SERIE ADEL NAIDJI

MATHS BAC

3 A.S

علوم تجريبية

رياضيات

تقني رياضي

- عروض نظرية للدروس
- جميع الأفكار الواردة في البكالوريات السابقة مدمجة في الدروس
- تجميعية لجميع تمارين البكالوريا موزعة حسب الوحدات

تأليف : عادل نعيجي

الجزء الأول

- التحليل -

مقدمة

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ و الصلاة و السلام على أشرف الخلق سيد المرسلين نبينا محمد صلى الله عليه و سلم نور العالمين أما بعد فإنه قبل حوالي ثلاث سنوات و بعد تفوقي في شهادة البكالوريا دورة 2015 و احتلالي للمرتبة الأولى وطنيا في شعبة الرياضيات بمعدل 18.86 كنت قد وعدت كل من صادفته أني سأنشر وثائقي على شكل كتيبات لكن الأشغال لم تسنح لي بذلك و لكي لا يخلف الانسان وعده فإنه من دواعي السرور و الغبطة أن أضع بين أيديكم اليوم أول اصدار لسلسلة *SERIE ADEL NAIDJI* و التي تتوجه لطلاب البكالوريا بمجموعة من الكتيبات الالكترونية المجانية و التي نتمنى أن تكون لهم خير سند و معين، يشمل الجزء الأول من كتاب الرياضيات ما يضاهي حوالي 15 أسبوعا تعليميا من المنهج السنوي و يتناول جانب التحليل من البرنامج " الدوال "، و لقد عمدت لوضع مراجعة شاملة في بداية الكتاب لما يحتاجه طالب البكالوريا من معارف قبلية في السنتين السابقتين. إن هذا المؤلف ما هو إلا ثمرة جهد شخصي و عمل ذاتي بحت إذ تمت كتابته بخط اليد و لقد اعتمد على طريقة جديدة في القاء العروض النظرية إذ أن بناء الدروس استند إلى الأفكار المتداولة في تمارين الباك فهذه الدروس تشمل إلى حد بعيد جميع الأسئلة المطروحة في الأعوام السابقة إذ لا يخفى على أي طالب أن شهادة البكالوريا ما هي إلا رسكلة لأفكار مهضومة تعاد كل دورة، ثم يأتي في نهاية الكتاب تجميعية لكل المسائل الواردة في الشهادات السابقة إذ أنها أفضل معيار يمكننا أن نستند إليه من أجل التقييم الذاتي لقدرات المترشح، و في نهاية المطاف فما بوسعي إلا أن أتمنى لكل مقبل على شهادة البكالوريا النجاح و التفوق، و ما وفقت فيه فمن الله سبحانه و تعالى، و ما أخطئت فيه فمن نفسي و من الشيطان، و إنه لمن دواعي سروري أن أستقبل منكم كافة الاقتراحات و الآراء البناءة أو بعض الأخطاء التي يمكن أن تنبع من قلة التركيز أثناء الكتابة. https://www.facebook.com/adel.naidji.7

عادل نعيجي

اهداء

نهدي هذا العمل المتواضع إلى:

- الوالدين الكريمين أطال الله في عمريهما و الاخوة الأعزاء
- الأسرة القريبة و البعيدة
- إلى كل من علمني حرفا من الأساتذة الكرام
- إلى كل الزملاء و الأساتذة و العمال بثانويتي الثانوية الوطنية للرياضيات بالقبة و كلية الطب بالجزائر العاصمة
- إلى كل الأصدقاء من العالم الحقيقي و الافتراضي الفايسبوك
- إلى كل طالب علم يعمل بتفان للرقي بالجزائر الحبيبة

الفهرس

مراجعة عامة

١/ خواص القوة الصحيحة:

$$\overset{\text{أس}}{a^{n}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ مرة}}$$

أساس

$(a,b) \in \mathbb{R}^{*2}$

$(n,m) \in \mathbb{Z}^{2}$

- $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$
- $a^{n} \times b^{n} = (a \times b)^{n}$
- $\dfrac{a^{n}}{b^{n}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}$
- $(a^{n})^{m} = a^{n \times m}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^{n}}$
- $a^{n} \times a^{-n} = 1$
- $(+a)^{n} = +a^{n}$
- $(-a)^{n} \to +a^{n} \; ; n = 2k$; $(-a)^{n} \to -a^{n} \; ; n = 2k+1$ $\quad (a \geq 0)$
- $a^{0} = 1$
- $a^{1} = a$
- $0^{n} = 0$
- $1^{n} = 1$

0^{0} لا يوجد

مراجعة عامة

مثال:

$$-1 = (-1)^{1} = (-1)^{2 \times \frac{1}{2}} = \left[(-1)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}}$$

$$-1 = 1 \;???$$

٢/ الجداءات الشهيرة:

$$\text{جداء} \xrightarrow{\text{نشر}} \text{مجموع} \qquad \text{مجموع} \xrightarrow{\text{تحليل}} \text{جداء}$$

$$(a+b)^{2} = a^{2} + b^{2} + 2ab$$

$$(a-b)^{2} = a^{2} + b^{2} - 2ab$$

$$(a-b)(a+b)^{2} = a^{2} - b^{2}$$

$$(a-b)^{3} = a^{3} - b^{3} - 3ab(a-b)$$

استنتاجات:

$$(a+b)^{3} = a^{3} + b^{3} + 3ab(a+b)$$

$$a^{3} - b^{3} = (a-b)(a^{2} + b^{2} + ab)$$

$$a^{3} + b^{3} = (a+b)(a^{2} + b^{2} - ab)$$

$$(-a-b)^{2} = (a+b)^{2}$$

$$(-a+b)^{2} = (b-a)^{2}$$

3/ الجذور التربيعية:

* لا يمكن كتابة $\sqrt{A}$ إلا إذا كان $A \geqslant 0$; $(a,b)\in \mathbb{R}_+^{*2}$

* $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

* $\left(\sqrt{a^n}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^n$

* $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$

* $\sqrt{a^2} = a$

* $\sqrt{(a+b)^2} = (a+b)$

* $\sqrt{a} = a^{1/2}$

* $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$

* $\sqrt{0} = 0$

* $\sqrt{1} = 1$

أخطاء شائعة

* $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

* $\sqrt{a^2+b^2} \neq a + b$

تعميم:

* الاستلزام: إذا كان ... فإن .... ($\Leftarrow$) (اتجاه واحد)

* التكافؤ: .... يكافئ ....
.... إذا وفقط إذا ....

دوما

$\sqrt{A(x)\cdot B(x)} = \sqrt{A(x)}\cdot\sqrt{B(x)}$ (*)

$A(x)\cdot B(x) \geqslant 0 \Leftarrow \begin{cases} A(x) \geqslant 0 \\ B(x) \geqslant 0 \end{cases}$

ليس دوما.

$\sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}} = \frac{\sqrt{A(x)}}{\sqrt{B(x)}}$ (*)

$\begin{cases} A(x)\cdot B(x) \geqslant 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} A(x) \geqslant 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$

$\sqrt{A(x)^2} = |A(x)|$ (*)

14/ الكسور:

① ضرب الكسور:

- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\alpha \times \frac{a}{b} = \frac{\alpha a}{b} = \frac{\alpha}{b} \times a$
- $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

② قسمة الكسور:

- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$
- $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$

يجب التمييز بين الكسور الفرعية والكسور الرئيسية.

③ الضرب والقسمة في وعلى عدد غير معدوم α

- $\frac{a}{b} = \frac{\alpha a}{\alpha b}$
- $\frac{a}{b} = \frac{a \div \alpha}{b \div \alpha}$

4/ توحيد المقامات:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \neq \frac{a}{b+c}$

5/ الاختزال والمساواة:

① الاختزال الأفقي:

- $A(x) + \cancel{\alpha} = B(x) + \cancel{\alpha}$
- $A(x) \times \cancel{\alpha} = B(x) \times \cancel{\alpha} \; ; \; \alpha \neq 0$

② الاختزال العمودي

- $\frac{A(x) \times \cancel{\alpha}}{B(x) \times \cancel{\alpha}} = \frac{A(x)}{B(x)}$
- $\frac{A(x) + \alpha}{B(x) + \alpha} \neq \frac{A(x)}{B(x)}$

③ اختزال متغير:

← العمودي:

- $\frac{A(x) \times \cancel{h(x)}}{B(x) \times \cancel{h(x)}} = \frac{A(x)}{B(x)}$

← الأفقي:

+ $A(x)\times R(x) = B(x)\times R(x)$

* نتأكد هل $R(x)=0$ لها حل

+ ليس لها حل ← نكتب

$$A(x) = B(x)$$

* لها حل ← نجعل المعادلة صفرية ثم نحلها

$$R(x)\left[A(x)-B(x)\right]=0$$

أمثلة:

* $x^2(\cancel{x^2+3}) = 4(\cancel{x^2+3})$

$$x^2 = 4$$

$x=-2$ أو $x=2$

* $x^2(x+3) = 4(x+3)$

$$(x+3)(x^2-4)=0$$

$$\begin{cases} x=-3 \\ x=-2 \\ x=+2 \end{cases}$$

* $x^2 - x^2 = x^2 - x^2$

$$(\cancel{x-x})(x+x) = x(\cancel{x-x})$$

$$x+x = x$$

$$2\cancel{x} = 1\cancel{x}$$

$$1=2 \quad ???$$

6/ الاختزال والمتراجحات:

1/ الاختزال الأفقي:

+ $A(x)+\cancel{\alpha} > B(x)+\cancel{\alpha}$
+ $A(x)\times\alpha > B(x)\times\alpha$
  - → $\alpha>0 : A(x)>B(x)$
  - → $\alpha<0 : A(x)<B(x)$

2/ اختزال متغير:

+ $A(x)\times R(x) < B(x)\times R(x)$
+ $R(x)\left[A(x)-B(x)\right]<0$

* ثم ننشئ جدول الاشارة ونحل المتراجحة.

* نستعمل هذه الطريقة دوما.

/7 قواعد الحساب في $\mathbb{R}$:

1/ اضافة عدد حقيقي:

* $a=b \Leftrightarrow a+\alpha=b+\alpha$
* $a>b \Leftrightarrow a+\alpha>b+\alpha$

2/ الضرب في عدد حقيقي α، $\alpha\neq 0$

* $a=b \Leftrightarrow \alpha a=\alpha b$
* $a>b \Leftrightarrow \alpha a>\alpha b \ ;\alpha>0$

  $\alpha a<\alpha b \ ;\alpha<0$

3/ الجمع طرفا لطرف:

* $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \Rightarrow a+b=c+d$
* $\begin{cases} a\leq b \\ c\leq d \end{cases} \Rightarrow a+c\leq b+d$
* $\begin{cases} a<b \\ c\leq d \end{cases} \Rightarrow a+c<b+d$

($<$ أولى من $\leq$)

4/ الضرب طرفا لطرف:

* $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \Rightarrow ac=bd$
* $\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases} \Rightarrow ac>bd$

  a,c,b,d موجبة
* $\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases} \Rightarrow ac<bd$

  a,b,c,d سالبة.

5/ ضرب الطرفين والوسطين.

* $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$

تعميم:

* $\dfrac{A(x)}{B(x)}=\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \Leftrightarrow A(x)\cdot\beta(x)=\alpha(x)\cdot B(x)$

  $B(x)\neq 0$

  $\beta(x)\neq 0$

حذار:

* $\dfrac{A(x)}{B(x)}<\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \not\Leftrightarrow A(x)\cdot\beta(x)<\alpha(x)\cdot B(x)$

بل نجعل المتراجحة صفرية.

- نوحد المقامات.
- ننشرو نبسط.
- نحل المتراجحة باستعمال جدول الاشارة.

6/ خاصية التعدي:

- $\begin{cases} a \le b \\ b \le c \end{cases} \Rightarrow a \le c$

- $\begin{cases} a < b \\ b \le c \end{cases} \Rightarrow a < c$

($>$ أولى من $\le$)

7/ قواعد المساواة:

- إذا كان $A(x) = B(x)$
فإن $A(x)^2 = B(x)^2$
- العكس لا يصلح إلا للأعداد الموجبة
- $a^n = b^n \Longleftarrow a = b$
- $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Longleftarrow a = b$
- $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Longleftarrow a = b$

8/ قواعد الترتيب:

- $\sqrt{a} > \sqrt{b} \Longleftrightarrow a > b$
موجبان
- $a^2 > b^2 \Longleftrightarrow a > b$
موجبان
- $a^2 < b^2 \Longleftarrow a > b$
سالبان

- $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Longleftrightarrow a > b$
من نفس الإشارة
- $a^3 > b^3 \Longleftarrow a > b$

9/ متى تنقلب إشارة متراجحة؟

4 حالات

- تربيع عددين سالبين
- الضرب في عدد سالب
- المقلوب
- ضرب متراجحتين طرفا لطرف
حيث a, b, c, d سالبة.

8/ القيمة المطلقة:

8/ تذكير حول المجالات:

- $\begin{cases} \text{أكبر من} \\ \text{أصغر من} \end{cases}$ أو تساوي $\Longleftarrow$ مجال مغلق
- $\begin{cases} \text{أكبر تماما} \\ \text{أصغر تماما} \end{cases}$ $\Longleftarrow$ مجال مفتوح
- عند $-\infty$ و $+\infty$ $\Longleftarrow$ مجال مفتوح
- الاتحاد = أو = $\cup$
- التقاطع = و = $\cap$
- استعن بالمحور العددي

2/ القيمة المطلقة:

* $|A(x)| = \begin{cases} +A(x) \; ; \; A(x) \geq 0 \\ -A(x) \; ; \; A(x) \leq 0 \end{cases}$

* خواص:

* $|a \times b| = |a| \times |b|$
* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
* $|-a| = |a|$
* $|a-b| = |b-a|$
* $|A(x)| = 0 \Rightarrow A(x) = 0$
* $|a+b| \neq |a| + |b|$
* $\sqrt{A(x)^2} = |A(x)|$

* متراجحات بالقيمة المطلقة

$\alpha \geq 0 \; ; \; \underline{|A(x)| < \alpha}$

$-\alpha < A(x) < +\alpha$

$\alpha \geq 0 \; ; \; \underline{|A(x)| > \alpha}$

$\begin{cases} A(x) > \alpha \\ A(x) < -\alpha \end{cases}$ أو $(\cup)$

* يمكن التخلص من القيمة المطلقة بالتربيع. $(|A|)^2 = A^2$

$|x+2| = |x-3|$

$(x+2)^2 = (x-3)^2$

$(x+2)^2 - (x-3)^2 = 0$

$(x+2-x+3)(x+2+x-3) = 0$

$(5)(2x-1) = 0$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

* التخلص من رمز القيمة المطلقة

- ننشئ جدول الاشارة
- نطبق الخاصية.

$|A(x)| = \begin{cases} A(x) \; , \; A(x) \geq 0 \\ -A(x) \; , \; A(x) \leq 0 \end{cases}$

مثال: $f(x) = |-2x+3|$

اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
اشارة $-2x+3$	$+$	0	$-$
عبارة $f(x)$	$= A(x) = -2x+3$		$= -A(x) = 2x-3$

$f(x) = -2x+3$: لما $x \in]-\infty, \frac{3}{2}]$

$f(x) = 2x-3$: لما $x \in [\frac{3}{2}; +\infty[$

كثيرات الحدود

كـثيرات الحدود

1/ مفهوم كثير حدود:

بعد الاختزال و التبسيط، نجد دالة:
← معرفة على $\mathbb{R}$
← من الشكل

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$a_n , a_{n-1} , \dots , a_1 , a_0$ تسمى معاملات كثير الحدود $p(x)$

- $-2x^3 + 3x - 5 \; ; \mathbb{R}$ ✓
- $-6x^2 + 7x + 2 \; ; \mathbb{R}^*$ X
- $\dfrac{-x^2+1}{x+1} \; ; \mathbb{R} - \{-1\}$ X
- $\dfrac{5x^3+10x}{x^2+2}$ ✓

2/ درجة كثير الحدود:

هي أعلى أس.

- $p(x) = 2 \rightarrow$ الدرجة 0
- $p(x) = -3x + 1 \rightarrow$ الدرجة 1
- $p(x) = 5x^{100} + x^2 + 1$
  $\rightarrow$ الدرجة 100

3/ تساوي كثيري حدود:

المعاملات متساوية

اوجد a , b , c , d حتى يكون $p(x) = g(x)$
حيث:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 - x + d$$
$$g(x) = 2x^3 + cx + 3$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = 3 \end{cases}$$

4/ كثير الحدود المعدوم (دوما):

جميع المعاملات معدومة.

اوجد m ، n ، l حتى يكون $p(x)=0$ دوما من أجل أي قيمة لـ x:

$$p(x)=(-3m+n)x^2+(m+2n+l)x+1+3m=0$$

$$\begin{cases} -3m+n=0 \Rightarrow n=-1 \\ m+2n+l=0 \Rightarrow l=+\frac{7}{3} \\ 1+3m=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

5/ عمليات على كثيرات الحدود:

* مجموع كثيري حدود هو كثير حدود درجته أعلى درجة

* جداء كثيري حدود هو كثير حدود درجته $n+m$

$$p(x)=2x^2+2x+3$$

$$g(x)=3x^{40}+5+6x^2$$

$$p(x)+g(x)=3x^{40}+8x^2+2x+8$$

الدرجة 40

$$p(x).g(x)=(2x^2+2x+3)\times(3x^{40}+5+6x^2)$$

الدرجة $40+2=42$

6/ جذر كثير حدود:

(هنا جذر ← حل
جذر ≠ √)

* α جذر لـ $P(x)$ معناه:

$$P(\alpha)=0$$

- و يمكن كتابة $p(x)$ كما يلي:

$$p(x)=(x-\alpha).\underbrace{g(x)}_{\text{كثير حدود أقل من } p(x) \text{ بدرجة}}$$

$$p(x)=2x^3-x^2-14x+16$$

تأكد أن 2 جذر لـ $p(x)$

نحسب $p(2)$:

$$p(2)=2(2)^3-2^2-14(2)+16$$

$$p(2)=0$$

اذن 2 جذر لـ $p(x)$

$$p(x)=(x-2)\underbrace{(ax^2+bx+c)}_{\text{كثير حدود من الدرجة 2}}$$

المعادلات

المعادلات

ملاحظة مهمة:

* قبل حل أي معادلة أو متراجحة، يجب تعيين مجموعة تعريفها

$\sqrt{A(x)}$; $A(x) \geq 0$ و $\frac{1}{A(x)}$; $A(x) \neq 0$	تقاطع عدة شروط $(\cap)$

لا يمكن $= \frac{\text{عدد}}{0}$

$\frac{0}{\text{عدد}} = 0$

1/ المعادلات من الدرجة I

$$ax + b = 0 \; ; \; a \neq 0$$

للمعادلة حل وحيد $x = \frac{-b}{a}$

مثال:

$$-2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

2/ المعادلات من الدرجة II

$$ax^2 + bx + c = 0 \; ; \; a \neq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$: للمعادلة حلان متمايزان

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

* يمكن تحليل العبارة كمايلي:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$\Delta = 0$: للمعادلة حل مضاعف

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

والعبارة تحلل كمايلي:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

$\Delta < 0$:

* ليس للمعادلة حلول
* لا يمكن تحليل العبارة.

مثال:

حل المعادلة: $5x^2 + 6x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(5) = 16 > 0$$

للمعادلة حلان:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 4}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 4}{10} = -1$$

* حالات خاصة:

$c=0$: $ax^2+bx=0$

$x(ax+b)=0$

المعادلة حلان دوما:

$$\begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

$b=0$: $ax^2+c=0$

$x^2=-\frac{c}{a}$

$x^2=\alpha$

$\alpha<0$: لا يوجد حلول

$\alpha=0$: حل مضاعف $x=0$

$\alpha>0$: حلين متمايزان

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{\alpha} \\ x_2=-\sqrt{\alpha} \end{cases}$$

أمثلة:

$-x^2+5x=0$

$x(-x+5)=0$

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=5 \end{cases}$$

$2x^2-4=0$

$x^2=2$

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{2} \\ x_2=-\sqrt{2} \end{cases}$$

* مجموع وجداء x_1 و x_2:

• إذا اقبلت معادلة من الدرجة II حلين فإن:

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$P=x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

الاستعمال

- التأكد من صحة الحل
- ايجاد الحل الثاني بمعلومية الأول

* تعيين اشارة الحلين دون حسابهما:

• إذا قبلت معادلة من الدرجة II حلين، يمكن معرفة اشارتهما دون حسابهما.

P

$P<0$:
- حل سالب
- حل موجب

$P>0$:
- حلين من نفس الاشارة

S

$S>0$:
- الحلين موجبين

$S<0$:
- الحلين سالبين

* تعيين عددين علم مجموعهما وجداءهما:

a و b يحققان
$$\begin{cases} S = a+b \\ P = a\times b \end{cases}$$

$\Downarrow$

a وb هما حلا المعادلة:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال:

اوجد العددان a وb اللذان يحققان:

$a+b=-2$

$ab=-3$

a و b هما حلا المعادلة:

$$x^2+2x-3=0$$

$a=1$ ، $b=-3$

أو

$b=1$ ، $a=-3$

* معرفة هل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلولا دون حساب Δ

← إذا كان $a.c<0$: فإن للمعادلة حتما حلول و Δ حتما موجب

← إذا كان $a.c>0$: لا يمكن الحكم مسبقا.

