$$g'(x) = -2e^{-2x} - 4 < 0 \text{ ومنه } g \text{ متناقصة تماما على } \mathbb{R}.$$

0.5

(2) الدالة  $g$  مستمرة و متناقصة تماما و

$$g(-0.15) = +0. \text{ و } g(-0.16) < 0 \text{ ومنه } g(-0.15).g(-0.16) < 0$$

فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة والرتابة المعادلة

$$g(x) = 0 \text{ تقبلا حلا وحيدا } \alpha \text{ حيث } -0.16 < \alpha < -0.15$$

اقلب الورقة

0.25

ج) لدينا

$$P(A) \times P(B) = \frac{14}{165} \times \frac{3}{55}$$

$$= \frac{42}{9075} = \frac{14}{3025} \neq P(A \cap B)$$

ومنه الحادثتان  $A$  و  $B$  ليستا مستقلتان

(3) تعيين قيم المتغير العشوائي  $X$ .  $X = \{0; 1; 2; 3\}$

0.25

0 سحب 3 كرات تحمل أرقاما زوجية

1 سحب كرة تحمل رقم فردي و كرتين تحملان رقمين زوجيين

2 سحب كرتين تحملان رقمين فرديين و كرة تحمل رقم زوجي

3 سحب 3 كرات تحمل أرقاما فردية

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_{11}^3} = \frac{4}{165}$$

0.5

$$P(X=1) = \frac{C_7^1 C_4^2}{C_{11}^3} = \frac{42}{165}$$

$$P(X=2) = \frac{C_7^2 C_4^1}{C_{11}^3} = \frac{84}{165}$$

$$P(X=3) = \frac{C_7^3}{C_{11}^3} = \frac{35}{165}$$

$X_i$	0	1	2	3
$p(X = X_i)$	$\frac{4}{165}$	$\frac{42}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{35}{165}$

0.25

حساب الأمل الرياضي:

$$E(x) = 0 \cdot \frac{4}{165} + 1 \cdot \frac{42}{165} + 2 \cdot \frac{84}{165} + 3 \cdot \frac{35}{165} = \frac{315}{165}$$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

(1) الاجابة ب)  $y = x + 3$

1

التبرير: لدينا  $f(x) = x + 2 + \frac{3}{e^x + 3}$

$$\text{وبما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^x + 3} = \frac{3}{0 + 3} = 1 \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) - 1 = 0$$

$$\text{ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 3) = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 3$  مقارب مائل ل  $(C_f)$

بجوار  $-\infty$

0.5

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  :

$$f(x) - y = f(x) - x - 3 = -2x e^{2x}$$

إشارة الفرق من إشارة  $-2x$  ومنه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$	( $C_f$ ) فوق ( $\Delta$ )	( $C_f$ ) يقطع ( $\Delta$ )	( $C_f$ ) تحت ( $\Delta$ )

4) تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا (T) موازيا ل ( $\Delta$ ) أي لهما نفس معامل التوجيه : لتكن  $x_0$  فاصلة نقطة التماس ومنه

$$f'(x_0) = 1 \text{ ومنه } 1 - (2 + 4x_0)e^{2x_0} = 0$$

ومنه  $-(2 + 4x_0)e^{2x_0} = 0$  بما أن  $e^{2x_0} \neq 0$  فإن

$$-2 - 4x_0 = 0 \text{ ومنه } x_0 = -\frac{1}{2}$$

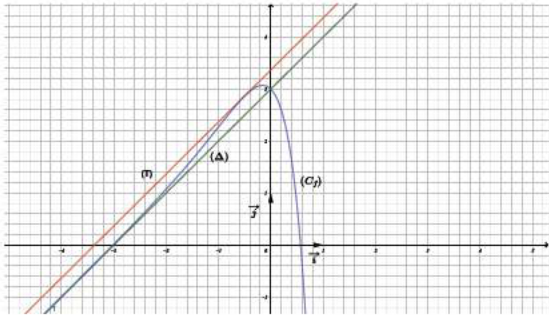
معادلة المماس عند  $x_0 = -\frac{1}{2}$  هي :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = 1(x + \frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2})$$

