الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسّية e^x

④

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 18

التمريـــــن

نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أن $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)] = -\infty$.

2) أ/ بين أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بين أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4[$ وتحته على المجال $]2 + \ln 4\,; +\infty[$

3) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2; 2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

5) اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$

6) مثل بيانيا (Δ) والمنحني (C_f) .

حل التمريــن

1) تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = -\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right] = +\infty$

لأن:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}[x-2] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[e^{x}] = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right] = +\infty\end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right] = -\infty$

لأن:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}[x-2] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}\right] = -\infty\end{cases}$$

2) أ/ تبيين أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x+\frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

$$\begin{aligned}\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y] &= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}\right] \\ &= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right] = 0\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2}-4=0$:

$$\begin{aligned}e^{x-2}-4=0 &\Rightarrow e^{x-2}=4 \\ &\Rightarrow x-2=\ln 4 \\ &\Rightarrow x=\ln 4+2\end{aligned}$$

- تبيين أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2+\ln 4[$ وتحته على المجال $]2+\ln 4\,;+\infty[$:

دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$:

$$\begin{aligned}f(x)-y &= -x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2} \\ &= -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\end{aligned}$$

لدينا $-\frac{1}{2}e^{x-2} < 0$ ولدينا:

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 4 + 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	$\ln 4 + 2$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}$	$-$	|	$-$
$e^{x-2} - 4$	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- **الوضعية:**

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty; 2 + \ln 4[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $2 + \ln 4$
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]2 + \ln 4 ; +\infty[$

3) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) - \frac{1}{2}e^{2(x-2)} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2}e^{2(x-2)} - 2e^{x-2} + \frac{1}{2}e^{2(x-2)}\right) \\ &= -(1 + e^{2(x-2)} - 2e^{x-2}) \\ &= -(e^{x-2} - 1)^2 \end{aligned}$$

ب/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f'(x) \leq 0$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow -(e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow e^{x-2} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^{x-2} = 1 \\ &\Rightarrow x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4) حساب $f''(x)$:

$$f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$$

دراسة $f''(x)$:

لدينا $-2e^{x-2} < 0$

ولدينا:

$$e^{x-2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{x-2}$	$-$	0	$-$
$e^{x-2} - 1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

المشتقة الثانية انعدمت وغيَرت اشارتها معناه أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(2;2)$

5) اثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$:

لدينا الدالة f رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

ولدينا: $f(2 + \ln 4) = -0.83$ و $f(2 + \ln 3) = 0.93$

ولدينا: $f(2 + \ln 4) \times f(2 + \ln 3) < 0$

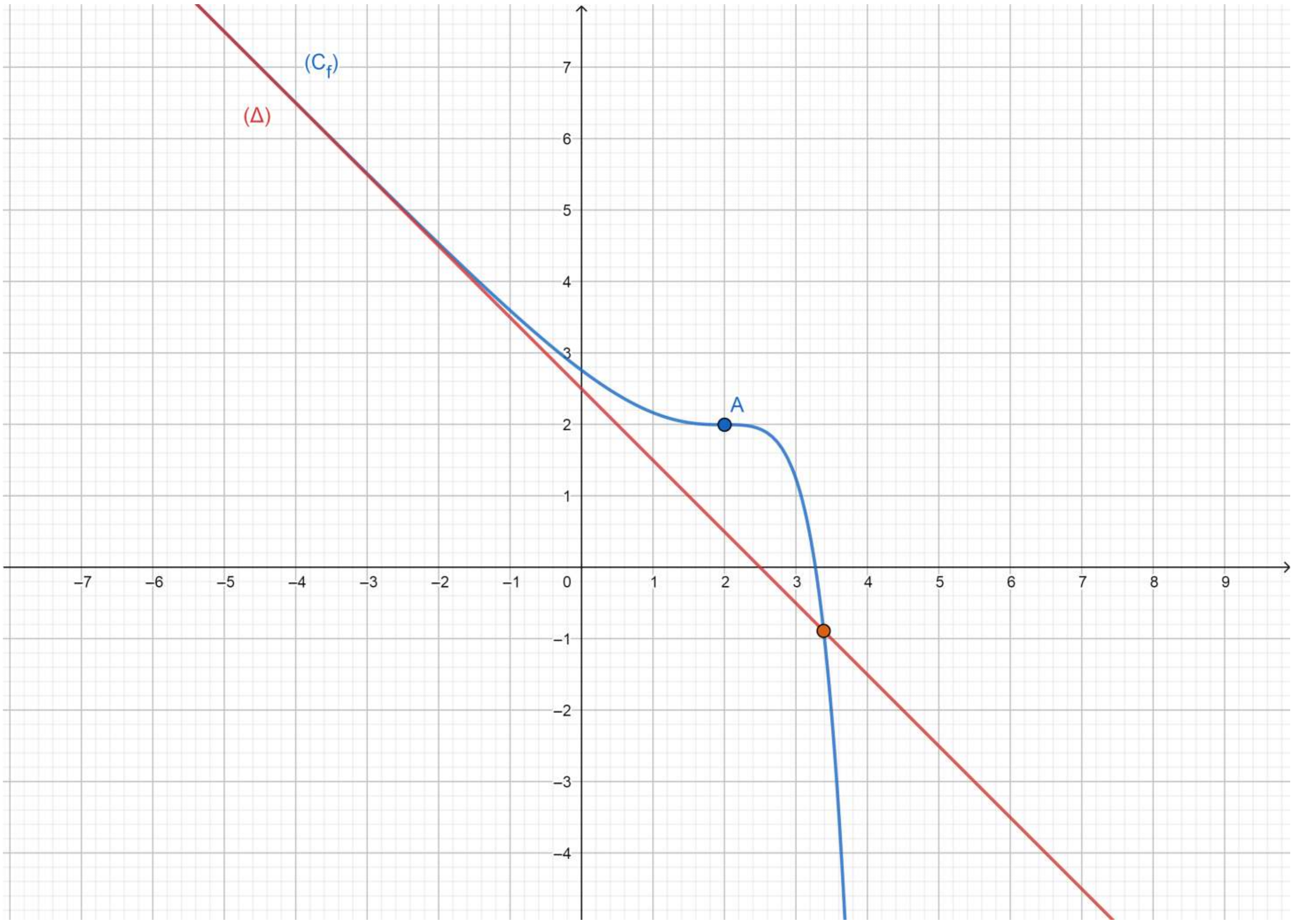
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال

$]2 + \ln 3 ; 2 + \ln 4[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و(C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ): $\left(y = -\frac{1}{2}x - 1\right)$
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►