* الحل الظاهر:

في بعض الأحيان يمكن حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ دون حساب Δ و ذلك كمايلي:

← $a+b+c=0$ (مجموع المعاملات 0)

* فإن 1 حل ظاهر
* والحل الآخر هو $\frac{c}{a}$

← $a-b+c=0$:

* (-1) حل ظاهر
* والحل الآخر هو $-\frac{c}{a}$.

3/ المعادلات من الدرجة III

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \,,\; a\neq 0$$

① طريقة التحليل مرتين

$$2x^3-3x^2+4x-6=0$$

$$x^2(2x-3)+2(2x-3)=0$$

$$(2x-3)(x^2+2)=0$$

$$\begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ x^2+2=0 \Rightarrow S=\phi=\{\ \} \end{cases}$$

للمعادلة حل وحيد هو $x=\frac{3}{2}$

N.B لا يوجد $\{\phi\}$

② طريقة الحل الظاهر:

1• لحل المعادلة، يجب أن نعلم أحد حلولها الظاهرة $x=\alpha$ (يعطى في التمرين أو بلا حظ) (نجرب 1 ثم -1 - ثم 2)

2• تحليل العبارة على الشكل التالي:

$(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$

ثم تعيين c, b, a بإحدى الطرق الثلاث:

← القسمة الاقليدية

← المطابقة

← خوارزمية هورنر

3• حل المعادلة.

مثال:

$2x^3-x^2-14x+16=0$

1/ الحل الظاهر:

• تأكد أن 2 حل ظاهر.

• نعوض بـ 2

$2(2)^3-2^2-14(2)+16$

$=16-4-28+16$

$=0$

اذن 2 حل للمعادلة.

2/ تحليل العبارة:

$2x^3-x^2-14x+16$

$=(x-2)(ax^2+bx+c)$

a/ القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2-14x+16 & x-2 \\ \cline{2-2} -\ \ 2x^3-4x^2\qquad\qquad & 2x^2+3x \\ \cline{1-1} 3x^2-14x+16 & -8 \\ -\ \ 3x^2-6x\qquad & \\ \cline{1-1} -8x+16 & \\ -\ \ -8x+16 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$p(x)=(x-2)(2x^2+3x-8)$

b/ المطابقة:

$(x-2)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$

$=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

اذن:

$2x^3-x^2-14x+16$

$=$

$ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

بالمطابقة
$$\begin{cases} a=2 & \text{--- } ① \\ b-2a=-1 & \text{--- } ③ \\ c-2b=-14 & \text{--- } ④ \\ -2c=16 & \text{--- } ② \end{cases}$$

من ①: $a=2$

من ②: $c=-8$

من ③: $b=2a-1=3$

نتأكد في ④:

$$c-2b=-8-2(3)=-14$$

محققة

اذن:

$$p(x)=(x-2)(2x^2+3x-8)$$

c/ خوارزمية هورنر:

معاملات $p(x)$	2	-1	-14	16
الحل الظاهر (2)	0	4	6	-16
المعاملات a,b,c	2	3	-8	0
	a	b	c	

اذن:

$$p(x)=(x-2)(2x^2+3x-8)$$

3/ حل المعادلة:

$$2x^3-x^2-14x+16=0$$

معناه:

$$(x-2)(2x^2+3x-8)=0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 2x^2+3x-8=0 \end{cases}$$

$$\Delta=b^2-4ac=73>0$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{73}}{4}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{73}}{4}$$

اذن: للمعادلة المعطاة 3 حلول هي

$$\left\{2\,;\,\frac{-3+\sqrt{73}}{4}\,;\,\frac{-3-\sqrt{73}}{4}\right\}$$

4/ المعادلات من الدرجة IV

① طريقة التحليل مرتين:

② طريقة الحل الظاهر:

③ طريقة تحويل المتغير:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0$$

* نضع $y=x^2-3x$
* نحل المعادلة ذات المجهول y
* نستنتج قيم x.

المعادلة تصبح:

$$y^2-2y-8=0$$

$$\Delta=36 \Leftarrow \begin{cases} y_1=-2 \\ y_2=4 \end{cases}$$

* حالة $y=-2$:

$$y=x^2-3x$$
$$-2=x^2-3x$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases}$$

* حالة $y=4$:

$$y=x^2-3x$$
$$4=x^2-3x$$
$$x^2-3x-4=0$$
$$\begin{cases} x_3=-1 \\ x_4=4 \end{cases}$$

اذن للمعادلة المعطاة 4 حلول هي:

$$S=\{-1;1;2;4\}$$

④ المعادلات مضاعفة التربيع:

من الشكل: $ax^4+bx^2+c=0$; $a\neq0$

* نضع $y=x^2$
* نبحث عن قيم y
* نستنتج قيم x

مثال: $x^4-5x^2+4=0$

نضع $y=x^2$، المعادلة تصبح

$$y^2-5y+4=0 \;;\; y\geq0$$
$$\begin{cases} y_1=1 \\ y_2=4 \end{cases}$$

* حالة $y=1$ $y=x^2$

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases}$$

* حالة $y=4$ $y=x^2$

$$\begin{cases} x_3=-2 \\ x_4=2 \end{cases}$$

للمعادلة المعطاة 4 حلول:

$$S=\{-2;-1;1;2\}$$

⑤ المعادلات التناظرية:

من الشكل:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

$a\neq0$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$3x^4-7x^3+8x^2-7x+3=0$$

* نقسم على الحد الأوسط x^2

$$3x^2-7x+8-7\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$$
$$(x\neq0)$$

* نضع الحدود التي لها نفس المعاملات جنبا إلى جنب

$$3x^2+3\left(\frac{1}{x^2}\right)-7x-7\left(\frac{1}{x}\right)+8=0$$

$$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$$

* نظهر المتغير الجديد:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

المعادلة تصبح

$$3\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$$

$$3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

* نضع $y=x+\frac{1}{x}$ ثم نحل المعادلة

$$3y^2-7y+2=0$$

$$\begin{cases} y_1=2 \\ y_2=\frac{1}{3} \end{cases}$$

لما $y=2$

$$x+\frac{1}{x}=2$$

$$x^2-2x+1=0$$

حل مضاعف 1

لما $y=\frac{1}{3}$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$$

$$3x^2-x+3=0$$

$$\Delta<0$$

لا يوجد حل

للمعادلة المعطاة حل مضاعف $x_1=1$

5/ معادلات أخرى:

* $A(x)\cdot B(x)=0$

معناه: $\begin{cases} A(x)=0 \\ \text{أو } B(x)=0 \end{cases}$

مثال:

$$(2x+1)(x^2+3x-4)=0$$

$$\begin{cases} 2x+1=0 \\ \text{أو} \\ x^2+3x-4=0 \end{cases}$$

$$S=\left\{-4\,;-\frac{1}{2}\,;1\right\}$$

* $\frac{A(x)}{B(x)}=0$

← نعين D $(B(x)\neq 0)$

← نحل المعادلة $A(x)=0$

← نتحقق هل الحلول تنتمي إلى D

مثال:

$$\frac{x^2+3x-4}{x-1}=0$$

* $x-1\neq 0$; $x\neq 1$ ، $D=\mathbb{R}-\{1\}$

* المعادلة المعطاة تكافئ:

$$x^2+3x-4=0$$

$$\begin{cases} x_1=1 \rightarrow \text{مرفوض} \\ x_2=-4 \end{cases}$$

إذن المعادلة حل وحيد $S=\{-4\}$

$x^2-4 \geq 0$

$D =]-\infty, -2] \cup [2;+\infty[$

$\sqrt{x^2-4} = x+1$

$x^2-4 = (x+1)^2$

$\cancel{x^2} - 4 = \cancel{x^2} + 2x + 1$

$2x + 1 + 4 = 0$

$2x + 5 = 0$

$x = -\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2} \in D$

اذن المعادلة حل وحيد $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

* $|A| = -|B|$, $|A| = |B|$, $|A(x)| = B(x)$

$(A-B)(A+B) = 0 \Leftrightarrow A^2 = B^2$

مثال:

$2|x-1| = 3|2x+4|$

$|x-1| = \frac{3}{2}|2x+4|$

$|x-1| = \left|\frac{3}{2} \times 2x + 4 \times \frac{3}{2}\right|$

$|x-1| = |3x+6|$

$(x-1)^2 = (3x+6)^2$

$(x-1-3x-6)(x-1+3x+6) = 0$

$(-2x-7)(4x+5) = 0$

$$\begin{cases} -2x-7=0 \\ 4x+5=0 \end{cases}$$

$S = \left\{-\frac{7}{2}; -\frac{5}{4}\right\}$

* $\sqrt{A(x)} = 0$

* نعين D $A(x) \geq 0$

* نحل المعادلة $A(x) = 0$

* نتحقق هل الحلول من D

مثال:

$\sqrt{x-1} = 0$ $D = [1;+\infty[$

المعادلة تكافئ $x-1=0$

$x = 1 \in D$

اذن المعادلة حل وحيد

$S = \{1\}$

* $|A(x)| = 0$ / $A(x)^n = 0$

نحل المعادلة $A(x) = 0$

مثال:

$(2x+1)^3 = 0$	$\lvert x^2+3x-4 \rvert = 0$
$2x+1 = 0$	$x^2+3x-4 = 0$
$x = -\frac{1}{2}$	$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

* $\sqrt{A(x)} = B(x)$

* نعين D.

* نحل المعادلة $A(x) = B(x)^2$

. نتأكد هل الحلول من D

مثال:

$\sqrt{x^2-4} - x - 1 = 0$

* $A(x)^n = B(x)$

مثال: $x^3=8$

$x^3-8=0$

$x^3-2^3=0$

$(x-2)(x^2+4+2x)=0$

$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+2x+4=0 \quad \Delta<0 \end{cases}$

$S=\{2\}$ للمعادلة حل وحيد

* $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$

$\sqrt{4x+7}=2+\sqrt{2x}$

$2x\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0,+\infty[= I$

$4x+7\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-\frac{7}{4};+\infty[= J$

$D=I\cap J=[0,+\infty[$

المعادلة تصبح:

$\sqrt{4x+7}-\sqrt{2x}=2$

$(\sqrt{4x+7}-\sqrt{2x})^2=4$

$4x+7+2x-2\sqrt{2x(4x+7)}=4$

$6x+3=2\sqrt{2x(4x+7)}$

$(6x+3)^2=4[2x(4x+7)]$

$36x^2+9+36x=32x^2+56x$

$4x^2-20x+9=0$

$S=\{\frac{9}{2};\frac{1}{2}\}\in D$

* $|A|+|B|=C$ $\quad$ $|A|+B=C$ ...

يجب أن نتخلص من رمز القيمة المطلقة بالاستعانة بجدول الإشارة.

مثال①:

$|x+3|+|x-5|=6$

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$\|x+3\|$	$-x-3$	0 $x+3$		$x+3$
$\|x-5\|$	$-x+5$	$-x+5$	0	$x-5$
$\|x+3\|+\|x-5\|$	$-2x-2$	8 $\quad$ 8	8	$2x-2$

$|x+3|+|x-5|=6$ تكافئ:

* $x\in]-\infty;-3]$

$-2x-2=6$

$x=-2$

مرفوض لأن $-2\notin]-\infty;-3]$

* $x\in]-3;5[$

$8=6$

مستحيل.

* $x\in]5;+\infty[$

$2x-2=6$

$x=4$

مرفوض لأن $4\in]5;+\infty[$

* $x=-3$ أو $x=5$:

$8=6$

مستحيل.

اذن المعادلة المعطاة ليس لها حلول

$S=\{\ \}$

* المعادلات الوسيطية:

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و اشارة حلول المعادلة التالية.

$$\underbrace{2m}_{a}\,x^2+\underbrace{m}_{b}\,x+\underbrace{3-m}_{c}=0$$

① $a=0$ ($m=0$)

المعادلة تصبح $3=0$ (مستحيل

$S=\{\ \}$

② $a\neq 0$ ($m\neq 0$)

المعادلة $2mx^2+mx+3-m=0$ من الدرجة II :

$\Delta=b^2-4ac=m^2-4(2m)(3-m)$

$$\boxed{\Delta=9m^2-24m}$$

دراسة اشارة Δ:

$\Delta'=(-24)^2-4(9)(0)=24^2>0$

للمعادلة حلان :

$m=0$

$m=8/3$

$m=0$ مرفوض (لأننا فرضنا أن $m\neq 0$)

m	$-\infty$		0		$8/3$	
$\Delta=9m^2-24m$		$+$	‖	$-$	0	$+$

استنتاج الحلول:

m	$-\infty$		0		$8/3$		$+\infty$
$\Delta=9m^2-24m$		$+$	‖	$-$	0	$-$	
عدد الحلول		حلان متمايزان $x=\frac{-m\pm\sqrt{9m^2-24m}}{4m}$	ϕ	ϕ	حل مضاعف $x=\frac{-1}{4}$	حلان متمايزان $x=\frac{-m\pm\sqrt{9m^2-24m}}{4m}$	

اشارة الحلان:

$P=\frac{c}{a}=\frac{3-m}{2m}$

$S=\frac{-b}{a}=\frac{-m}{2m}=-\frac{1}{2}$

ندرس اشارة P و S:

m	$-\infty$		0		$8/3$		3		$+\infty$
الحلول		حلان	ϕ	ϕ	$\frac{-1}{4}$	حلان		حلان	
P		$-$				$+$	0 ; $S=-\frac{1}{2}$	$-$	
اشارة الحلان		مختلفان	ϕ	ϕ	$-\frac{1}{4}$	سالبان	$x=0$; $x=-\frac{1}{2}$	مختلفان	

* **حل المعادلات التالية :**

$x^4+4|x^2-1|+3|x+2|+1=0$

$x^4+4|x^2-1|+3|x+2|=-1$

$\oplus \qquad \ominus$

مستحيل $\Rightarrow S=\phi$

$x-5\sqrt{x}-6=0$

$x\geqslant 0$; $x\in[0,+\infty[$

نضع $y=\sqrt{x}$; $y\geqslant 0$

$y^2-5y-6=0$

$$\begin{cases} y=-1 & \text{مرفوض} \\ y=6 \end{cases}$$

$y=6$ أي $\sqrt{x}=6$

أي $x=6^2$

$\boxed{x=36}$

$x|x|=-3$

نفصل الحالات :

$x\geqslant 0$: $x^2=-3$ مستحيل

$x\leqslant 0$: $-x^2=-3$

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{3} \longrightarrow \text{مرفوض} \\ x_2=-\sqrt{3} \end{cases}$$

$S=\{-\sqrt{3}\}$

تذكير حول أنماط البرهان "6"

* الاستلزام
* التكافؤ
* الخلف : نفرض أن الخاصية خاطئة ثم نبسط حتى نصل إلى تناقض ، منه فرضيتنا خاطئة $\Rightarrow$ الخاصية صحيحة
* العكس النقيض للاستلزام :

$(P\Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q}\Rightarrow \overline{P})$

* التراجع .
* فصل الحالات .

دراسة اشارة عبارة

دراسة اشارة عبارة

* اشارة $ax+b$ $a \neq 0$

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$ax+b$	عكس اشارة a	0	نفس اشارة a

* اشارة ax^2+bx+c : $a \neq 0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta > 0$: حلان x_1 و x_2 $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس اشارة a	0	عكس اشارة a	0	نفس اشارة a

$\Delta = 0$: حل مضاعف x_1

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس اشارة a	0	نفس اشارة a

$\Delta < 0$: $S = \phi$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس اشارة a .	

* اشارة $A(x) \cdot B(x)$

ننجز جدول الاشارة.

مثال: $\theta(x) = (2x+1)(x^2+4x-5)$

x	$-\infty$		-5		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+4x-5		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\theta(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

* اشارة $\dfrac{A(x)}{B(x)}$:

ننجز جدول الاشارة مع $B(x) \neq 0$

x	$-\infty$		-5		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+4x-5		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\theta(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$\theta(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x-5}$$

* اشارة $A(x)^n$:

* $n = 2k$: $A(x)^n \geq 0$ دوما

* $n = 2k+1$: اشارة $A(x)^n$ من اشارة $A(x)$

مثال: $\theta(x) = (x^2+4x-5)^{15}$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$\theta(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لكن $(x^2+4x-5)^{10}$ دوما موجب

* اشارة $\frac{1}{A(x)}$:

نفسها اشارة $A(x)$ مع $A(x)\neq 0$

مثال:

$$\theta(x)=\frac{1}{x^2+4x-5}$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$\theta(x)$	$+$ ‖	$-$	‖ $+$	

↑ قيمة ممنوعة.

* اشارة $S=C+B+A$

← A ، B ، C سالبة دوما: $S\leq 0$

← A ، B ، C موجبة دوما: $S\geq 0$

← A ، B ، C من اشارات مختلفة، نحلل المجموع الى جداء ثم ننجز جدول الاشارة.

* ملاحظة:

$|a|$ / $\sqrt{a}$ / $a^{n=2k}$ / a^2
أو مجموعها

موجب دوما.

مثال: حل المتراجحة

$$3x^{2008}+11x^{1962}+1964\geq 0$$

$\oplus$ $\oplus$ $\oplus$

محققة دوما

اذن $S=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

* اشارة عبارة بدلالة اشارة عبارة أخرى

مثال:

$$f(x)=\frac{g(x)\times(x^2+3)}{x^4+5x^2}$$

* اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)$.

مثال:

$$f(x)=\frac{g(x)+x^2+3}{x^4+5x^2}$$

* اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)+x^2+3$

. لا يمكن القول أن اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)$.

← لا يصح تجاهل مقدار عند دراسة اشارة عبارة إلا إذا كان

* مضروب في $\oplus$
* مقسوم على $\oplus$

اشارة عبارة ← الاشتقاق

← نعوض بقيمة في مجال

المتراجـحات

حل متراجحات

مجال مفتوح	مجال مغلوق
$<$ $>$	$\geq$ $\leq$

* نعين D مجموعة التعريف
• نحل المتراجحة ونكتب الحل على شكل مجال I
• حل المتراجحة هو $S = I \cap D$

⟸ لحل متراجحة:
← نجعلها صفرية
← نحلل العبارة
← ننجز جدول الإشارة
← نستنتج الحلول.