$$y = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 3 + e^{-1}$$

$$y = x + 3 + e^{-1}$$



(5) الانشاء

1

$$2xe^{2x} + m - 3 = 0$$

$$2xe^{2x} - 3 = -m$$

$$x - 2xe^{2x} + 3 = m + x$$

$$f(x) = x + m$$

المعادلة تقبل حلين متمايزين معناه المستقيمتان التي معادلتها

$$y = x + m \text{ (موازية للمستقيمين } (\Delta) \text{ و } (T))$$

تقطع المنحنى  $(C_f)$  في نقطتين مختلفتين ومنه :

$$1 < m < 3 + e^{-1}$$

0.25

اقلب الورقة

0.5

(3) إشارة  $g(x)$  :

x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

0.25

الجزء الثاني :  $f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$  (1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 - 2xe^{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left( \frac{x+3}{e^{2x}} - 2x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ فان } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{e^{2x}} = 0 \end{cases} \text{ بما أن}$$

0.25

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 = -\infty \end{cases}$$

0.5

(2) المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :

$$f'(x) = 1 - (2e^{2x}) + (2x(2e^{2x})) = 1 - (2e^{2x}) - (4xe^{2x})$$

$$= e^{-2x}e^{2x} - (2e^{2x}) - (4xe^{2x}) = e^{2x}(e^{-2x} - 2 - 4x)$$

$$= e^{2x}g(x)$$

0.25

(ب) إشارة المشتقة من إشارة  $g(x)$  لأن  $e^{2x} > 0$  ومنه :

الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; \alpha]$

الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $[\alpha; +\infty[$

0.5

جدول التغيرات .

x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

0.5

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + 3 - 2xe^{2x} - x] \text{ (3) } \alpha$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 3 - \underbrace{2xe^{2x}}_0 \right] = 3$$

استنتاج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا ( $\Delta$ )

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 3$$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 3$  ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + 3$

مقارب مائل ل  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  .

صفحة 3 من 4

## 0.5

(7)  $\lambda$  عدد حقيقي سالب تماما

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة جد بدلالة  $\lambda$  العدد :  $\int_{\lambda}^0 2xe^{2x} dx$

$$\begin{cases} u(x) = 2x & u'(x) = 2 \\ v'(x) = e^{2x} & v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \quad \text{بفرض}$$

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^0 2xe^{2x} dx &= \left[ \frac{2x}{2} e^{2x} \right]_{\lambda}^0 - \int_{\lambda}^0 \left( \frac{2}{2} e^{2x} \right) dx \\ &= [0 - \lambda e^{2\lambda}] - \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\lambda}^0 \\ &= -\lambda e^{2\lambda} - \left( \frac{1}{2} e^{2(0)} - \frac{1}{2} e^{2\lambda} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) e^{2\lambda} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ب) مساحة الحيز المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$

## 0.25

و المستقيمين  $x = \lambda$  و  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} S &= \int_{\lambda}^0 (f(x) - y) dx \\ &= \int_{\lambda}^0 ((x - 2xe^{2x} + 3) - (x + 3)) dx \\ &= \int_{\lambda}^0 (-2xe^{2x}) dx \\ &= - \left( (-\lambda) e^{2\lambda} + \frac{1}{2} e^{2\lambda} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \lambda e^{2\lambda} - \frac{1}{2} e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \text{ U.a} \end{aligned}$$

(ج) حساب النهاية

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S &= \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \lambda e^{2\lambda} - \frac{1}{2} e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \\ \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S &= \frac{1}{2} \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda e^{2\lambda} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{2\lambda} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

. بما أن  $\lambda < 0$  فان

## 0.25

$$u_n = \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{e^{\ln n}}{e^{n \ln 2}} = e^{\ln n - n \ln 2} \text{ لدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ (ب) استنتاج}$$

0.25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x \ln 2 = -\infty \text{ وبما أن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ ، وباستعمال نهاية مركب دالتين نجد:}$$

(6) حساب المجموع  $S_n$ :

$$S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \dots + \frac{n}{u_n}$$

$$\text{ولدينا } v_n = \frac{u_n}{n} \text{ ومنه } \frac{n}{u_n} = \frac{1}{v_n}$$

$$\text{ومنه } S_n = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

$$\text{ونعلم أن } \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2^n} = 2^n \text{ بالتعويض نجد}$$

$$S_n = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$$

1  $S_n$  هو مجموع متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول

$$S_n = 1 \left( \frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) = 2^n - 1$$