: $ax+b>0$

$-2x+4>0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-2x+4$		$+$	0	$-$	

$S =]-\infty, 2[$

: $ax^2+bx+c>0$

$x^2+4x-5 \leq 0$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
x^2+4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [-5;1]$

: $x^2+4x-5>0$

$S =]-\infty, -5[\cup]1;+\infty[$

$A(x)\cdot B(x)>0$

$(2x+1)(x^2+4x-5) \geq 0$

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\theta(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [-5;-\frac{1}{2}] \cup [1;+\infty[$

: $\frac{A(x)}{B(x)}>0$

$\frac{2x+1}{x^2+4x-5} \leq 0$

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\theta(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$S =]-\infty,-5[\cup [-\frac{1}{2};1[$

$A(x)^n>0$

* $(x^2+4x-5)^{10} < 0$ ليس لها حل
• $(x^2+4x-5)^{10} \geq 0$ محققة دوما
* $(x^2+4x-5)^{10} \leq 0$ تكافئ:

$x^2+4x-5=0$

$S = \{-5;1\}$

• $(x^2+4x-5)^{10} > 0$ $S = \mathbb{R} - \{-5;1\}$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$(x^2+4x-5)^{10}$		$+$	0	$+$	0	$+$	

$$(x^2+4x-5)^{13}<0$$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$(x^2+4x-5)^{13}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=]-5;1[$$

: $\dfrac{1}{A(x)}\geq\alpha$

$$\frac{1}{(x^2+4x-5)}\geq 0$$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$\dfrac{1}{x^2+4x-5}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

$$S=]-\infty,-5[\cup]1,+\infty[$$

$|A(x)|\leq\alpha$

$\alpha<0$: لا يوجد حلول

$\alpha=0$: $|A(x)|\leq 0$ معناه $A(x)=0$

$|A(x)|<0$ لا يوجد حلول

$\alpha>0$: $-\alpha\leq A(x)\leq\alpha$

مثال: $|2x-3|<5$

$$-5<2x-3<5$$
$$-5+3<2x<5+3$$
$$-2<2x<8$$
$$-1<x<4$$
$$S=]-1;4[$$

$|A(x)|\geq\alpha$

$\alpha<0$: محققة دوما

$\alpha=0$: $|A(x)|\geq 0$ معناه $S=\mathbb{R}$

$|A(x)|>0$

$S=\mathbb{R}-\{$القيم التي تعدم $A(x)\}$

$\alpha>0$: $\begin{cases} A(x)\geq\alpha \\ A(x)\leq-\alpha \end{cases}$ أو $(\cup)$

مثال: $|2x-3|\geq 5$

$\begin{cases} 2x-3\geq 5 \\ 2x-3\leq -5 \end{cases}$ أو

$\begin{cases} 2x-8\geq 0 \\ 2x+2\geq 0 \end{cases}$ أو

$\begin{cases} x\geq 4 \\ x\geq -1 \end{cases}$ أو

$$S=[4;+\infty[\cup[-1;+\infty[$$
$$S=[-1;+\infty[$$

حل متراجحات صماء:

$\sqrt{A(x)} > B(x)$

$$\sqrt{3x+12} > x+3$$

* تعيين D:

$$D = [-4;+\infty[$$

. اشارة $x+3$ على المجال D:

x	$-\infty$		-4		-3		$+\infty$
$x+3$		//////		$-$	0	$+$	

* $x \in [-4;-3[$

$$\sqrt{3x+12} > x+3$$

$\oplus$ $\ominus$

محققة

$$S_1 = [-4;-3[$$

* $x = -3$

$$\sqrt{3} > 0$$

محققة

$$S_2 = \{-3\}$$

* $x \in]-3;+\infty[$

$$\sqrt{3x+12} > x+3$$

$\oplus$ $\oplus$

$$3x+12 > x^2+6x+9$$

$$x^2+3x-3 < 0$$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \approx -3,79$$

$$x_2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \approx 0,79\ldots$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
x^2+3x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$I =]x_1;x_2[$$

$$I = \left]\frac{-3-\sqrt{21}}{2};\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right[$$

$$S_3 =]-3,+\infty[\cap I$$

$$S_3 = \left]-3;\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right[$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S = \left[-4;\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right[$$

$\sqrt{A(x)} \leq B(x)$

$$\sqrt{x-2} < -2x+6$$

* تعيين D

$$D = [2;+\infty[$$

. اشارة $-2x+6$ على D

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-2x+2$		//////		$+$	0	$-$	

$x \in [2,3[$: $\sqrt{x-2} < -2x+6$

$\oplus$ $\oplus$

$$(x-2) < (-2x+6)^2$$

$$4x^2-x+14 > 0$$

$\Delta < 0$: لا يوجد حل و

دوما $4x^2-x+14>0$

$S_1 = [2, 3[$

: $x = 3$

$1 < 0$

مستحيل

$S_2 = \phi$

: $x \in]3; +\infty[$

$\sqrt{x-2} < -2x+6$

$\oplus \qquad \ominus$

مستحيل

$S_3 = 0$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

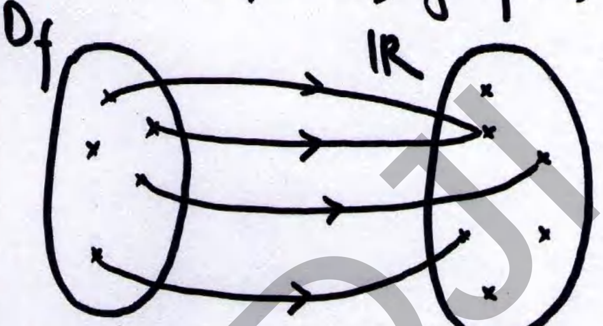
$S = [2; 3[$

عموميات على الدوال

الدوال العددية

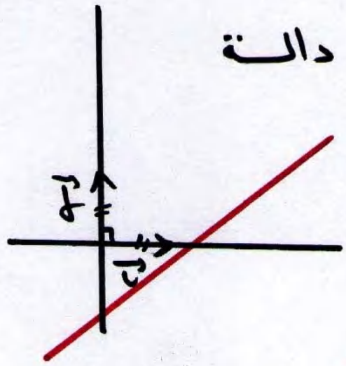
1/ مفهوم دالة

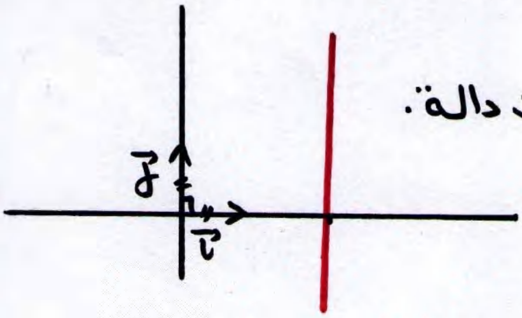
$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$



سابقة ⟵ صورة

- لكل x من D_f : صورة وحيدة.
- كل عدد y، يمكن أن يكون له سابقة، اثنتان، ....، أو لا شيء.





- كل دالة f معرفة بـ:
  - مجموعة تعريفها D_f
  - دستور الدالة : $f(x) = \dots\dots$

2/ مجموعة تعريف دالة:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{1}{A} \ ; \ A \neq 0 \\ \sqrt{A} \ ; \ A \geqslant 0 \end{array}}$$

تقاطع عدة شروط

maximum D_f

- $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$, $B(x) \neq 0$
- $f(x) = \sqrt{B(x)}$; $B(x) \geqslant 0$
- $f(x) = \dfrac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$, $B(x) > 0$
- $f(x) = \sqrt{|B(x)|}$; لا يوجد شرط
- $f(x) = \dfrac{A(x)}{\sqrt{|B(x)|}}$; $B(x) \neq 0$
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{A(x)}{B(x)}}$; $\begin{cases} A(x) \cdot B(x) \geqslant 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \sqrt{A(x) \cdot B(x)}$; $A(x) \cdot B(x) \geqslant 0$

- D_f يكتب على شكل:
  - مجموعة: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
  - اتحاد مجالات: $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1, 2[\cup]2 ; +\infty[= \mathbb{R} - \{1 ; 2\}$

← هذا الشكل يساعد على حساب النهايات

أمثلة:

- $f(x) = 2x + 1$
- $f(x) = \dfrac{3x+6}{x-1}$
- $f(x) = \sqrt{6x+9}$
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$
- $f(x) = \sqrt{|-8x+2|}$
- $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$

- $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2+4x-5}$
- $f(x)=\dfrac{x^3+8}{\sqrt{x^2+4x-5}}$
- $f(x)=\dfrac{x^3+8}{\sqrt{x^2+4x-5}}$
- $f(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}$
- $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2-\sqrt{x+3}}$

3/ حساب صورة أو سوابق عدد :

حساب صورة عدد a:

- نتأكد أن $a\in D_f$
- نحسب $f(a)$
- $f(a)=b$

مثال: $f(x)=2x+1 ; D_f=\mathbb{R}$

$f(0)=1$

حساب سوابق عدد b:

- نحل المعادلة $f(x)=b$
- نحتفظ بالحلول التي تنتمي إلى D_f

مثال: $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

جد سوابق العدد 0.

$f(x)=0 \Rightarrow x^2+4x-5=0$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \text{مرفوض} \\ x=-5 \end{cases}$

اذن $f(-5)=0$

4/ تساوي دالتين:

$$\boxed{f=g \text{ معناه } \begin{cases} D_f=D_g \\ f(x)=g(x) \text{ و} \end{cases}}$$

أمثلة:

$f(x)=x+2 ; D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{(x+2)^2} ; D_g=\mathbb{R} , g(x)=|x+2|$

$f\neq g$ لأن $f(x)\neq g(x)$

على المجال $[-2,+\infty[$: $f=g$

$f(x)=x+2 ; D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2} ; D_g=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

$g(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2$

- على المجال $\mathbb{R}$: $f\neq g$
- على المجال $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$: $f=g$

الاستعمال: ايجاد شكل آخر مبسط لدالة f.

* **مثال:** $f(x)=\frac{x^3+9}{x^2-1}$

اثبت أنه من أجل كل x من D_f:

$f(x)=g(x)$

حيث: $g(x)=x+\frac{5}{x-1}-\frac{4}{x+1}$

الحل:

$D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$D_f=D_g$

نبين الآن أن: $f(x)=g(x)$

← ننطلق من $f(x)$ إلى $g(x)$

← ننطلق من $g(x)$ إلى $f(x)$

← نبين أن $f(x)-g(x)=0$

أشكال مهمة لدوال معروفة:

①. $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

②. $\frac{ax+b}{cx+d}=\alpha+\frac{\beta}{cx+d}$

③. $\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{dx+e}$

④. $\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+kx+\ell}=\alpha x+\beta+\frac{\gamma x+y}{ex^2+kx+\ell}$

* α، β، γ، y تعين بالقسمة الاقليدية أو المطابقة

• ① تسمى دالة كثير حدود

• ②، ③، ④ تسمى دوال ناطقة $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$.

• الدالة $f(x)=\sqrt{x+1}-5x^2+2$ تسمى دالة صماء (جذرية)

• الدالة $f(x)=\frac{x^2+5x-\sqrt{x}}{2x+1}$ تسمى دالة كسرية.

5/ عمليات على الدوال:

* حذار مجموعة التعريف:

* $(f+k)(x)=f(x)+k$; D_f
* $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $D_f\cap D_g$
* $(k.f)(x)=k.f(x)$; D_f
* $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$; $D_f\cap D_g$
* $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$; $D_f\cap D_g\cap(g(x)\neq 0)$
* $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$ تركيب دوال $(x\in D_f)\cap(f(x)\in D_g)$

مثال: $f(x)=2x^2-1$ ، $D_f=[0,+\infty[$

$g(x)=\sqrt{x+1}$ $D_g=[-1,+\infty[$

* عين الدوال التالية:

$f+1$; $f+g$ ، $2f-3g$ ، $-2g$ ، $f\times g$

$\frac{g}{f}$ ، $f\circ g$ ، $g\circ f$

* هل يمكن القول أن $f\circ g=g\circ f$ ؟

6/ اتجاه تغير دالة:

← نختار الشكل المناسب للدالة

← نعين مجالات الدراسة (قد تعطى)

← نختار الطريقة المناسبة.

أ/ باستعمال قواعد الحساب في $\mathbb{R}$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان من مجال I ($I \in D_f$)، من أجل كل x_1 و x_2:

* f متزايدة تماما على I:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

* f متناقصة تماما على I:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

* f متزايدة على I:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

* f متناقصة على I:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

* f ثابتة على I:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ دوما.

N.B:

. f رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما)

. f رتيبة (متزايدة أو متناقصة)

مثال:

* f معرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = -x^2-4x+1$
* g معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ ب $g(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$

ادرس اتجاه تغير f و g ، ثم شكل جدولي تغيراتهما.

الدالة f:

$$f(x) = -x^2-4x+1$$
$$f(x) = -(x+2)^2+5$$

على المجال $]-\infty,-2]$:

$x_1 < x_2 \le -2$

$(x_1+2) < (x_2+2) \le 0$

$(x_1+2)^2 > (x_2+2)^2$

$-(x_1+2)^2 < -(x_2+2)^2$

$-(x_1+2)^2+5 < -(x_2+2)^2+5$

$f(x_1) < f(x_2)$

f متزايدة تماما على $]-\infty,-2]$

على المجال $[-2,+\infty[$ بنفس الطريقة نجد: f متناقصة تماما على $[-2;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	? ↗	$f(-2)=5$	↘ ?

* يمكن القول أن 5 قيمة حدية عظمى لـ (f) تبلغها من أجل $x=-2$

. $(D): x=-2$ محور تناظر لـ (C_f)

. ? / ? تمثل نهايات الدالة f.

الدالة g:

$g(x) = \frac{3x-5}{x-2}$; $D_g =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

باستعمال القسمة الاقليدية أو المطابقة

$g(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

• على المجال $]-\infty, 2[$

$x_1 < x_2 < 2$

$x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0$

$\frac{1}{x_1-2} > \frac{1}{x_2-2}$

$\frac{1}{x_1-2} + 3 > \frac{1}{x_2-2} + 3$

$g(x_1) > g(x_2)$

g متناقصة تماما على $]-\infty, 2[$

• على المجال $]2, +\infty[$

بنفس الطريقة نبرهن أن g متناقصة تماما على $]2, +\infty[$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$	?	$\searrow$	? ‖ ?	$\searrow$	?

• النقطة $\omega(2;3)$ مركز تناظر لـ (C_g)

ب/ باستعمال النسبة $A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

من أجل كل x_1 , x_2 من I :

• $A > 0 \Rightarrow$ f متزايدة تماما على I

• $A < 0 \Rightarrow$ f متناقصة تماما على I

• $A = 0$ من أجل كل x من I $\Rightarrow$ f ثابتة على I

مثال:

• لتكن الدالة f المعرفة على IR ب:

$f(x) = x^3$

• تحقق أنه من أجل كل x_1 , x_2 من IR فإن

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4}$

• استنتج اتجاه تغير الدالة مكعب.

الحل:

• باستعمال المتطابقة الشهيرة لتحليل $a^3 - b^3$ نبين العبارة

• $A > 0$ دوما اذن الدالة مكعب متزايدة تماما على IR.

ج/ قواعد عامة:

⊙ اتجاه تغير $f + k$ نفسه اتجاه تغير الدالة f.

⊙ اتجاه تغير $k.f$

$\leftarrow$ $k > 0$: نفس اتجاه تغير f

$\leftarrow$ $k < 0$: عكس اتجاه تغير f.

⊙ f و g متزايدتان معناه الدالة $f+g$ متزايدة.

⊙ f و g متناقصتان معناه الدالة $f+g$ متناقصة.

⊙ $f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ ، $f - g$ ، لا يمكن الحكم

• اتجاه تغير $f\circ g$

- g رتيبة تماما على المجال $I=[a,b]$
- f رتيبة تماما على المجال $g(I)$

g متزايدة تماما $\Leftarrow g(I)=[g(a);g(b)]$

g متناقصة تماما $\Leftarrow g(I)=[g(b);g(a)]$

- اتجاه تغير $f\circ g$

← f و g لهما نفس اتجاه التغير: $f\circ g$ متزايدة تماما

← f و g مختلفان في اتجاه التغير: $f\circ g$ متناقصة تماما.

أمثلة:

① ادرس اتجاه تغير الدالة f:
$f(x)=-\frac{3}{x}+2$

② ادرس اتجاه تغير $f+g$:
$f(x)=3x+1 \; ; \; g(x)=+2x+3$

③ ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $[1{,}5;+\infty[$ ب $g(x)=(-2x+3)^2$

④ ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty,3]$ ب $g(x)=\sqrt{-x+3}$

الحل:

① $f(x)=-\frac{3}{x}+2 \;/\; D_f=]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$

$]-\infty,0[$	$]0,+\infty[$
• $\frac{1}{x}$ متناقصة تماما	kif kif
• $-\frac{3}{x}$ متزايدة تماما	
• $-\frac{3}{x}+2$ متزايدة تماما	
• f متزايدة تماما	• f متزايدة تماما

②
- $f(x)=3x+1$
  $3>0$: اذن f متزايدة تماما
- $g(x)=2x+3$
  $2>0$ اذن g متزايدة تماما

منه $f+g$ دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

③: $g(x)=(-2x+3)^2$

$D_g=[1{,}5;+\infty[$

$$g=u\circ v \quad \begin{cases} u(x)=x^2 \\ v(x)=-2x+3 \end{cases}$$

- v متناقصة تماما على $[1{,}5;+\infty[$
- اتجاه تغير u على المجال

$$v\left(\left[\frac{3}{2};+\infty\right[\right)=\left]v(+\infty);v\left(\frac{3}{2}\right)\right]=]-\infty,0]$$

على المجال $]-\infty,0]$: u متناقصة تماما

- اذن g متزايدة تماما على $[1{,}5;+\infty[$

$g(x)=\sqrt{-x+3}$; $D_g =]-\infty;3]$

$g = u \circ v$ $\begin{cases} u(x)=\sqrt{x} \\ v(x) = -x+3 \end{cases}$

- v متناقصة تماما على $]-\infty;3]$
- اتجاه تغير u على المجال

$v\big(]-\infty;3]\big) = \big[v(3);v(-\infty)\big[= [0,+\infty[$

على المجال $[0,+\infty[$: u متزايدة تماما

- اذن g متناقصة تماما على $]-\infty;3]$

د/ بدراسة اشارة الدالة المشتقة:

(Voir Apres)

N.B : قبل دراسة اتجاه التغير ندرس $\begin{cases}\text{شفعية} \\ \text{دورية} \\ \text{محور} \\ \text{مركز}\end{cases}$

7/ القيم الحدية لدالة:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- إذا كان من أجل كل x من I : $f(x) \leq f(a)$ ، نقول أن f تقبل **قيمة حدية عظمى** $f(a)=...$ تبلغها من أجل $x=a$
- إذا كان من أجل كل x من I : $f(x) \geq f(a)$ ، نقول أن f تقبل **قيمة حدية صغرى** $f(a)=...$ تبلغها من أجل $x=a$

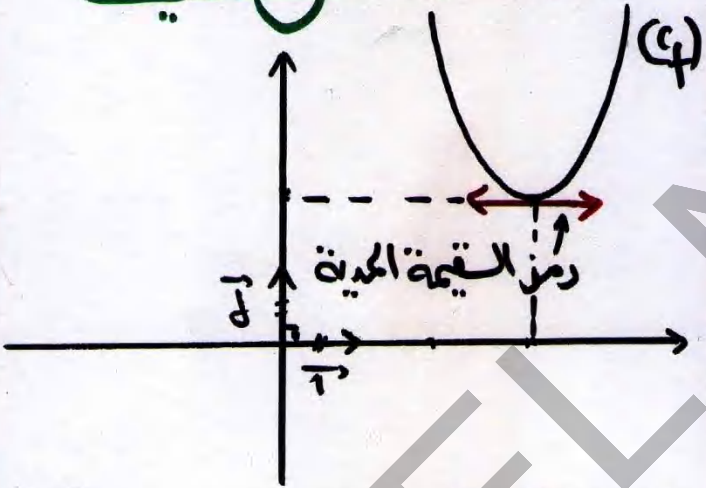
أ/ بملاحظة جدول التغيرات

$f(x) = x^2+2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	2	↗

f تقبل قيمة حدية صغرى هي 2 تبلغها من أجل $x=0$

ب/ باستعمال التمثيل البياني:



f تقبل قيمة حدية صغرى 2 تبلغها من أجل $x=3$

ج/ باستعمال قواعد الحساب في $\mathbb{R}$:

وذلك بعد اختيار الشكل المناسب لـ f.

مثال: اثبت ان $f(x) = -x^2-4x+1$ تقبل قيمة حدية يطلب تعيينها.

$f(x) = -x^2-4x+1$

$f(x) = -(x+2)^2+5$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$(x+2)^2 \geq 0$$
$$-(x+2)^2 \leq 0$$
$$-(x+2)^2+5 \leq 5$$
$$f(x) \leq 5$$

اذن f تقبل قيمة حدية عظمى 5 تبلغها من أجل $x=-2$

د/ باستعمال الدالة المشتقة

8/ دراسة شفعية دالة:

* f دالة معرفة على D_f

① D_f متناظر بالنسبة للصفر (لكل $x\in D_f$ ، يوجد $-x\in D_f$)

② نحسب $f(-x)$

$=$

$f(x)$	$-f(x)$
* f دالة زوجية	* f دالة فردية
* (C_f) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب	* (C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ
* نقتصر مجال الدراسة على المجال $[0,+\infty[$ ثم نناظر	* نقتصر مجال الدراسة على $[0,+\infty[$ ثم نناظر

أمثلة:

① $f(x)=x^2$ ، $D_f=\mathbb{R}$

② $f(x)=\frac{1}{x}$; $D_f=\mathbb{R}^*$

③ $f(x)=|x|+2$; $D_f=\mathbb{R}$

④ $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

⑤ $f(x)=\sqrt{2-|x|}$; $D_f=[-2;2]$

⑥ $f(x)=x^2$; $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

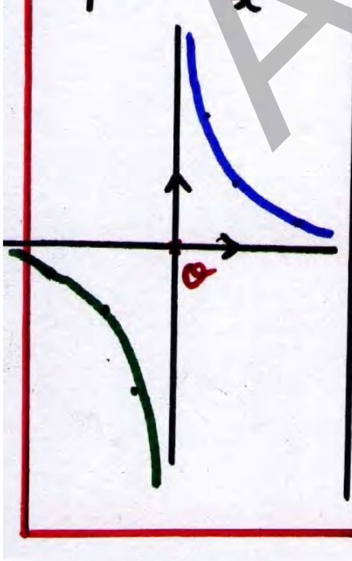
طبيعة الأسئلة:

* ادرس شفعية f
* بين أن f زوجية / فردية
* بين أن $f(-x)+f(x)=0$ ، ماذا تستنتج؟ ← فردية.
* بين أن $f(-x)-f(x)=0$ ، ماذا تستنتج؟ ← زوجية

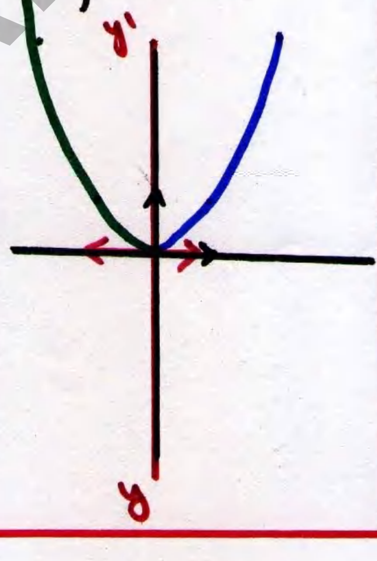
الحل:

① زوجية
② فردية
③ زوجية
④ زوجية
⑤ زوجية
⑥ / (لا توجد)

$f(x)=\frac{1}{x}$



$f(x)=x^2$



9/ الدالة الدورية:

• f دالة معرفة على D_f

• لاثبات أن الدالة f دورية ودورها T يكفي اثبات أن:

← من أجل كل x من D_f فإن $x+T$ ينتمي إلى D

← $f(x+T)=f(x)$

• T يسمى دور الدالة f : أصغر عدد موجب يحقق الشروط السابقة.

• الاستعمال: نقتصر دراسة الدالة f على مجال طوله T ثم ننشئ (C_f) وذلك بالقيام بانسحابات أشعتها $\vec{v}\binom{T}{0}$ يمينا وشمالا.

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على IR ب:

$$f(x)=\cos x$$

• اثبت أن f دالة دورية دورها 2π

• ادرس اتجاه تغير f على المجال $[-\pi;\pi]$

• انشئ (C_f) مع التوضيح.

الحل:

اثبات أن f دالة دورية:

$D_f=\mathbb{R}$ ، من أجل كل x من IR فان $x+2\pi$ ينتمي إلى D_f

• $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)$

$=\cos x$

$=f(x)$

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

اذن f دالة دورية دورها 2π.

يمكن دراسة f على مجال طوله 2π وليكن $[-\pi;\pi]$

دراسة شفعية f:

• D_f متناظر بالنسبة لـ 0

$$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$$

f دالة زوجية.

اذن يمكن اقتصار المجال $[-\pi,\pi]$ بالمجال $[0,\pi]$

دراسة اتجاه تغير f على المجال $[0,\pi]$

$x_1<x_2 \Rightarrow \cos x_1>\cos x_2$

$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

f متناقصة تماما على $[0,\pi]$

جدول تغيرات f:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	-1 ↗	0	1	0	↘ -1

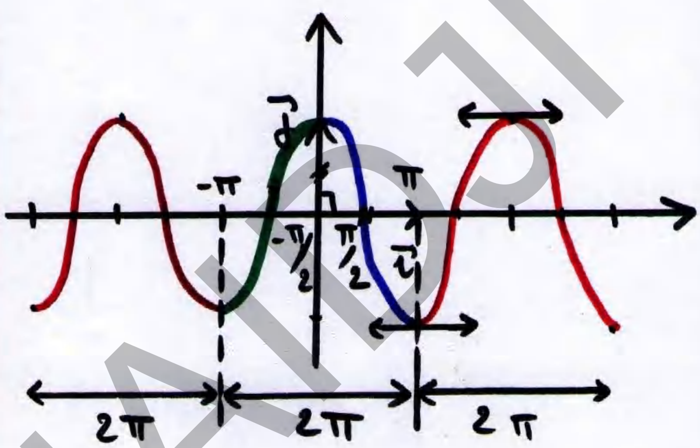
نستنتج من شفعية الدالة ←

إنشاء (C_f):

• باستعمال جدول التغيرات، ننشئ (C_f) على المجال $[0;\pi]$

• نناظر بالنسبة لمحور التراتيب

• نسحب (C_f) يمينا وشمالا بالشعاع $\vec{v}\binom{2\pi}{0}$



٨٥/ محور التناظر:

اثبت أن $(\Delta): x=\alpha$ محور تناظر لـ (C_f) $\Leftarrow$ 3 طرق.

طريقة ①:

• لكل x من D_f فان $(2\alpha-x)\in D_f$

• $f(2\alpha-x)=f(x)$

طريقة ②:

• لكل $\alpha-x$ من D_f فإن $(\alpha+x)\in D_f$

• $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$

طريقة 3 "دساتير تغيير المعلم"

• نغير المعلم من $(x;y)$ إلى $(X;Y)$ كما يلي

$$\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y \end{cases}$$

• انطلاقا من عبارة $y=f(x)$ و بتعويض x بقيمته و y بقيمته نجد عبارة Y بدلالة X

$$Y=g(X)$$

• نبين أن g دالة زوجية.

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x^2+4x+3$$

اثبت أن (C_f) يقبل محور تناظر $(\Delta): x=-2$

طريقة ①:

$D_f=\mathbb{R}$ ، لكل x من D_f فان $(2\alpha-x)\in D_f$

قبل اجراء الحسابات، نغير شكل $f(x)$

$$f(x)=(x+2)^2-1$$

$$f(2\alpha-x)=f(-4-x)$$
$$=[-4-x+2]^2-1$$
$$=(-x-2)^2-1$$
$$=(x+2)^2-1=f(x)$$

طريقة ②:

* $D_f=\mathbb{R}$ يعني لكل $-2+x$ من D_f

فإن $-2-x$ ينتمي لـ D_f

* اثبات أن $f(-2+x)=f(-2-x)$

* $f(-2+x)=(-2+x+2)^2-1$

$= x^2-1$

* $f(-2-x)=(-2-x+2)^2-1$

$=(-x)^2-1$

$=x^2-1$

اذن $f(-2+x)=f(-2-x)$

و $(\Delta): y=2$ محور تناظر لـ (C_f).

طريقة ③:

* تغيير المعلم

$$\begin{cases} x = X-2 \\ y = Y \end{cases}$$

* $y = x^2+4x+3$

$Y=(X-2)^2+4(X-2)+3$

$Y=X^2+4\underline{-4X+4X}-8+3$

$Y=X^2-1$

$g(X)=X^2-1$

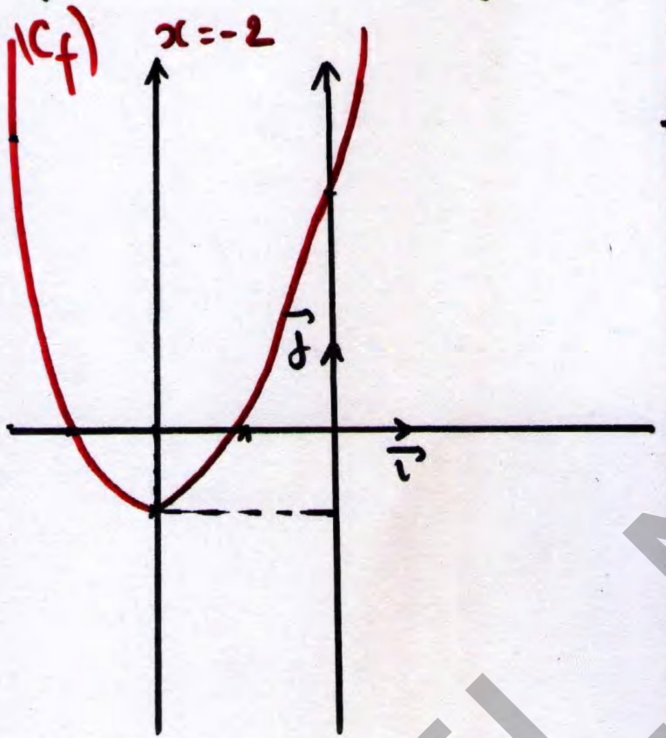
نبين أن g زوجية

$D_g=\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة لـ 0

$g(-X)=(-X)^2-1=X^2-1=g(X)$

g دالة زوجية

اذن $(\Delta): y=-2$ محور تناظر لـ (C_f).



ملاحظة:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ تحقق

$f(\underset{\boxed{2a}}{4}-x)=f(x)$

ماذا نستنتج؟

نستنتج أن المستقيم $(D): \underline{x=2}$

محور تناظر لـ (C_f)

١٨/ مركز التناظر:

اثبت أن النقطة $\omega(\alpha,\beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) ⇐ 3 طرق

طريقة ①:

لكل x من D_f فإن $(2\alpha-x)\in D_f$

$$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$$

طريقة ②:

لكل $\alpha-x$ من D_f فإن $(\alpha+x)\in D_f$

$$f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$$

طريقة ③ "دساتير تغيير المعلم"

. نغير المعلم من (x,y) الى (X,Y) كما يلي

$$\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases}$$

. انطلاقا من عبارة $y=f(x)$، نعوض x و y بقيمتيهما

. نجد عبارة Y بدلالة X ثم نبين أن g حيث $g(X)=Y$ هي دالة فردية

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كمايلي:

$$f(x)=\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$$

اثبت أن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

طريقة ①:

لاثبات انه من اجل كل x من D_f فإن $-2-x$ ينتمي لـ D_f.

. نستعمل البرهان بالعكس النقيض للاستلزام

$P\Rightarrow Q$ معناه $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$

. لكن P و Q حيث

$P: -2-x\notin D_f$

$Q: x\notin D_f$

P محققة، معناه $-2+x\notin D_f$

⇐ $(-2-x)+1=0$

⇐ $-x-1=0$

⇐ $x=-1$

⇐ $x\notin D_f$

⇐ Q محققة

$P\Rightarrow Q$ معناه $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$

أي

$x\in D_f$ يستلزم $-2-x\in D_f$

وهذا هو المطلوب.

نثبت الآن أن:

$f(-2-x)+f(x)=2$??

$f(-2-x)+f(x)=$

$=1+\frac{1}{-2-x+1}+1+\frac{1}{x+1}$

$=2+\frac{1}{-x-1}+\frac{1}{x+1}$

$=2-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=2$

$f(-2-x)+f(x)=2$

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

طريقة ②:

• لكل x من D_f فإن $-2-x$ من D_f

• نبين أن $f(-1-x)+f(-1+x)=2$

$f(-1-x)+f(-1+x)=$

$=1+\frac{1}{-1-x+1}+1+\frac{1}{-1+x+1}$

$=1-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x}=2$

$f(-1-x)+f(-1+x)=2$

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

طريقة ③:

تغيير المعلم

$$\begin{cases} x=X-1\\ y=Y+1\end{cases}$$

$y=1+\frac{1}{x+1}$

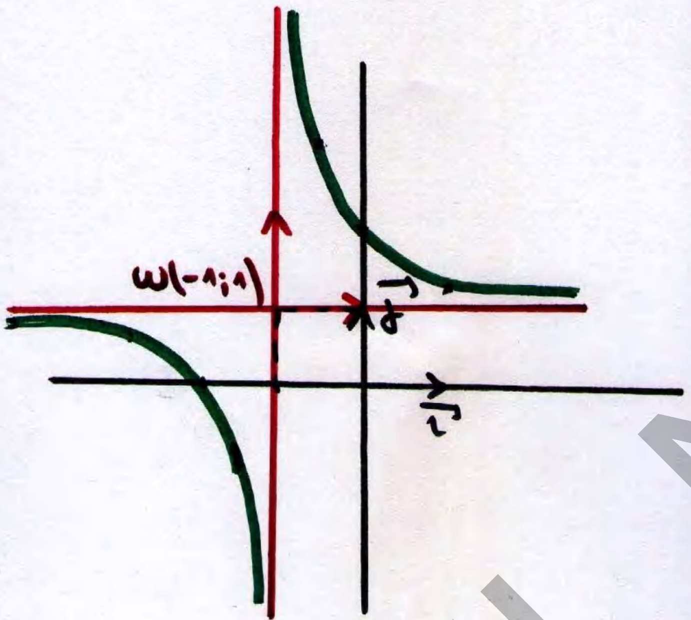
$Y+\cancel{1}=\cancel{1}+\frac{1}{X-\cancel{1}+\cancel{1}}$

$Y=\frac{1}{X}$

$g(X)=\frac{1}{X}$

g دالة فردية

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)



ملاحظة:

f تحقق

$f(\underbrace{-1}_{\alpha}-x)+f(\underbrace{-1}_{\alpha}+x)=\underbrace{2}_{2\beta}$

أو $f(\underbrace{-2}_{2\alpha}-x)+f(x)=\underbrace{2}_{2\beta}$

ماذا تستنتج ؟

النقطة $\omega(\frac{-2}{2};\frac{2}{2})$ أي $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

12/ نقط التقاطع مع (xx') و (yy'):

أ/ تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

* نحل المعادلة $f(x)=0$ ثم نتأكد هل الحلول تنتمي إلى D_f

مثال:

$f(x)=x^2-2$ ، $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=0$ معناه $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$

(C_f) يقطع (xx') في نقطتين

$(\sqrt{2};0)$ / $(-\sqrt{2};0)$

* باستعمال نظرية القيم المتوسطة
(Voir Apres)

ب/ تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب:

* نقطة واحدة على الأكثر $(0;f(0))$

مثال:

$f(x)=x^2-2$; $D_f=\mathbb{R}$

$f(0)=-2$

(C_f) يقطع (yy') في النقطة

$(0;-2)$

ج/ تقاطع (C_f) مع (C_g):

* نحل المعادلة $f(x)=g(x)$
* نجد قيم x الممكنة
- لإيجاد y نعوض في أسهل العبارتين

د/ تقاطع (C_f) مع $(D): y=ax+b$

* نحل المعادلة $f(x)=ax+b$
* نجد قيم x الممكنة
* لإيجاد y نعوض في أسهل العبارتين.

13/ إشارة دالة:

أ/ حسابيا:

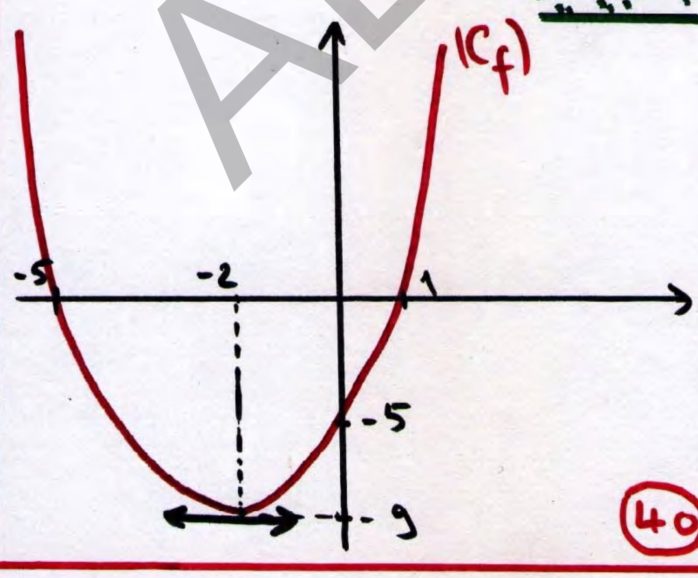
حل متراجحات $f(x)>0$ / $f(x)<0$

مثال:

$f(x)=x^2+4x-5$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ب/ بيانيا:



$f(x) > 0 \Leftrightarrow (C_f)$ فوق (xx')

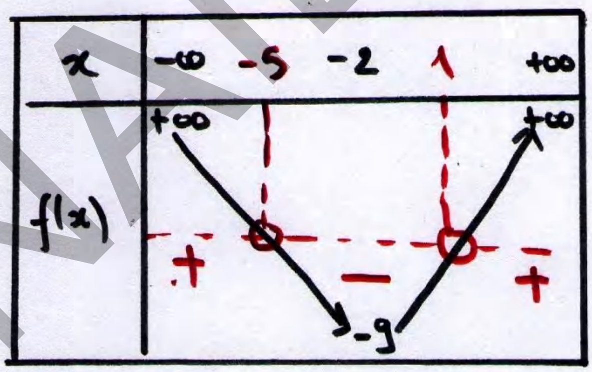
$f(x) < 0 \Leftrightarrow (C_f)$ تحت (xx')

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقطع (xx')

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ج/ باستعمال جدول التغيرات :

جدول تغيرات f :

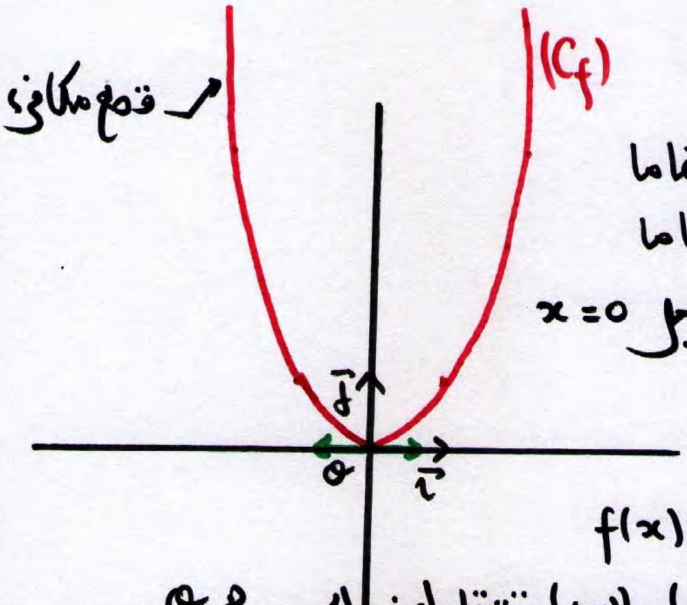


استنتاج جدول اشارة f

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

"الدوال المرجعية"

1/ الدالة مربع: $f(x)=x^2$



← مجموعة التعريف: $D_f=\mathbb{R}$

← اتجاه التغير: $]-\infty,0]$: متناقصة تماما

$[0,+\infty[$: متزايدة تماما

← قيمة حدية صغرى: 0 تبلغها f من أجل $x=0$

← شفعية الدالة: زوجية.

← محور التناظر: محور التراتيب

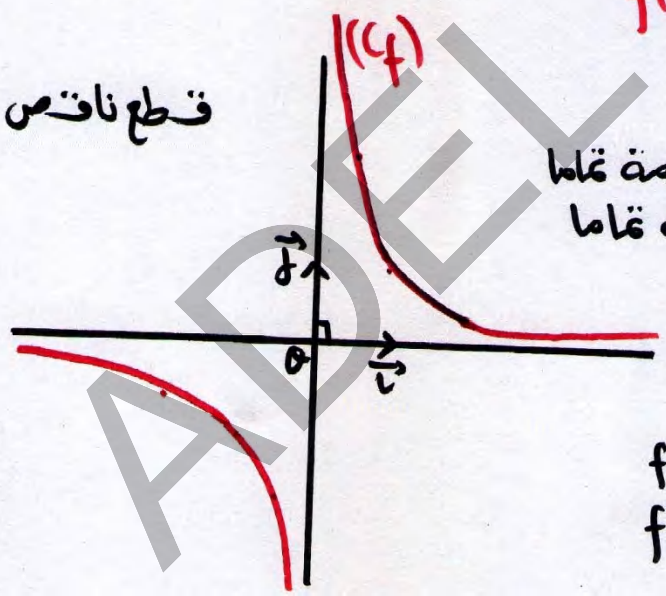
← اشارة الدالة: $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq 0$

← التقاطع مع المحاور: (C_f), (xx'), (yy') تتقاطع في المبدأ O.

← جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

2/ الدالة مقلوب $f(x)=\frac{1}{x}$



← مجموعة التعريف $D_f=\mathbb{R}^*$

← اتجاه التغير: $]-\infty,0[$: متناقصة تماما

$]0,+\infty[$: متناقصة تماما

← شفعية الدالة: فردية

← مركز التناظر: المبدأ $O(0,0)$

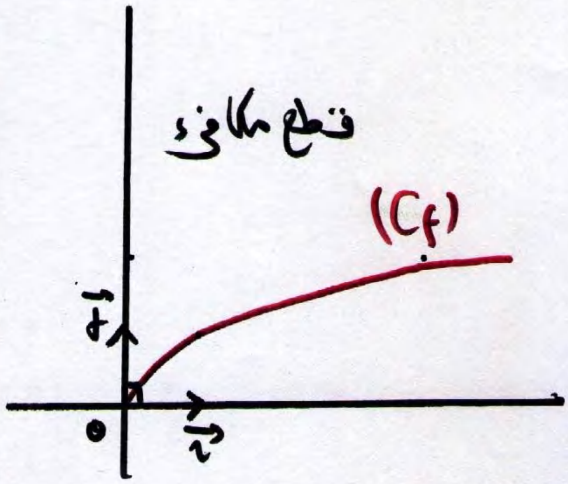
← اشارة الدالة: $x<0$: $f(x)<0$

$x>0$: $f(x)>0$

← جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

3/ الدالة الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{x}$



← مجموعة التعريف $D_f=[0,+\infty[$

← اتجاه التغير: متزايدة تماما

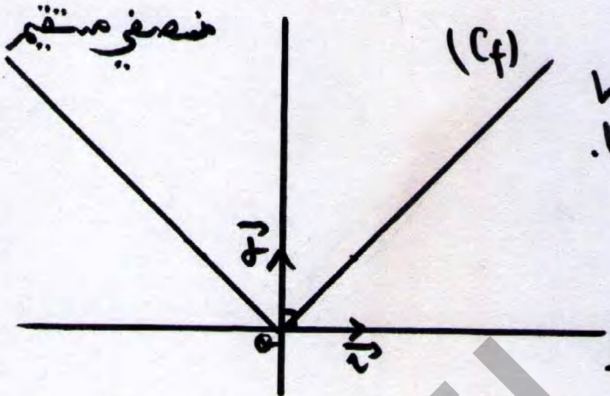
← اشارة الدالة: $\forall x \geq 0$: $f(x)\geq 0$

← التقاطع مع المحاور: (C_f) , (xx') , (yy') تتقاطع في O.