التمرين الثاني: (4نقاط)

(1) سحب 3 كريات من نفس اللون BBB ، RRR

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_5^3}{C_{11}^3} = \frac{4 + 10}{84} = \frac{14}{165} \quad 0.5$$

B سحب 3 كريات من نفس الرقم "111, 222, 333"

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_4^3 + C_3^3}{C_{11}^3} = \frac{4 + 4 + 1}{165} = \frac{9}{165} = \frac{3}{55} \quad 0.5$$

C سحب على الأقل كرية بيضاء

الحادثة العكسية  $\bar{C}$  هي عدم سحب اي كرية بيضاء:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{C_7^3}{C_{11}^3} = \frac{165 - 35}{165} = \frac{130}{165} = \frac{26}{33} \quad 0.5$$

$$P(A \cap B) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_{11}^3} = \frac{5}{165} = \frac{1}{33} \quad 0.5$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad 0.5$$

$$= \frac{14}{165} + \frac{9}{165} - \frac{5}{165} = \frac{18}{165} = \frac{6}{55}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{165}}{\frac{9}{165}} = \frac{5}{9} \quad 0.25$$

التمرين الأول: (5نقاط)

(1) حساب الحدود

$$u_2 = \frac{1+1}{2 \times 1} u_1 = \frac{1}{2} \cdot$$

0.5

$$u_3 = \frac{2+1}{2 \times 2} u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \cdot$$

(2)

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

n فإن  $u_n > 0$ :

1

$$(*) \text{ من أجل } n=1 \text{ لدينا } u_1 = \frac{1}{2} > 0$$

ومنه الخاصية محققة من أجل  $n=1$ .(\*\*) نفرض أن  $u_n > 0$  من أجل عدد طبيعي غير معدومn ونبرهن أن  $u_{n+1} > 0$ .

$$\text{لدينا } u_n > 0 \text{ و } \frac{n+1}{2n} > 0 \text{ ومنه } \frac{n+1}{2n} u_n > 0 \text{ ومنه } u_{n+1} > 0$$

من (\*) و (\*\*\*) نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n: u_n > 0$ .(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ 

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N}^* \text{، ومنه } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{n+n} \leq 1$$

وبما أن  $u_n > 0$  نستنتج  $u_{n+1} \leq u_n$  ومنه المتتالية  $(u_n)$ 

متناقصة تماما.

بما أن  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل ب 0 فهي متقاربة.

1

(4) أ) تبيان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية:

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N}^* \text{، ومنه } v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n} u_n}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} u_n = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_1 = u_1 = \frac{1}{2}$ .(ب) عبارة الحد العام لمتتالية هندسية من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$v_n = v_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \text{ وبما أن } v_n = \frac{u_n}{n} \text{ فإن } u_n = \frac{n}{2^n}$$

0.25

(5) أ) حساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x \ln 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{x} - \ln 2 \right) = -\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

1

(2) الجواب ب) 0.25

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.35 \text{ لدينا}$$

$$P(A \cup B) = 1 - 0.35 = 0.65 \text{ ومنه}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \text{ ومنه}$$

$$= 0.4 + 0.5 - 0.65 = 0.25$$

1

$$(3) \text{ الاجابة أ) } \ln\left(\frac{\ln 4}{3}\right)$$

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x+a} dx = \ln 2 \text{ التبرير}$$

$$\left[\frac{1}{2}e^{2x+a}\right]_0^{\ln 2} = \ln 2 \text{ ومنه}$$

$$\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2+a}\right) - \left(\frac{1}{2}e^{2(0)+a}\right) = \ln 2 \text{ ومنه}$$

$$\left(\frac{1}{2}e^{\ln 4+a}\right) - \left(\frac{1}{2}e^a\right) = \ln 2$$

$$e^{\ln 4}e^a - e^a = 2 \ln 2$$

$$e^a(4 - 1) = \ln(2^2)$$

$$e^a = \frac{\ln 4}{3}$$

$$a = \ln\left(\frac{\ln 4}{3}\right)$$

1

(4) الاجابة أ)  $-2 < \alpha < 3$ التبرير: المتتالية  $(U_n)$  متقاربة معناه

$$-5 < 2\alpha - 1 < 5 \text{ ومنه } -1 < \frac{2\alpha - 1}{5} < 1$$

$$\text{ومنه } \frac{-4}{2} < \alpha < \frac{6}{2} \text{ ومنه } -2 < \alpha < 3$$