← جدول التغيرات:

x	0 $\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

4/ الدالة قيمة مطلقة: $f(x)=\|x\|$



← مجموعة التعريف: $D_f=\mathbb{R}$

← اتجاه التغير: $]-\infty,0]$: متناقصة تماما

$[0,+\infty[$: متزايدة تماما.

← شفعية الدالة: زوجية.

← محور التناظر: محور التراتيب

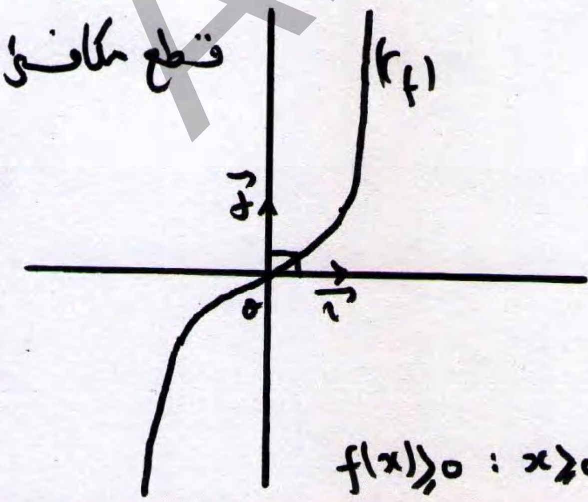
← اشارة الدالة: $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq 0$

← التقاطع مع المحاور: (C_f) , (xx') , (yy') تتقاطع في O.

← جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ 0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

5/ الدالة مكعب $f(x)=x^3$



← مجموعة التعريف $D_f=\mathbb{R}$

← اتجاه التغير متزايدة تماما.

← نقطة انعطاف: المبدأ $O(0,0)$

← شفعية الدالة: فردية

← مركز التناظر: المبدأ $O(0,0)$

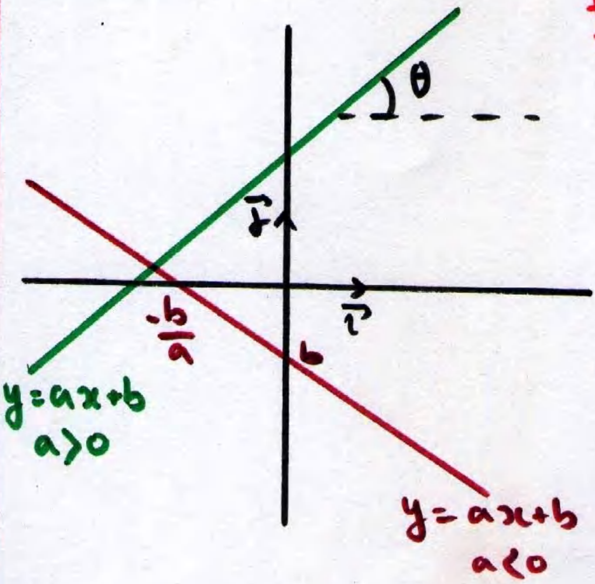
← اشارة الدالة: $x<0$: $f(x)\leq 0$ / $x\geq 0$: $f(x)\geq 0$

← التقاطع مع المحاور : (C_f) ، (xx') ، (yy') تتقاطع في المبدأ O.

← جدول التغيرات:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

6/ الدالة التآلفية $f(x) = y = ax+b$



← مجموعة التعريف $D_f = \mathbb{R}$

← اتجاه التغير: $a = tg\,\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

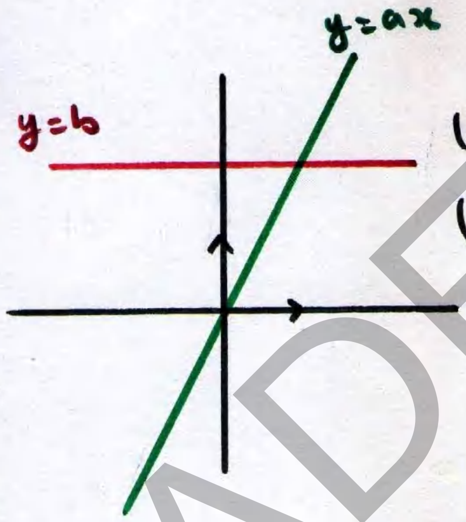
- $a>0$: دالة متزايدة تماما
- $a<0$: دالة متناقصة تماما
- $a=0$: دالة ثابتة

← اشارة الدالة:

- $a \neq 0$

x	$-\infty$ $-b/a$ $+\infty$
$f(x)$	عكس اشارة a	نفس اشارة a

- $a=0$: $f(x)=b$ إما $\oplus$ دوما أو $\ominus$ دوما



← التقاطع مع المحاور:

$(C_f) \cap (xx') = \left\{\left(-\frac{b}{a};0\right)\right\}$

$(C_f) \cap (yy') = \left\{(0;b)\right\}$

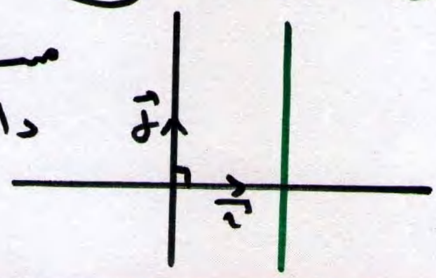
← حالات خاصة:

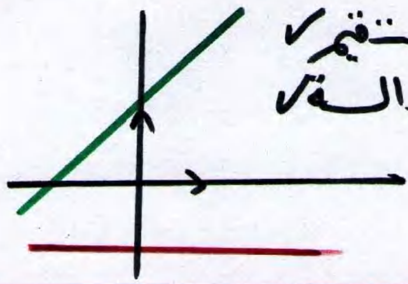
- $b=0$: (C_f) يمر بالمبدأ O.
- $a=0$: (C_f) مستقيم يوازي محور الفواصل

ملاحظة:

- كل دالة تآلفية تمثل بمستقيم لكن ليس كل مستقيم هو تمثيل بياني لدالة.
- $(\Delta): x=\alpha$ مستقيم يوازي محور الفواصل لا يمكن أن يمثل دالة

مستقيم ✓
دالة X





مستقيم ✓
دالة ✓

النهايات

" النهايات "

1/ مفهوم النهاية:

* x يؤول إلى 2 (x ينتهي عند 2) معناه x يأخذ قيم مجاورة جدا للعدد 2

$$\begin{cases} x = 2+\varepsilon \\ x = 2-\varepsilon \end{cases} , \varepsilon \to 0^+$$

* نكتب $x \to 2$ ونميز حالتين

← $x \overset{>}{\to} 2$ $(x \to 2^+)$ اليمين
أي $x = 2+\varepsilon$

← $x \overset{<}{\to} 2$ $(x \to 2^-)$ اليسار
أي $x = 2-\varepsilon$

* مثال: $f(x) = \dfrac{x+4}{x+2}$

لما $x \to 2$ فإن $f(x) \to \dfrac{3}{2}$

نكتب $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{3}{2}}$

$x \to +\infty$
$x \to -\infty$
$x \to a$
$x \to 0$

2/ عمليات على النهايات:

نهاية مجموع دالتين:

f	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	a	$+\infty$
g	$+\infty$	a	$-\infty$	a	a'	$-\infty$
$f+g$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$a+a'$	ح.ع.ت

نهاية جداء دالتين:

f	∞	∞	a	∞
g	∞	$a \neq 0$	a'	0
$f \times g$	∞ (الاشارة)	∞ (الاشارة)	$a \cdot a'$	ح.ع.ت

نهاية حاصل قسمة:

f	∞	$a \neq 0$	$a \neq 0$	∞
g	$a \neq 0$	∞	$a' \neq 0$	∞
f/g	∞ (الاشارة)	0 الاشارة	$\dfrac{a}{a'}$	ح.ع.ت

f	∞	0	$a \neq 0$	0	0
g	0	∞	0	$a \neq 0$	0
f/g	∞ الاشارة	0 الاشارة	∞ الاشارة	0	ح.ع.ت

$(+\infty)^n \longrightarrow +\infty$

$(-\infty)^n$

$n = 2k$: $(+\infty)$

$n = 2k+1$: $(-\infty)$

$\sqrt{+\infty} \to +\infty$

$\sqrt{-\infty}$ ✗

3/ قواعد هامة:

1• $\lim\limits_{x \to +\infty,\ -\infty,\ a} (k) = k$

2• $\lim k \cdot f(x) = k \cdot \lim f(x)$

3• $\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim f(x)}$

4• $\lim |f(x)| =$ يجب التخلص من رمز $(||)$ ثم فصل الحالات

5• $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

* a لا يمثل حدا من حدود D_f المفتوحة
* f لا تتغير عبارتها عند a

6• أثناء دراسة دالة، نحسب النهايات بصفة عامة عند حدود D_f المفتوحة

مثال $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

يجب حساب 4 نهايات

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

7• في نهاية حاصل قسمة، 0 قد يكون 0^+ أو 0^- لذا يجب تحديد اشارته أثناء الدراسة.

8• إذا قبلت دالة نهاية فهي وحيدة

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

9• في بعض الأحيان f لا تقبل نهاية:

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)$ ←

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ / $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ ←

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-1)^x$ ←

أمثلة:

احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x \to 0} (2x+3) = 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-4x+\sqrt{2}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-4x+\sqrt{2}) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2(x+3)^2 = 2 \lim\limits_{x \to -\infty} (x+3)^2 = +\infty$

4/ متى نلجأ إلى دراسة $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)$

← a يمثل حدا من حدود D_f المفتوحة

← f تتغير عبارتها عند a

← في حالة وجود قيمة مطلقة وبعد التخلص منها.

* نحسب

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = l'$$

← إذا كان $l = l'$ فإن f تقبل نهاية عند a ونكتب

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

← إذا كان $l \neq l'$ فإن f لا تقبل نهاية عند a. بل تقبل نهاية على يمين a و نهاية أخرى على يساره. ونكتب

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = l' \end{cases}$$

ملاحظة:

* $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)$ ندرس فقط $D =]a;+\infty[$
* $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x)$ ندرس فقط $D =]-\infty,a[$

مثال ①:

$$f(x) = \frac{1}{-x+2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2;+\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = +\infty \quad \frac{1}{0^+}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = -\infty \quad \frac{1}{0^-}$$

إشارة المقام (0)

$<$ $>$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$-x+2$	$+$ 0^+ 0 0^- $-$

ملاحظة:

• قيم أصغر لا تعني 0^-

. قيم أكبر لا تعني 0^+

• يجب وضع جدول الإشارة لمعرفة إشارة 0

مثال②:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x} &]-\infty,0[\\ f(x)=2x & [0,+\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\frac{1}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

مثال3:

$$f(x)=|2x+2|$$

$$\begin{cases} f(x)=-2x-2 &]-\infty;-1] \\ f(x)=2x+2 & [-1;+\infty[\end{cases}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ عبارة①

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ عبارة②

$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=0$ عبارة①

$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=0$ عبارة②

$\lim_{x\to0} f(x)=2$ عبارة②

5/ طرق ازالة ح.ع.ت :

4 حالات ع.ت

$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ 0^0 1^∞

$0\times\infty$ $+\infty-\infty$

نعوض

ح ع ت ← نعوض → نتيجة

ح ع ت → ازالة ح.ع.ت

أ/ دالة كثير حدود

$$f(x)=2x^2-x+3$$

$$g(x)=(2x+3)(x^2-1)$$

احسب نهايات f و g عند $-\infty, +\infty, 2$

عند عدد:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$$\lim_{x\to2} f(x)=9$$

$$\lim_{x\to2} g(x)=21$$

عند ∞:

* نهاية دالة كثير حدود عند ∞ هي نهاية الحد الأعلى درجة عند ∞.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x^2)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x^2)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^3) = -\infty$$

ب/ دالة ناطقة

$$f(x)=\frac{x^2+4x+1}{-x+2}$$

$$g(x)=\frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2+3}$$

احسب نهاية f و g عند $+\infty$ ، $-\infty$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ ، $\lim_{x\to 1} g(x)$

عند ∞:

* نهاية دالة ناطقة عند ∞ هي نهاية الحد الأعلى درجة على الحد الأعلى درجة (بعد الاختزال) عند ∞.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

عند a:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{9}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to} 2} f(x) = +\infty \qquad \frac{\cancel{9}13}{0^+}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to} 2} f(x) = -\infty \qquad \frac{\cancel{9}13}{0^-}$$

$\lim_{x\to 1} g(x)$ ح ع ت $\frac{0}{0}$

* يجب اظهار $(x-1)$ في كل من البسط و المقام بتحليلهما باحدى الطرق الثلاث ثم الاختزال

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2-3x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2-3x-3} = \frac{-3}{5}$$

ج/ دالة صماء جذرية

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}+2x-3$$

$$g(x)=\sqrt{4x^2-4}-2x+3$$

احسب

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
* $\lim_{x\to+\infty} g(x)$
* $\lim_{x\to 0} f(x)$
* $\lim_{x\to 2} g(x)$

• عند 0 :

نعوض

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt{2} - 3$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 2\sqrt{3} - 1$$

• عند ∞ :

الحدين الأكثر تأثيرا $\Downarrow$ مجموعهما ليس 0 $\Downarrow$ التحليل

الحدين الأكثر تأثيرا $\Downarrow$ مجموعهما 0 $\Downarrow$ المرافق

* طريقة التحليل

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2x - 3$$

$(x \to -\infty)$ $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ $\quad 2x$

$$-x + 2x \neq 0$$

← نستعمل التحليل كما يلي

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2x - 3$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + x\left(2 - \frac{3}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x\left(2 - \frac{3}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x\left(2 - \frac{3}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \overset{-\infty}{x}\left(2 - \cancel{\frac{3}{x}}^{\to 0} - \sqrt{1 + \cancel{\frac{2}{x}}^{\to 0} + \cancel{\frac{2}{x^2}}^{\to 0}}\right)$$

$$2 - 1 = 1$$

$$= -\infty$$

* طريقة المرافق:

$$g(x) = \sqrt{4x^2 - 4} - 2x + 3$$

$(x \to +\infty)$ $\sqrt{4x^2} = 2x$ $\quad -2x$

$$2x - 2x = 0$$

← نستعمل طريقة المرافق كما يلي

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 - 4} - (2x - 3)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 - 4} - 2x + 3\right)\left(\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3\right)}{\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 4 - (2x - 3)^2}{\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{12x - 13}{\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3}$$

ثم نطبق طريقة التحليل والاختزال

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(12 - \frac{13}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4 - \frac{4}{x^2}} + 2 - \frac{3}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{12 - \cancel{\frac{13}{x}}^{\to 0}}{\sqrt{4 - \cancel{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}} - \cancel{\frac{3}{x}}^{\to 0} + 2} \quad 12 \quad = \frac{12}{4}$$

$$2 + 2 = 4$$

$$= 3$$

د/ دالة كسرية

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

$$g(x)=\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+3x+4}-2}$$

احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

عند a:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0} \text{ ح ع ت}$$

يجب اظهار $(x-a)$ في كل من البسط والمقام ثم الاختزال

المرافق — العدد المشتق.

طريقة المرافق:

$\sqrt{A}-B$ مرافقه $\sqrt{A}+B$

$\sqrt{A}+\sqrt{B}$ مرافقه $\sqrt{A}+\sqrt{B}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)}{x}\times\frac{(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+4}+2)}$$

نختزل $x-a$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

طريقة العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=h'(0)$$

حيث $h(x)=\sqrt{x+4}$

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2\sqrt{0+4}}=\frac{1}{4}$

عند ∞:

طريقة التحليل

نستخرج الحد الأكثر تأثيرا في البسط كعامل مشترك وكذلك في المقام ثم نختزل

NB: $x\to+\infty \quad |x|=x$

$x\to-\infty \quad |x|=-x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\cancel{\frac{4}{x}}^{\,0}}-\cancel{\frac{2}{\sqrt{x}}}^{\,0}}{\cancel{\sqrt{x}}^{\,+\infty}}=\frac{1}{+\infty}$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+3x-4}-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(2-\cancel{\frac{2}{x}}^{\,0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\cancel{\frac{3}{x}}^{\,0}-\cancel{\frac{4}{x^2}}^{\,0}}-\cancel{\frac{2}{x}}^{\,0}\right)} \quad \frac{2}{1}$$

$$= 2$$

• **طريقة المرافق:**

تصلح أحيانا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = 0$$

هـ/ دالة مثلثية:

• مبرهنات الحصر والمقارنة:

① إذا كان $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ -\infty\\ a}} g(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ -\infty\\ a}} h(x) = \ell$$

فإن $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty\\ -\infty\\ a}} f(x) = \ell$

② $\lim f(x) = +\infty \Leftarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim g(x) = +\infty \end{cases}$

③ $\lim f(x) = -\infty \Leftarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim g(x) = -\infty \end{cases}$

مثال: احسب

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$x \to +\infty$ أي $x > 0$ ، $\frac{1}{x} > 0$

نضرب في $\frac{1}{x}$ ونحافظ على اتجاه المتراجحة

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cancel{\frac{1}{x}}^{\,0} \quad x \to +\infty$$

إذن $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

• باستعمال العدد المشتق

احسب $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = (\sin x)'\Big|_{x=0}$$

$$= \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

• نهايات شهيرة:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$$

* **تبديل المتغير :**

* تبديل المتغير وارجاعه يؤول الى 0
* الضرب والقسمة في أعداد لاظهار نهايات شهيرة .

أمثلة :

① احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\sqrt{2}\ \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \times \left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\overbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}^{1}}{\underbrace{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)}_{1}} \times \frac{2\cancel{x}}{\frac{\cancel{x}}{4}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

② احسب $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x$

نضع $t = x - \frac{\pi}{2}$ $\left(x = t + \frac{\pi}{2}\right)$

$t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} (\cancel{\pi} - 2t - \cancel{\pi}) \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} -2t \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} -2t \frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0} -2t \frac{\cos t}{-\sin t}$$

$$= \lim_{t \to 0} 2 \overbrace{\cancel{\cos t}}^{1} \cdot \overbrace{\cancel{\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}}}^{1}$$

$$= 2$$

* **باستعمال العدد المشتق مرتين :**

احسب $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{(\sin 3x) - 0}{x - \pi/3}}{\frac{(2\cos x - 1)}{x - \frac{\pi}{3}}}$$

$$= \frac{(\sin 3x)'}{(2\cos x - 1)'}\Bigg|_{x = \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{3\cos 3x}{-2\sin x}$$

$$= \frac{3 \times -1}{-\cancel{2}\ \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$

* **ملاحظة :**

في النهايات بصفة عامة باستعمال الآلة الحاسبة ، يمكن تخمين النهاية

10/ طريقة لوبيتال

hors programme

C'est pour verifier...

* إذا كان $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ح.ع.ت

بتطبيق طريقة لوبيتال نجد

$$\lim_{x\to a} f(x)=\frac{g'(a)}{h'(a)}$$

* تصلح في جميع ح.ع.ت سواء دالة ناطقة، كسرية، مثلثية...

مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2+3}=\left(\frac{2x+1}{3x^2-8x}\right)_{x=1}$$

$$=\frac{-3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)_{x=0}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

السلوك التقاربي

لمنحن دالة

" السلوك التقاربي لمنحنى دالة " التفسير البياني للنهايات "

8/ المستقيمات المقاربة:

- عين م م لـ (C_f) !
- تأكد أن (D) م م لـ (C_f) !
- احسب النهاية ثم فسر بيانيا النتيجة !

أ/ المستقيم المقارب العمودي:

* عين، تأكد: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$$\Updownarrow$$

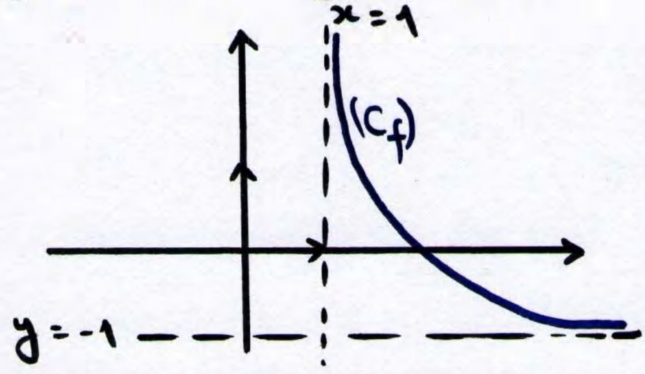
* (C_f) يقبل م م يوازي محور التراتيب معادلته $x = a$ وذلك عند $(-)+\infty$
* a غالبا هي القيمة الممنوعة.

ب/ المستقيم المقارب الأفقي:

* عين: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$
* تأكد: $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - a] = 0$

$$\Updownarrow$$

* (C_f) يقبل م م عند $+\infty$ $(-\infty)$ يوازي محور الفواصل، معادلته $y = a$



ج/ المستقيم المقارب المائل:

* تأكد أن $(D): y = ax+b$ م م مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$

← نبين أن $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

---

* يمكن للطالب ملاحظة الـ م م م بقوة الملاحظة، إذا كانت الدالة f من الشكل

$$f(x) = ax + b + g(x)$$

، نخمن أن (D) $y = ax+b$ م م م لـ (C_f) عند $\pm\infty$ ثم نتأكد من ذلك.