0.5

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$ (1) المشتقة من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:

$$g'(x) = -2e^{-2x} - 4 < 0 \text{ ومنه } g \text{ متناقصة تماما على } \mathbb{R}$$

0.5

(2) الدالة  $g$  مستمرة و متناقصة تماما و  $g(-0.16) = 0.02$ 

$$\text{و } g(-0.15) = -0.05 \text{ ومنه } g(-0.15) \cdot g(-0.16) < 0$$

فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة والرتابة المعادلة

$$g(x) = 0 \text{ تقبلا حلا وحيدا } \alpha \text{ حيث } -0.16 < \alpha < -0.15$$

اقلب الورقة

0.25

(ج) لدينا

$$P(A) \times P(B) = \frac{14}{165} \times \frac{3}{55}$$

$$= \frac{42}{9075} = \frac{14}{3025} \neq P(A \cap B)$$

ومنه الحادثتان  $A$  و  $B$  ليستا مستقلتان(3) تعيين قيم المتغير العشوائي  $X$ .  $X = \{0; 1; 2; 3\}$ 

0.25

0 سحب 3 كرات تحمل أرقاما زوجية

1 سحب كرة تحمل رقم فردي و كرتين تحملان رقمين زوجيين

2 سحب كرتين تحملان رقمين فرديين و كرة تحمل رقم زوجي

3 سحب 3 كرات تحمل أرقاما فردية

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_{11}^3} = \frac{4}{165}$$

0.5

$$P(X=1) = \frac{C_7^1 C_4^2}{C_{11}^3} = \frac{42}{165}$$

$$P(X=2) = \frac{C_7^2 C_4^1}{C_{11}^3} = \frac{84}{165}$$

$$P(X=3) = \frac{C_7^3}{C_{11}^3} = \frac{35}{165}$$

$X_i$	0	1	2	3
$p(X = X_i)$	$\frac{4}{165}$	$\frac{42}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{35}{165}$

0.25

حساب الأمل الرياضي:

$$E(x) = 0 \cdot \frac{4}{165} + 1 \cdot \frac{42}{165} + 2 \cdot \frac{84}{165} + 3 \cdot \frac{35}{165} = \frac{315}{165} = \frac{21}{11}$$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

(1) الاجابة ب)  $y = x + 3$ 

1

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{e^x + 3} \text{ لدينا}$$

$$\text{وبما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^x + 3} = \frac{3}{0 + 3} = 1 \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) - 1 = 0$$

$$\text{ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 3) = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 3$  مقارب مائل ل  $(C_f)$ بجوار  $-\infty$ 

0.5

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  :

$$f(x) - y = f(x) - x - 3 = -2x e^{2x}$$

إشارة الفرق من إشارة  $-2x$  ومنه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$	( $C_f$ ) فوق ( $\Delta$ )	( $C_f$ ) يقطع ( $\Delta$ )	( $C_f$ ) تحت ( $\Delta$ )

4) تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا (T) موازيا ل ( $\Delta$ ) أي لهما نفس معامل التوجيه : لتكن  $x_0$  فاصلة نقطة التماس ومنه

$$f'(x_0) = 1 \text{ ومنه } 1 - (2 + 4x_0)e^{2x_0} = 0$$

ومنه  $-(2 + 4x_0)e^{2x_0} = 0$  بما أن  $e^{2x_0} \neq 0$  فإن

$$-2 - 4x_0 = 0 \text{ ومنه } x_0 = -\frac{1}{2}$$

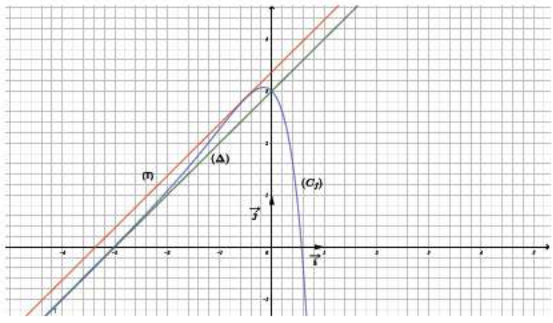
معادلة المماس عند  $x_0 = -\frac{1}{2}$  هي :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = 1(x + \frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2})$$