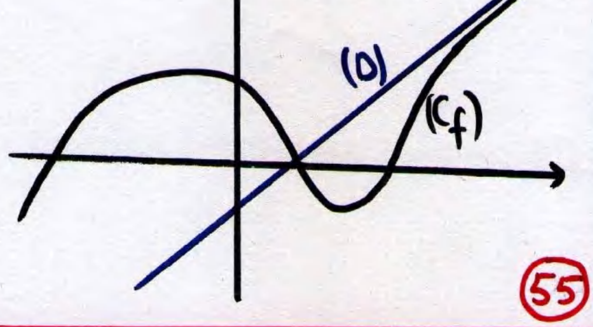
$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) =$$

- ∞ : X
- c : $(D): y = ax+b+c$
- 0 : $(D): y = ax+b$

---

* إذا كان $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \infty$

⇐ احتمال وجود مستقيم مائل.



البحث عن م م م باستعمال الفروع اللانهائية

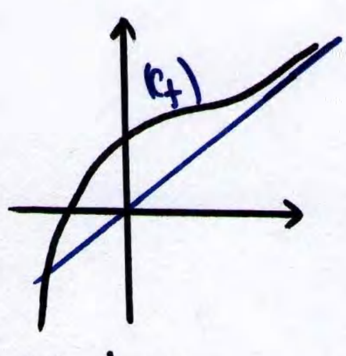
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

احتمال وجود م م م

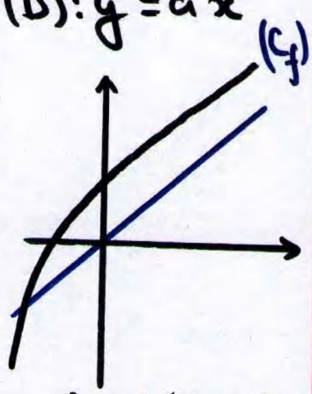
$\Downarrow$

نحسب $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$

- ∞ : (C_f) يقبل فرعا لانهائيا باتجاه $(D): x=0$ (محور التراتيب) $f(x)=x^2$
- 0 : (C_f) يقبل فرعا لانهائيا باتجاه $(D): y=0$ (محور الفواصل) $f(x)=\sqrt{x}$
- $a\neq 0$: نحسب $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$
  - ∞ : (C_f) يقبل فرعا لانهائيا باتجاه المستقيم $(D): y=ax$
  - b : (C_f) يقبل م م م $(D): y=ax+b$



م م مائل



فرع لانهائي

د/ الوضع النسبي:

* المستقيم المقارب العمودي لا يقطع أبدا (C_f)
* المستقيم المقارب الأفقي والمائل يمكن أن يقطعا (C_f) ← وضع نسبي
* لدراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (D) حيث $(D): y=ax+b$ ، ندرس اشارة الفرق $\theta(x)=f(x)-y$

$$\theta(x)=f(x)-(ax+b)$$

- $\theta(x)>0$: (C_f) فوق (D)
- $\theta(x)<0$: (C_f) تحت (D)
- $\theta(x)=0$: (D) يقطع (C_f)

ثم نلخص الدراسة في جدول.

هـ/ أمثلة:

* احسب النهايات، فسر بيانيا، ارسم (C_f) والمستقيمات المقاربة في كل حالة:

$f(x)=2+\frac{1}{x}$ / $f(x)=-2+\frac{1}{x^2}$

$f(x)=2x+3+\frac{1}{x}$ + الوضع النسبي

$f(x)=\frac{-2x^2+3x+2}{2x-1}$ ، + الوضع النسبي

$f(x)=x^2$ / $f(x)=\sqrt{x}$

مثال ①: $f(x)=2+\frac{1}{x}$

$f(x)=2+\frac{1}{x}$

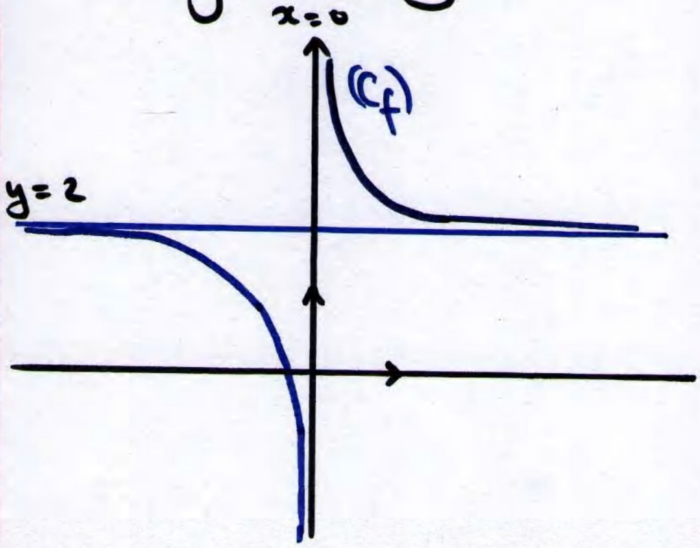
$D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ ، (C_f) يقبل م م يوازي محور الفواصل عند $-\infty$ معادلته $y=2$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ ، (C_f) يقبل م م يوازي محور الفواصل عند $+\infty$ معادلته $y=2$

③ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=-\infty$ ، (C_f) يقبل م م يوازي محور الفواصل عند $-\infty$ معادلته $x=0$

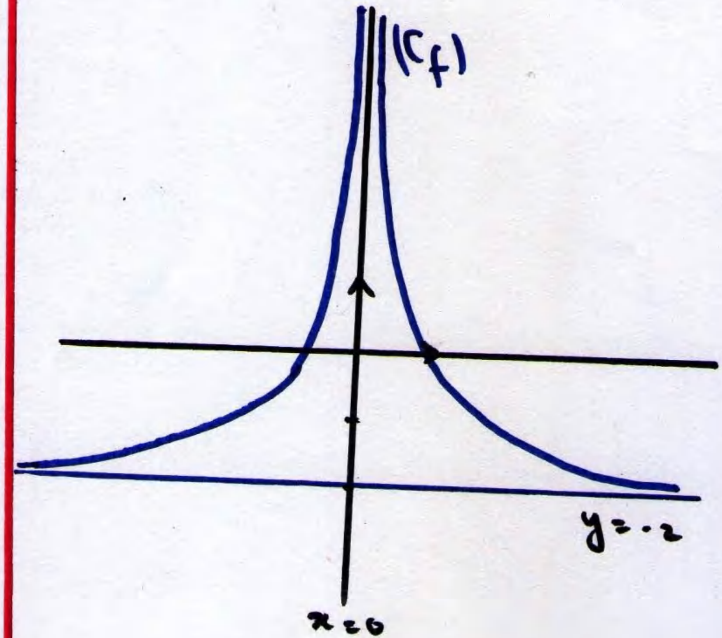
④ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$ ، (C_f) يقبل م م يوازي محور الفواصل عند $+\infty$ معادلته $x=0$ (حامل محور الفواصل)



مثال ②: $f(x)=-2+\frac{1}{x^2}$

المستقيمات المقاربة معادلاتها

$y=-2$ / $x=0$



مثال ③: $f(x)=2x+1+\frac{1}{x}$

✓ $x=0$

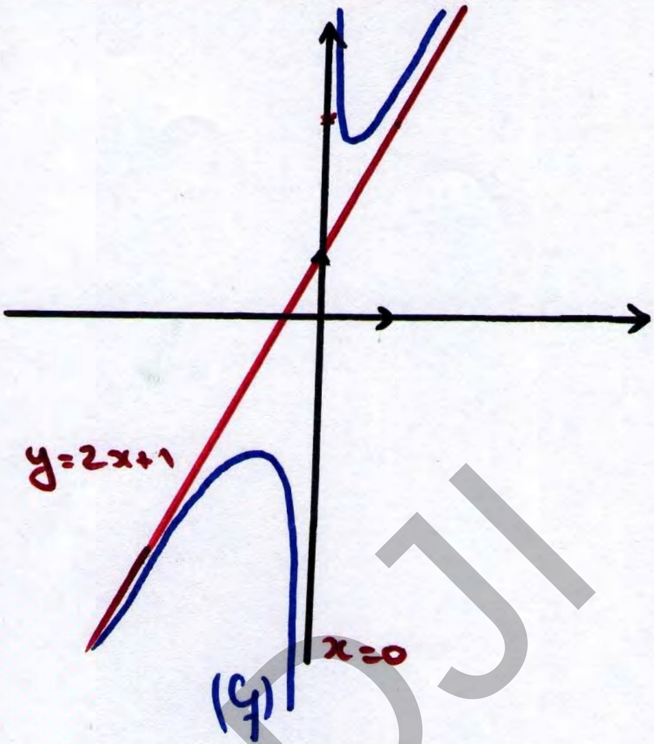
✓ نخمن أن $(\Delta): y=ax+b$ م م م لـ (C_f)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

الوضع النسبي:

$\theta(x)=f(x)-y=\frac{1}{x}$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$\theta(x)$	$-$	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)



مثال ③ $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+2}{2x-1}$

$D_f=]-\infty;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$

$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x)=-\infty$ $\quad x=\frac{1}{2}$

$\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

احتمال وجود م م م

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=-1$

$\lim_{x\to\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x+2}{2x-1}$

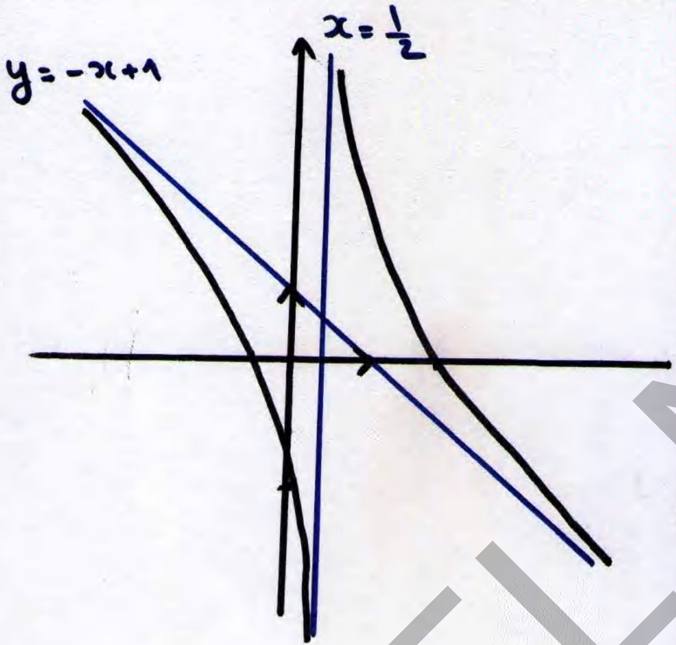
$=1$

إذن $(D): y=-x+1$ م م م لـ (C_f)
عند $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي

$\theta(x)=f(x)-(-x+1)=\dfrac{3}{2x-1}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$	$\qquad$ $+\infty$
$\theta(x)$	$-$	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)



مثال ④ $f(x)=x^2$

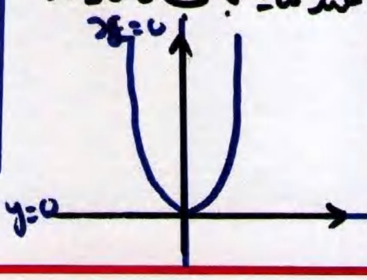
$D_f=]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

احتمال وجود م م م

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$

(C_f) يقبل فرعا لا نهائيا
عند $\pm\infty$ باتجاه $x=0$



مثال ⑤ $f(x)=\sqrt{x}$

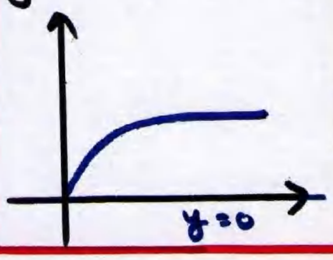
$D_f=[0;+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

احتمال وجود م م م

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

(C_f) يقبل فرعا لا نهائيا
عند $+\infty$ باتجاه $y=0$



هـ/ استنتاج م م م انطلاقا من آخر باستعمال شفعية دالة

$f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$; $D_f=\mathbb{R}$

1. تأكد أن $(d): y=x+1$ م م م لـ (C_f) عند $+\infty$
2. استنتج دون حساب أن (C_f) يقبل م م م (d') عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.

الحل:

1/ نبين أن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$

2/ استنتاج (d')

نلاحظ أن f دالة فردية

نضع $t=-x$ ($x\to+\infty$ معناه $t\to-\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x-1\right]=0$$

بما أن f فردية $f(x)=-f(-x)$

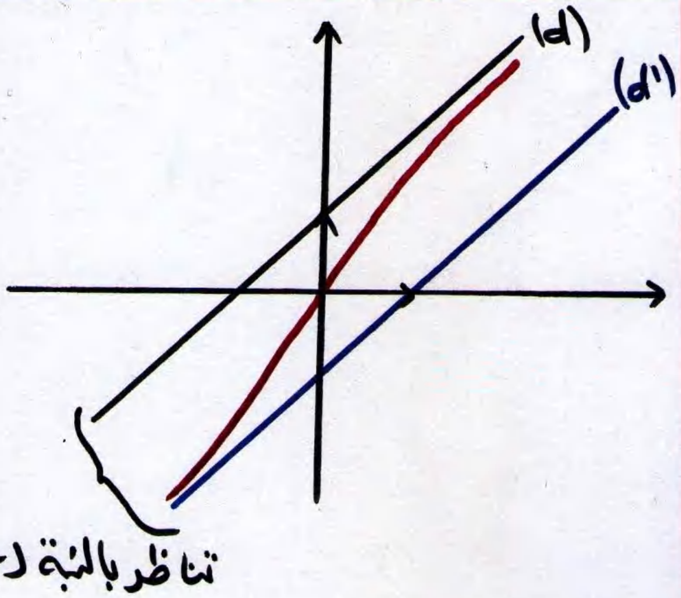
أي $\lim_{x\to+\infty}\left[-f(-x)-x-1\right]=0$

$$\lim_{t\to-\infty}\left[-f(t)+t-1\right]=0$$

$$\lim_{t\to-\infty}\left[f(t)-t+1\right]=0$$

$$\lim_{t\to-\infty}\left[f(t)-(t-1)\right]=0$$

إذن $(d'): y=x-1$



2/ المنحنيات المقاربة:

* نقول أن منحني الدالة g منحني مقارب لـ (C_f) عند ∞ !

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=0$$

$\Updownarrow$ تفسير بياني:

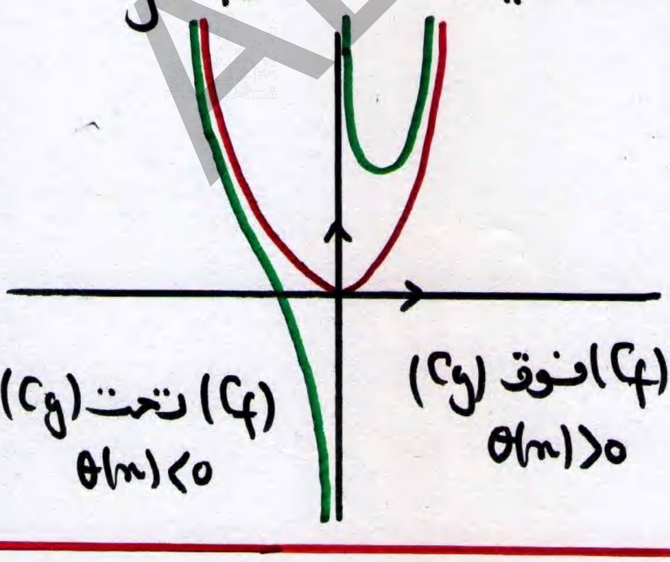
(C_g) منحني مقارب لـ (C_f) عند $\pm\infty$

مثال: $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x^2\right]=0$$

(C_g) منحني مقارب لـ (C_f) عند $\pm\infty$

بحيث $g(x)=x^2$



الاستمرارية

الاستمرارية

1/ استمرارية الدالة f عند عدد a:

* f دالة معرفة على D_f
* a عدد ينتمي إلى D_f (غير معزول، له جوار)

1 ← D_f يشمل a (a ليس حد لـ D_f)
2 ← $[a;+\infty[$
3 ← $]-\infty,a]$
4 ← $]-\infty,a]\cup[a,+\infty[$ f تتغير عبارتها عند العدد a

سؤال: ادرس استمرارية الدالة f عند a.

1/ D_f يشمل a (a ليس حد لـ D_f)

f مستمرة عند العدد a
$\Updownarrow$
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

2/ $D_f=[a,+\infty[$

* f ليست مستمرة عند a.

* دراسة استمرارية f على يمين a:

f مستمرة على يمين العدد a
$\Updownarrow$
$$\lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = f(a)$$

3/ $D_f=]-\infty,a]$

* f ليست مستمرة عند العدد a.

* دراسة استمرارية f على يسار العدد a:

f مستمرة على يسار العدد a
$\Updownarrow$
$$\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = f(a)$$

4/ $D_f=]-\infty,a]\cup[a,+\infty[$ و f تتغير عبارتها عند العدد a

* دراسة استمرارية f على يمين a:

f مستمرة على يمين a
$\Updownarrow$
$$\lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = f(a)$$

* دراسة استمرارية f على يسار a:

f مستمرة على يسار a
$\Updownarrow$
$$\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = f(a)$$

* دراسة استمرارية f عند العدد a:

f مستمرة عند العدد a
$\Updownarrow$
1 ← f مستمرة على يمين a
2 ← f مستمرة على يسار a.
3 ← $\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = f(a)$

مثال:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & [-\infty,0[\\ x & [0;+\infty[\end{cases}$$

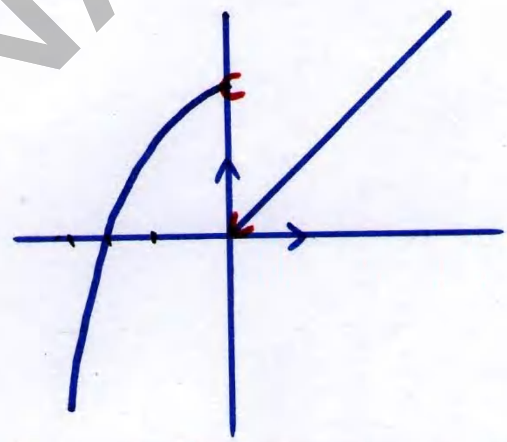
* هل الدالة f مستمرة عند 0 ؟

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-x^2+2) = 2$

$f(0)=0$

* f ليست مستمرة على يساره
* f مستمرة على يمين 0
* f ليست مستمرة عند 0



2/ استمرارية الدالة f على مجال I:

بين أن الدالة f مستمرة على المجال I ؟

*1 I مجال مفتوح $]a,b[$ ، $]-\infty,+\infty[$

f عبارة عن مجموع، جداء، تركيب، عدة دوال مرجعية مستمرة على I،
اذن فالدالة f مستمرة على المجال I

N.B :

f قابلة للاشتقاق $\Longleftarrow$ f دالة مستمرة
$\not\Longrightarrow$

*2 $I=[a,b]$

← نبين أن f مستمرة على $]a,b[$ كما سبق
← نبين أن f مستمرة على يمين a
← نبين أن f مستمرة على يسار b

*3 $I=[a,+\infty[$

← نبين أن f مستمرة على $]a,+\infty[$ كما سبق
← نبين أن f مستمرة على يمين a.

*4 $I=]-\infty,a]$

← نبين أن f مستمرة على $]-\infty,a[$ كما سبق
← نبين أن f مستمرة على يسار a.

3/ التفسير الهندسي للاستمرارية:

f دالة مستمرة على مجال I

$\Updownarrow$

يمكن رسم (C_f) على المجال I دون رفع القلم

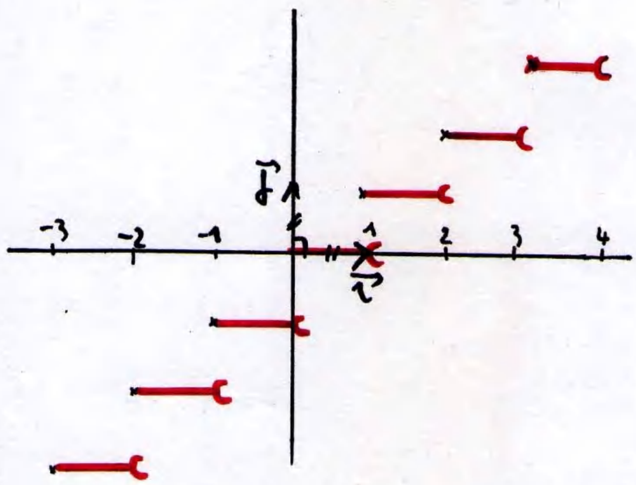
4/ أمثلة:

*1 دوال مستمرة على مجال تعريفها:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$f(x)=\begin{cases} -x &]-\infty,0] \\ x^2 &]0;+\infty[\end{cases}$$

* التمثيل البياني : fonction en escaliers



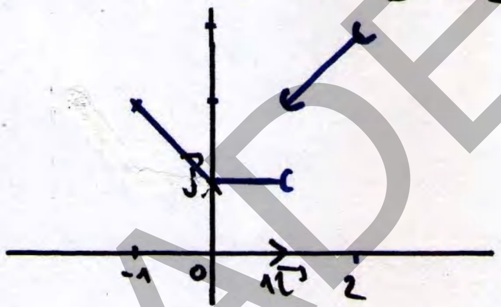
* دوال مرتبطة بالدالة الجزء الصحيح

لتكن f الدالة المعرفة على $[-1;2[$ بالعبارة

$$f(x)=x\,E(x)+1$$

عين عبارة f في كل مجال من D_f ، ارسم (C_f) ، هل f دالة مستمرة ؟.

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & [-1,0[\\ 1 & [0,1[\\ x+1 & [1;2[\end{cases}$$



* f مستمرة على $[-1,0]$ ، $[0,1[$ ، $[-1;1[$
$[1,2[$

* f ليست مستمرة على $[-1;2[$

مثال 2 (Voir page precedente)

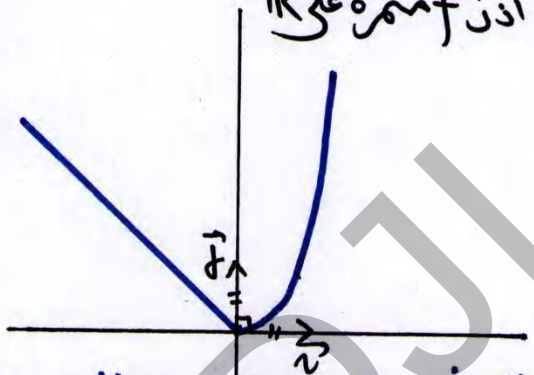
$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & [-\infty,0[\\ x & [0,+\infty[\end{cases}$$

* f مستمرة على $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

* استمرارية f عند 0 : ⇐ مستمرة

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=f(0)=0$$

* اذن f مستمرة على $\mathbb{R}$



2* دوال غير مستمرة على مجال تعريفها:

مثال : الدالة الجزء الصحيح

* تعريف

$$E:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z}$$

$$x\longrightarrow n=E(x)=[x]$$

حيث $n\leq x<n+1$

* أمثلة:

$E(2,3)=2$

$E(3)=3$

$[\pi]=3$

$E(-4,12)=-5$

* عبارة $E(x)$

$$E(x)=\begin{cases} -1 & [-1,0[\\ 0 & [0,1[\\ 1 & [1,2[\\ 2 & [2,3[\end{cases}$$

* تعليق:

الدالة E مستمرة على كل من المجالات
$[-3;-2[$ ، $[-2,-1[$ ..... ، $[2,3[$ ، $[3,4[$...

لكنها غير مستمرة على $\mathbb{R}$.

مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة القيم المتوسطة

الهدف:

1- اثبات أن معادلة ما تقبل حلولا في مجال معين باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة

2- تعيين حصر سعته m لهذه الحلول بطريقة التنصيف.

$\boxed{① \ f(x)=c}$

1- اثبت أن المعادلة تقبل على الأقل حلا في المجال $[a,b]$ (مفتوح، مغلوق، ∞، ...)

← f مستمرة على $[a,b]$

← c محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

في حالة مجال مفتوح: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to b} f(x)$

نقول أن $f(x)=c$ تقبل على الأقل حلا α محصور بين a و b: $a<\alpha<b$

$\alpha \in]a,b[$

2- اثبات أن الحل وحيد:

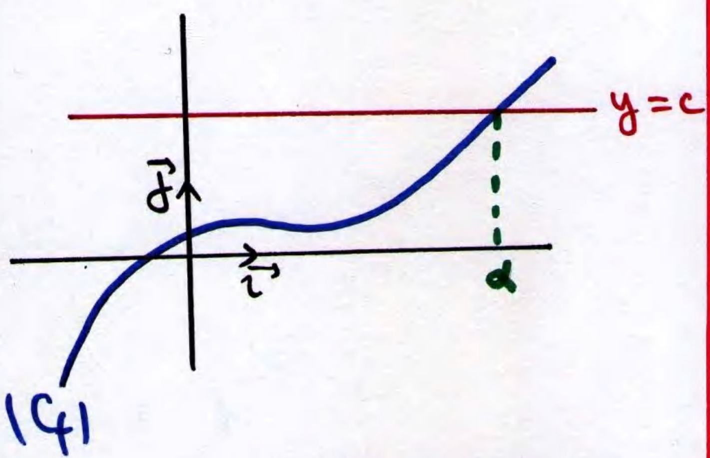
← f دالة رتيبة تماما

3- اثبات أن α محصور بين 1 و 3 مثلا:

← نثبت أن العدد c محصور بين $f(1)$ و $f(3)$.

4- التفسير البياني:

$f(x)=c$ تقبل حلا وحيدا α معناه (C_f) يقطع المستقيم $(D): y=c$ في نقطة وحيدة فاصلتها α



5- مثال + طريقة التنصيف:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$$

1/ ادرس تغيرات الدالة f.

2/ بين أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;1]$

أو

بين أن (C_f) يقطع $(D): y=8$ في نقطة وحيدة

3/ جد حصرا للحل α سعته 10^{-2}

أو

جد حصرا لفاصلة نقطة التقاطع.

x	$-\infty$		-2		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	21	↘	8	↘	-6	↗	$+\infty$

إثبات أن $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا على $[-2,1]$

* f دالة مستمرة على $[-2;1]$ (مجال جزئي من $\mathbb{R}$)
• $f(-2) < 8 < f(1)$ حيث

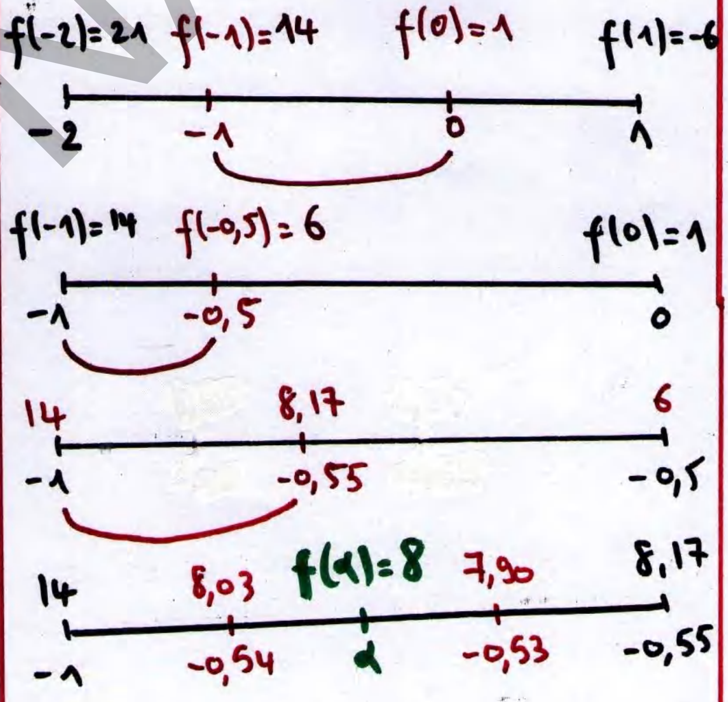
$$\begin{cases} f(-2)=21 \\ f(1)=-6 \end{cases}$$

• الدالة f متناقصة تماما على $[-2;1]$

مما سبق وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2<\alpha<1$

إيجاد حصر لـ α بطريقة التنصيف:

$a<\alpha<b$ هذا الحصر سعته m
معناه $m=b-a$



اذن $-0,54<\alpha<-0,53$ (10^{-2})

بيانيا: (C_f) يقطع $(D): y=8$ في النقطة الوحيدة ذات الفاصلة α

$-0,54<\alpha<-0,53$

② $f(x)=0$

• اثبات أن المعادلة تقبل حلا في المجال $[a,b]$ (مفتوح، مغلوق، ∞، عدد)

← f مستمرة على $[a,b]$
← f غيرت اشارتها.

نقول أن $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α حيث $a<\alpha<b$ $\alpha\in]a,b[$

• اثبات أن الحل وحيد:

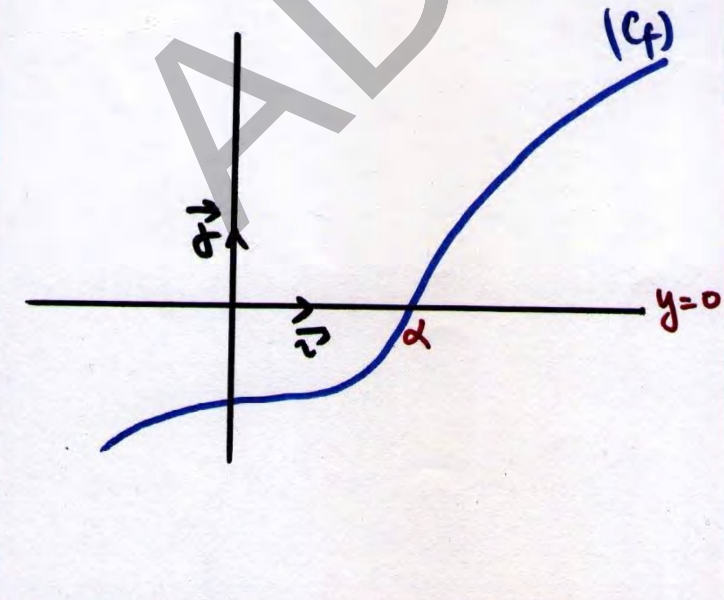
← f دالة رتيبة تماما.

- اثبات أن α محصور بين 1 و3 مثلا:

← نحسب $f(1)$ و $f(3)$ ونثبت أن $f(1)\times f(3)<0$

* التفسير البياني:

$f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α
$\Updownarrow$
(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α أي النقطة $A(\alpha,0)$



6 • مثال + طريقة التنصيف :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^3 - 2x + 5$

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ بين أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

3/ جد حصرا لـ α سعته 10^{-1}

أو

بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α ، ثم جد حصرا لـ α .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

• f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$

• f غيرت اشارتها من $+\infty$ إلى $-\infty$

• f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

مما سبق وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

ايجاد حصر لـ α :

f:	$+\infty$	5	-7	$-\infty$
x:	$-\infty$	0	2	$+\infty$

5	2	$-1,38$	-7
0	1	$1,5$	2

	$0,20$	$f(\alpha)=0$	$-0,54$	
1	$1,3$	α	$1,4$	$1,5$

(10^{-1}) $1,3 < \alpha < 1,4$

ملاحظة :

سؤال: بين أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$

في هذه الحالة لا نحتاج لطريقة التنصيف فقط نضيف اثناء الاجابة ما يلي

$$\begin{cases} f(1,3) = 0,20 \\ f(1,4) = -0,54 \end{cases} \quad f(1,3)\times f(1,4) < 0$$

$\boxed{③ \ f(x) = h(x)}$

* لحل هذه المعادلة نجعلها صفرية ونعتبر الدالة: $g(x) = f(x) - h(x)$

* $f(x) = h(x) \Leftrightarrow g(x) = 0$

ثم نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة g كما في الحالة ② .

$\boxed{\text{4/ عزل } e^{\alpha} \text{ و } \ln\alpha \text{ ، حصر } f(\alpha)}$

مثال: Bac 2012 S_2

I) $g(x) = 1 - xe^x$

* بين أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$ ثم تحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$

$\begin{cases} g(\alpha) = 0 \\ e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$

II) $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$

* بين أن $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^2 - 1}{\alpha}$ ← عزل e^{α} لما ثم نعوض α

* جد حصرا لـ $f(\alpha)$ ←

h متزايدة تماما ← $h(0,5) < f(\alpha) < h(0,6)$

h متناقصة تماما ← $h(0,6) < f(\alpha) < h(0,5)$

Sinon ← قواعد الحساب في $\mathbb{R}$.

$h(x) = \dfrac{-x^2-1}{x}$

الاشتقاقية

الاشتقاقية

١/ قابلية اشتقاق الدالة f عند عدد a

* f دالة معرفة على D_f
* a عدد ينتمي إلى D_f.

1 ← D_f يشمل a (a ليس حد لـ D_f)

2 ← $[a ; +\infty[$

3 ← $]-\infty, a]$

4 ← $]-\infty,a]\cup[a,+\infty[$

f تتغير عبارتها عند a.

* سؤال: ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند a واستنتج العدد المشتق إذ وجد.

١/ D_f يشمل a (a ليس حد لـ D_f)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

أو

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

عدد b:

* f قابلة للاشتقاق عند العدد a
* عددها المشتق هو $f'(a)$ حيث $f'(a)=b$

∞:

* f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a

أمثلة:

* $f(x)=x^2$ لما $a=2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h+2)^2-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+\cancel{4}+4h-\cancel{4}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}(h+4)=4$$

إذن الدالة مربع قابلة للاشتقاق عند 2 و $f'(2)=4$

* $f(x)=\sqrt{x}$ $a=-1$:

f غير قابلة للاشتقاق عند -1 لأن $-1\notin D_f$

* $f(x)=\sqrt{x}$ لما $a=4$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}}{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

إذن f قابلة للاشتقاق عند 4 و $f'(4)=\frac{1}{4}$

لازم a ينتمي لـ D_f وله جوارين اليمين واليسار $a+h\in D_f$

النهاية عدد حقيقي

$f(x)=\sqrt{-|x|}$

$D_f=[a;+\infty[$ /2

• f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a

دراسة قابلية اشتقاق f على يمين a:

$$\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

أو

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- عدد b: • f قابلة للاشتقاق على يمين العدد a • و $f'_d(a)=b$
- ∞: • f ليست قابلة للاشتقاق على يمين a

مثال:

$a=2 \; ; \; f(x)=\sqrt{x-2}$

• f ليست قابلة للاشتقاق عند 2 .

• قابلية اشتقاق f على يمين 2 :

$$\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

اذن f ليست قابلة للاشتقاق على يمين 2

$D_f=]-\infty,a]$ /3

• f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a.

دراسة قابلية اشتقاق f على يسار a:

$$\lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

أو

$$\lim_{x \xrightarrow{<} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- عدد b: • f قابلة للاشتقاق على يسار العدد a و $f'_g(a)=b$
- ∞: • f ليست قابلة للاشتقاق على يساره

مثال:

$a=0 \; ; \; D_f=]-\infty,0] \; ; \; f(x)=\sqrt{-x+3}$

• f ليست قابلة للاشتقاق عند 0

• قابلية اشتقاق f على 0 من اليسار:

$$\lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{\sqrt{3-h}-\sqrt{3}}{h} = \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{-h}{h(\sqrt{3-h}+\sqrt{3})} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يساره

و $f'_g(0)=\frac{-1}{2\sqrt{3}}$

14/ $]-\infty,a]\cup[a,+\infty[$ و f تتغير عبارتها عند a

• دراسة قابلية اشتقاق f على يمين a

- قابلة للاشتقاق $f'_d(a)=\alpha$
- ليست قابلة للاشتقاق على يمين a

• دراسة قابلية اشتقاق f على يسار a:

- قابلة للاشتقاق $f'_g(a)=\beta$
- ليست قابلة للاشتقاق على يسار a

• دراسة قابلية اشتقاق f عند العدد a:

*تكون f قابلة للاشتقاق عند العدد a إذا وفقط إذا كانت:

← f قابلة للاشتقاق على يمين a

← f قابلة للاشتقاق على يسار a.

← $f'_d(a)=f'_g(a)=\alpha$

* العدد المشتق لـ f عند a هو $f'(a)=\alpha$

مثال

$f(x)=|x-5|$ $D_f=\mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x)=-x+5 &]-\infty,5] \\ f(x)=x-5 & [5;+\infty[\end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق f عند العدد 5.

• دراسة قابلية اشتقاق f على يمين 5:

$$\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{+5+h-5}{h}=+1$$

f قابلة للاشتقاق على يمين 5 و $f'_d(5)=+1$

• دراسة قابلية اشتقاق f على يسار 5:

$$\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{-5-h+5}{h}=-1$$

f قابلة للاشتقاق على يسار 5 و $f'_g(5)=-1$

• دراسة قابلية اشتقاق f عند 5:

f قابلة للاشتقاق على يمين ويسار 5 لكن $f'_d(5)\neq f'_g(5)$

اذن f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد 5.

2/ الدالة المشتقة لـ f :

ليس مجموعة

1/ مجالات قابلية اشتقاق f :

• f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I :

• معناه f قابلة للاشتقاق من أجل كل عدد a من I

• كيف نجيب على السؤال؟ : f عبارة عن مجموع ، جداء ، تركيب عدة دوال مرجعية قابلة للاشتقاق على كل مجال من D_f اذن f قابلة للاشتقاق على D_f (مجال مفتوح)

• f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$:

نبين أن

• f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ كما سبق

• نبين أن f قابلة للاشتقاق على يمين a وعلى يسار b.

• f قابلة للاشتقاق على $[a,+\infty[$:

• f قابلة للاشتقاق على $]a,+\infty[$ كما سبق

• f قابلة للاشتقاق على يمين a.

• f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,a]$:

• f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,a[$ كما سبق

• f قابلة للاشتقاق على يسار a.

2/ مشتقات الدوال المألوفة:

$f(x)$	$f'(x)$	مجال الاشتقاق
a	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

3/ عمليات على الدوال المشتقة:

f	f'
$k.u$	$k.u'$
$u+v-w$	$u'+v'-w'$
$u.v$	$u'v+u.v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$

4/ مشتقة مركب دالتين:

$f(x)$	$f'(x)$
$u[v(x)]$	$v'(x) \times u'[v(x)]$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$n\,u'\,u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u^n}$	$\dfrac{-n\,u'}{u^{n+1}}$

5/ تطبيقات:

• بين أن f قابلة للاشتقاق على مجال معين واحسب $f'(x)$

$f(x)=2x+3$	$f(x)=(2x+1)^3$
$f(x)=x^3$	$f(x)=\sqrt{6x^2+3x+10}$
$f(x)=3x^3+2x^2+1$	$f(x)=\dfrac{1}{(x+3)^4}$
$f(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\cos(-4x+3)$
$f(x)=x^3(2x^2+1)$	$f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$
$f(x)=\dfrac{1}{x^3+\sqrt{x}}$	$f(x)=(x^3+x+1)\sqrt{x}$
$f(x)=\dfrac{2x^2+2}{2x+1}$	$f(x)=10(x+2)^2$

• استنتج دون حساب: النهاية التالية

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=f'(2)$$

حيث $f(x)=\sqrt{x+2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$A=f'(2)=\frac{1}{4}$$

6/ المشتقات المتعاقبة:

• f دالة قابلة للاشتقاق n مرة على مجال I

• $f^{(n)}$ تسمى المشتقة ذات الرتبة n للدالة f.

مثال

① $f(x)=(3x+4)e^x$ ، احسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ ثم بين أن

$f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^x \Leftarrow$ البرهان بالتراجع

② $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، احسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ ثم بين أن

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$$

> $n!$: n عاملي:
>
> $0!=1$ / $1!=1$ $\quad n\in\mathbb{N}$
>
> $n!=1\times 2\times 3\times\dots\times(n-1)$
>
> $n!=(n-1)!\times n$

3/ التفسير الهندسي للعدد المشتق:

1/ D_f يشمل a (a ليس حد الـ D_f)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$$

*1 $f'(a)=b$: (C_f) يقبل عند النقطة $A(a,f(a))$ مماسا مائلا معادلته

$$\boxed{(\Delta): y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

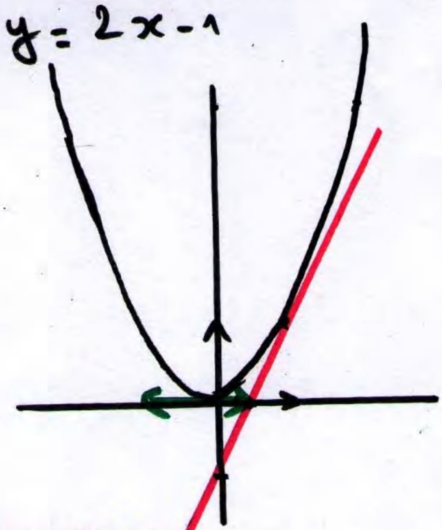
مثال: $f(x)=x^2$ ، $a=1$

f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1)=2$

اذن (C_f) يقبل مماسا (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1 معادلته

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=2x-1$



$(\Delta): y=2x-1$

*2 $f'(a)=0$: (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا أفقيا معادلته $\boxed{y=f(a)}$

مثال: $f(x)=x^2$ ، $a=0$

*3 f غير قابلة للاشتقاق (نجد ∞)

(C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا عموديا معادلته $\boxed{x=a}$

طبيعة الأسئلة:

① عين معادلة المماس لـ (C_f)

← عند النقطة ذات الفاصلة a:

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

← عند النقطة ذات الترتيبة b:

- نحل المعادلة $f(x)=b$
- نعين الفواصل a الممكنة (عدد الحلول يمثل عدد المماسات الممكنة).
- بعد تعيين a نكتب $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

مثال: $f(x)=x^2$

عين مماسات (C_f) عند النقط ذات الترتيبة 4.