$$y = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 3 + e^{-1}$$

$$y = x + 3 + e^{-1}$$



(5) الانشاء

1

$$2xe^{2x} + m - 3 = 0 \text{ قيم } m$$

$$2xe^{2x} - 3 = -m$$

$$x - 2xe^{2x} + 3 = m + x$$

$$f(x) = x + m$$

المعادلة تقبل حلين متمايزين معناه المستقيمتان التي معادلتها

$$y = x + m \text{ (موازية للمستقيمين } (\Delta) \text{ و } (T) \text{)}$$

تقطع المنحنى  $(C_f)$  في نقطتين مختلفتين ومنه :

$$1 < m < 3 + e^{-1}$$

0.25

اقلب الورقة

0.5

(3) إشارة  $g(x)$ :

x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

0.25

الجزء الثاني:  $f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$  (1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 - 2xe^{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left( \frac{x+3}{e^{2x}} - 2x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ فان } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{e^{2x}} = 0 \end{cases} \text{ بما أن}$$

0.25

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 = -\infty \end{cases}$$

0.5

(2) المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :

$$f'(x) = 1 - (2e^{2x}) + (2x(2e^{2x})) = 1 - (2e^{2x}) - (4xe^{2x})$$

$$= e^{-2x}e^{2x} - (2e^{2x}) - (4xe^{2x}) = e^{2x}(e^{-2x} - 2 - 4x)$$

$$= e^{2x}g(x)$$

0.25

(ب) إشارة المشتقة من إشارة  $g(x)$  لأن  $e^{2x} > 0$  ومنه :

الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; \alpha]$

الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $[\alpha; +\infty[$

0.5

جدول التغيرات .

x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

0.5

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + 3 - 2xe^{2x} - x] \text{ (3) } \alpha$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 3 - \underbrace{2xe^{2x}}_0 \right] = 3$$

استنتاج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا ( $\Delta$ )

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 3$$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 3$  ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + 3$

مقارب مائل ل  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  .

صفحة 3 من 4



facebook



pdf

0.5

(7)  $\lambda$  عدد حقيقي سالب تماما

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة جد بدلالة  $\lambda$  العدد  $\int_{\lambda}^0 2xe^{2x} dx$  :

$$\begin{cases} u(x) = 2x & u'(x) = 2 \\ v'(x) = e^{2x} & v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \quad \text{بفرض}$$

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^0 2xe^{2x} dx &= \left[ \frac{2x}{2} e^{2x} \right]_{\lambda}^0 - \int_{\lambda}^0 \left( \frac{2}{2} e^{2x} \right) dx \\ &= [0 - \lambda e^{2\lambda}] - \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\lambda}^0 \\ &= -\lambda e^{2\lambda} - \left( \frac{1}{2} e^{2(0)} - \frac{1}{2} e^{2\lambda} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) e^{2\lambda} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ب) مساحة الحيز المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين  $x = \lambda$  و  $x = 0$ .

0.25

$$\begin{aligned} S &= \int_{\lambda}^0 (f(x) - y) dx \\ &= \int_{\lambda}^0 ((x - 2xe^{2x} + 3) - (x + 3)) dx \\ &= \int_{\lambda}^0 (-2xe^{2x}) dx \\ &= - \left( (-\lambda) e^{2\lambda} + \frac{1}{2} e^{2\lambda} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \lambda e^{2\lambda} - \frac{1}{2} e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \text{ U.a} \end{aligned}$$

(ج) حساب النهاية

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \lambda e^{2\lambda} - \frac{1}{2} e^{2\lambda} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S = \frac{1}{2} \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda e^{2\lambda} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{2\lambda} = 0 \end{cases} \text{ . بما أن } \lambda < 0 \text{ فان}$$

0.25

MATH  
Djellouli Djelloul