$f(x)=4$ معناه $x=2$ ، $x=-2$

$a=2$	$a=-2$
$f(2)=4$ / $f'(2)=4$	$f(-2)=4$ / $f'(-2)=-4$
$y=4(x-2)+4$	$y=-4(x+2)+4$
$y=4x-4$	$y=-4x-4$

← الذي معامل توجيهه α :

• نحل المعادلة $f'(x)=\alpha$

• نعين الفواصل a الممكنة (عدد الحلول يمثل عدد المماسات الممكنة

• بعد تعيين a نكتب

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

مثال: $f(x)=x^2$

عين مماسات (C_f) التي معامل توجيهها 8.

$f'(x)=2x$

$f'(x)=2x=8$ معناه $x=4$

أي عند النقطة ذات الفاصلة 4.

$y=f'(4)(x-4)+f(4)$

$y=8(x-4)+16$

$y=8x-16$

← الذي يوازي المستقيم $y=\alpha x+\beta$

نحل المعادلة $f'(x)=\alpha$ لتعيين الفواصل الممكنة ثم نكمل الحل

← الذي يعامد المستقيم $y=\alpha x+\beta$

نحل المعادلة $f'(x)=-\frac{1}{\alpha}$ لتعيين الفواصل الممكنة ثم نكمل الحل

← الذي يشمل النقطة $A(\alpha,\beta)$

نعين الفواصل الممكنة كما يلي

$(\Delta): y=f'(a)(x-a)+f(a)$

• نعوض $f(a)$ و $f'(a)$ بدلالة a

• نعوض x و y بالاحداثيات α ، β

• نتحصل على معادلة بدلالة a ، نحلها لايجاد a.

مثال: $f(x)=x^2$

عين مماسات (C_f) التي تشمل النقطة $A(0,-1)$

$(\Delta): y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$$\begin{cases} f'(a)=2a \\ f(a)=a^2 \\ x=0 \ / \ y=-1 \end{cases}$$

$-1=2a(0-a)+a^2$

$-1=-a^2$

$a=+1$	$a=-1$
$y=2x-1$	$y=-2x-1$

② عين النقطة A بحيث عندها فان (C_f) و (C_g) يقبلان نفس المماس ثم عين معادلته

نعين a حل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases} \Rightarrow A(a,f(a))$$ النقطة

ثم نعوض في احدى المعادلتين $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

مثال:

عين النقطة A التي تقبل فيها منحني الدالة مربع ومنحني الدالة مكعب مماسا مشتركا ثم عين معادلة هذا المماس:

$$\begin{cases} a^3 = a^2 \\ 3a^2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a^2-1)=0 \\ a(3a-2)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \quad a=-1 \quad a=1 \\ a=0 \quad a=\frac{2}{3} \end{cases}$$

اذن $a=0$ $\quad f(a)=0$

النقطة A هي المبدأ $O(0,0)$

$$y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$\boxed{(\Delta):\ y=0}$$

2/ a محد لـ D_f (يمين a أو يسار a)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

أو

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

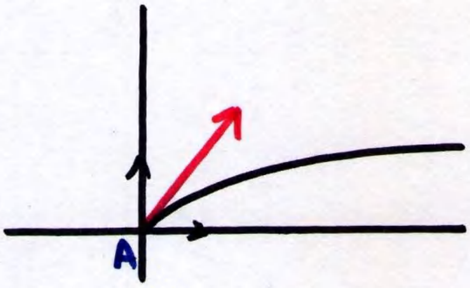
$\Downarrow$

نصف مماس بدل مماس

1. $f'_d(a)=b$:

$$(\Delta): \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

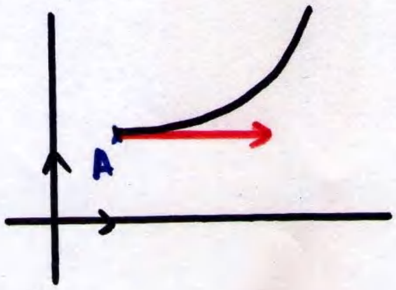
نصف مماس مائل لـ (C_f) على يمين النقطة ذات الفاصلة a



2. $f'_d(a)=0$

نصف مماس من اليمين مواز لمحور الفواصل

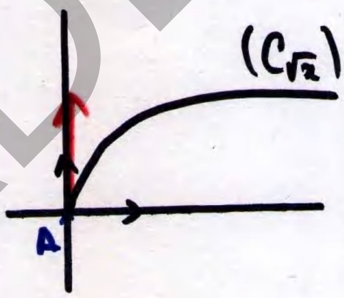
$$(\Delta): \begin{cases} y = f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$



3. نجد $+\infty$ أو $-\infty$

$+\infty$

نصف مماس مواز لمحور التراتيب موجه نحو الأعلى معادلته $x=a$



$-\infty$

نصف مماس مواز لمحور التراتيب موجه نحو الأسفل معادلته $x=a$

N.B*: في هذه الحالة النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة توقف.

3/ $]-\infty,a] \cup [a,+\infty[$:
f تتغير عبارتها عند a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$$ و

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$$

⇐ عددان l و l' حيث $l=l'$

نرجع للحالة الأولى

⇓

(C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a

مماسا

مائلا — أفقيا — عموديا.

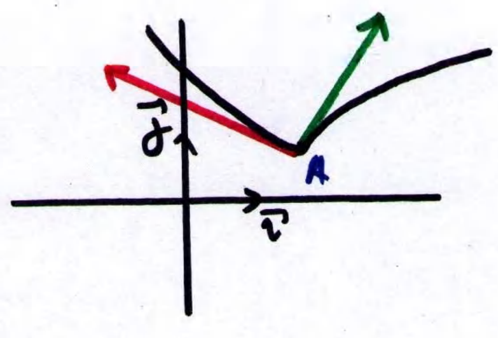
⇐ نتيجتين مختلفتين

① l و l' ($l \neq l'$)

(C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة a معادلتهما:

$$(\Delta_1)\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

$$(\Delta_2):\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

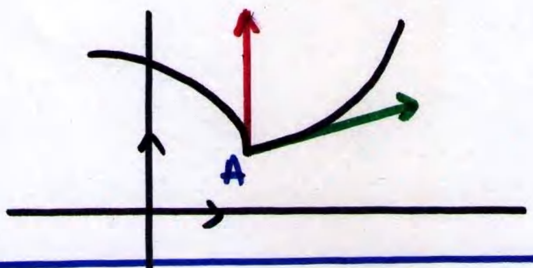


② l و ∞:

(C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة a معادلتهما مثلا:

$$(\Delta)\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$ من اليمين

$$(\Delta_2)\begin{cases} x = a \\ \text{نحو الأعلى } +\infty \text{ / نحو الأسفل } -\infty \end{cases}$$



N.B: في الحالة ① و ②، النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة زاوية.

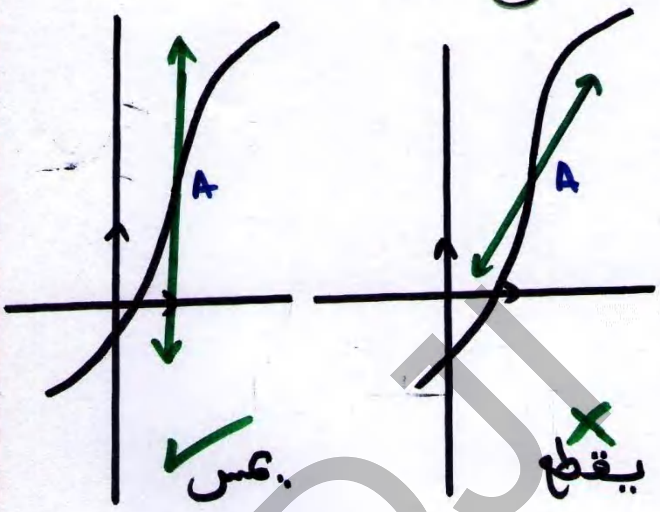
③ ∞ و ∞ من نفس الاشارة:

(C_f) يقبل نصف مماس معادلته $x=a$ موجه نحو الأعلى $(+\infty,+\infty)$ أو نحو الأسفل $(-\infty,-\infty)$

N.B: النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة رجوع

④ نجد ∞+ و ∞- :

(Cf) يقبل مماس معادلته x=a



N.B : النقطة A في هذه الحالة تسمى نقطة انعطاف لـ (Cf) يغير انحناءه

4) الوضع النسبي بين (Cf) والمماس (Δ):

طريقة ①:

$(\Delta): y = ax+b$ مماس لـ (Cf) عند النقطة ذات الفاصلة α.

. لمعرفة الوضع النسبي بين (Cf) و(Δ)

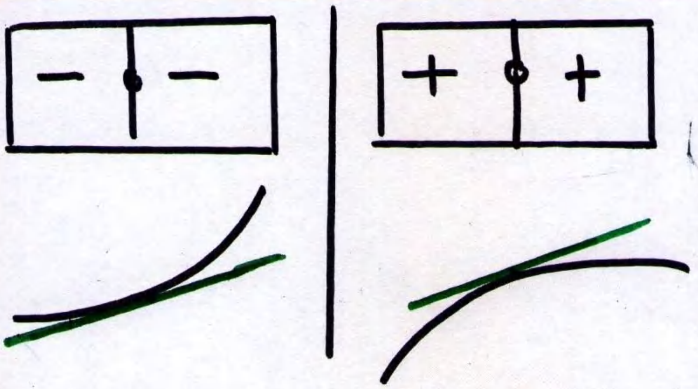
ندرس اشارة الفرق $A = f(x) - (ax+b)$

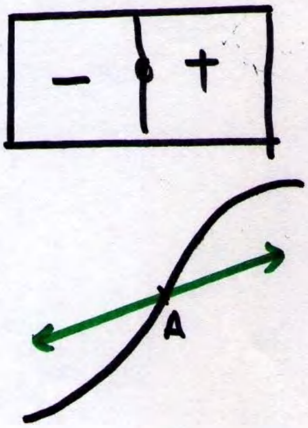
$A>0$: (Cf) فوق (Δ)

$A<0$: (Cf) تحت (Δ)

$A=0$: ← الفرق لم يغير اشارته
(Δ) يمس (Cf)

← الفرق يغير اشارته
(Δ) يخترق (Cf)
النقطة $A(a, f(a))$ نقطة انعطاف.



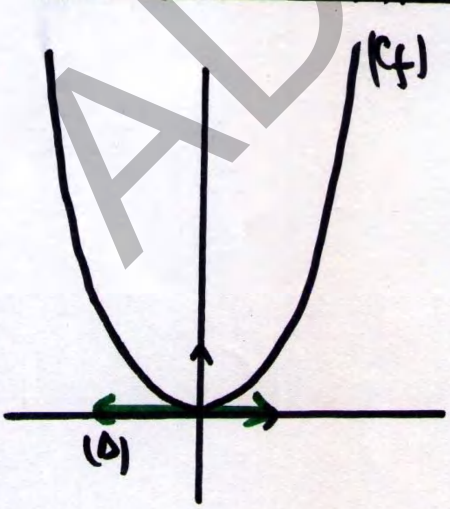


مثال:

$f(x) = x^2$, عند $a=0$ $(\Delta): y=0$

ندرس اشارة الفرق $A = f(x) - y = x^2$

x	-∞	0	+∞
A	+	0	+
الوضع النسبي	(Cf) فوق (Δ)	(Δ) يمس (Cf)	(Cf) فوق (Δ)



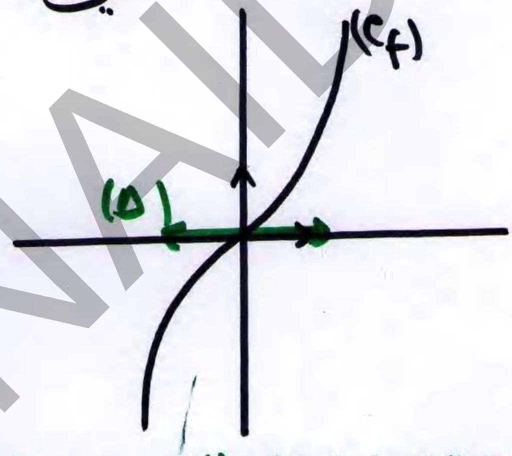
مثال②:

$f(x)=x^3$ ، $a=0$ $\quad (\Delta): y=0$

ندرس اشارة الفرق $A=f(x)-y=x^3$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
A	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) أسفل (Δ)	(Δ) يخترق (C_f)	(C_f) فوق (Δ)

$O(0,0)$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة مكعب



طريقة② باستعمال دالة جديدة:

نريد دراسة الوضع النسبي بين (C_f) والمماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a (من أجل أي قيمة له)

Bac 2016 T_1

• نضع الدالة h حيث:

$$h(x)=f(x)-\left[f'(a)(x-a)+f(a)\right]$$

$$h'(x)=f'(x)-f'(a)$$

• في بداية التمرين نجد دالة مساعدة g

$$g(x)=f'(x)$$

بعد دراسة تغيرات g نشئ جدول تغيراتها:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$

• **استنتاج تغيرات h:**

$h'(x)=f'(x)-f'(a)$

$h'(x)=g(x)-g(a)$

← $h'(x)=0$: $g(x)=g(a) \Rightarrow x=a$

← $h'(x)\geq 0$ ؟!

لما $x\geq a$ و بما أن g متزايدة تماما فإن $g(x)\geq g(a) \Rightarrow g(x)-g(a)\geq 0$

$h'(x)\geq 0$.

← $h'(x)\leq 0$:

بنفس الطريقة نجد $h'(x)\leq 0$ لما $x\leq a$.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$h(a)=0$	$\nearrow$
اشارة $h(x)$	$+$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(Δ) تمس (C_f)	(C_f) فوق (Δ)

5/ تطبيقات الاشتقاقية:

1/ اتجاه تغير دالة

* نعين الدالة المشتقة $f'(x)$
ثم ندرس اشارتها

- قواعد الحساب في $\mathbb{R}$
- بالاستعانة بدالة أخرى $g(x)$ نعلم اشارتها في بداية المسألة.

$f'(x) \geq 0$: f متزايدة تماما

$f'(x) \leq 0$: f متناقصة تماما.

* نشكل جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2/ القيمة الحدية الصغرى والعظمى

$f'(x)$ تنعدم من أجل قيمة محددة ثم تغير اشارتها

$+$	0	$-$

عظمى

$-$	0	$+$

صغرى

3/ نقطة الانعطاف

* ط①: $f'(x)$ تنعدم ولا تغير اشارتها
* ط②: $f''(x)$ تنعدم مغيرة اشارتها
* ط③: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ والعكس
* ط④: عند دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) ومماسه (Δ) نجد أن (Δ) يخترق (C_f)

N.B①

. ذروة $\Rightarrow$ مماس أفقي

. مماس أفقي $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{ذروة} \\ \text{نقطة انعطاف} \end{cases}$

N.B②:

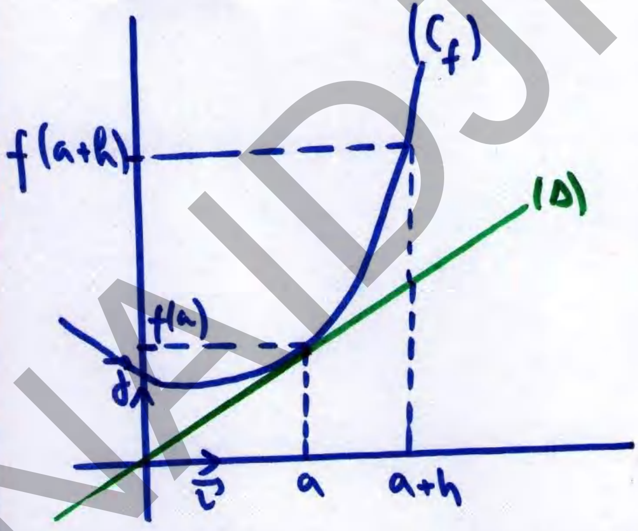
$A(\alpha,\beta)$ ذروة لـ (C_f) معناه
$$\begin{cases} f(\alpha)=\beta \\ f'(\alpha)=0 \end{cases}$$

سؤال:
$f(x)=ax+b+\frac{1}{3-x}$ ، عين a و b حتى تكون النقطة $A(2;1)$ نهاية حدية للمنحني (C_f)

4/ التقريب التآلفي لدالة

المبدأ:

- $f(x)$ دالة لها عبارة معقدة
- نريد حساب صور أعداد بشكل سهل
- نستبدل عبارة $f(x)$ بدالة تآلفية بسيطة كمايلي:



(Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a

$$(\Delta): y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

لما $x = a+h$

$$\begin{cases} f(x) = f(a+h) \\ y = f'(a)\times h + f(a) \\ f(x) \approx y \quad h \to 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(a+h) \approx h \cdot f'(a) + f(a)}$$

مثال: احسب $(2,0001)^2$

نعتبر $f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$

نكتب $f(2+h) \approx f'(2)h + f(2)$

$$f(2+h) \approx 4h + 4$$

$$\boxed{(2+h)^2 \approx 4h+4}$$

$$(2,0001)^2 \approx 4,0004$$

5/ انشاء دالة عبارتها مجهولة باستعمال طريقة Euler

المبدأ:

يمكن انشاء منحنى تقريبي لـ (C_f) لدالة لا نعلم سوى دالتها المشتقة ونقطة منها كمايلي:

	M_i	x_i	y_i
معطاة	M_0	x_0	$f(x_0)$
	M_1	x_0+h	$hf'(x_0)+f(x_0)$
	⋮	⋮	⋮

- ننجز جدولين $h>0$ و $h<0$
  نتحصل على عدد كبير من النقط القريبة جدا من منحنى (C_f) الحقيقي
- نربط بين النقط لنحصل على منحنى تقريبي لـ (C_f) .

الدوال الأسية

الدوال الأسية

أ/ عموميات

1/ تعريف الدالة الأسية النيبرية:

* توجد دالة وحيدة f معرفة على $\mathbb{R}$ حيث:

← f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f' = f$

← $f(0) = 1$

* هذه الدالة تسمى الدالة الأسية النيبرية (ذات الأساس e) اكتشفت كعكسية الـ Ln

$$f : \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_*^+ =]0, +\infty[$$
$$x \longmapsto f(x) = \exp(x) = e^x$$

* الدالة الأسية النيبرية هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' = y$ ، حيث $y(0) = 1$

$n \in \mathbb{Z}, (a,b) \in \mathbb{R}^2$

2/ خواص:

$e^a \times e^b = e^{a+b}$	$e^{u(x)} > 0$ tjr
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$e^{u(x)} < 0$ jamais
$(e^a)^n = e^{n.a}$	$e^{u(x)} = 0$ jamais
$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	$e^0 = 1$
$e^{u(x)} \times e^{-u(x)} = 1$	$e^1 = e = 2,718...$
$\sqrt{e^a} = e^{a/2}$	$e^{\ln a} = a \; ; a > 0$
$\sqrt[n]{e^a} = e^{a/n}$	$\ln e^a = a$

تطبيق: اكتب على أبسط شكل ممكن مايلي:

$$A = \frac{e^{-5} \times e^8}{\sqrt{e^3} \times e^2} + \frac{e^{2^3} \times e^3}{e^2 \times e^{-4}}$$

$$B = \frac{e^{-x} \times e^{3x} \times e^{x^2+2}}{e^{2x} \times (e^{2x})^{x+1}}$$

3/ معادلات تتضمن الدالة الأسية:

* $u(x) = v(x) \Leftrightarrow e^{u(x)} = e^{v(x)}$

* $e^{u(x)} = b$:
  - $b < 0$: $\emptyset$
  - $b > 0$: $u(x) = \ln b$

* تبديل المتغير إذا كانت كل المجاهيل مكتوبة على الشكل $e^{\cdots}$

$$y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 = 0$$
$$\begin{cases} y = e^x > 0 \\ x = \ln y \end{cases}$$

تطبيق: حل المعادلات:

$e^{-x+2} = 1$	$e^{2x+1} = (e^x)^3$
$e^{2x} \cdot e^{x-3} = e^{x+6}$	$2e^{2x} - 3e^{3x} + e^x = 0$
$e^{-x^2} = \frac{1}{e}$	$2e^x + \sqrt{e^x} - 3 = 0$
$e^{x+3} - e^{\frac{4}{x}} = 0$	

4/ دراسة اشارة عبارة وحل متراجحات:

1/ عبارة من الدرجة الأولى:

* قاعدة اشارة $\alpha e^{ax+b} + \beta$

$\alpha\beta > 0$:

x	$-\infty \qquad +\infty$
$\alpha e^{ax+b} + \beta$	نفس اشارة α

$\alpha\beta < 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\alpha e^{ax+b} + \beta$	عكس $\alpha \cdot a$	0	نفس $\alpha \cdot a$

N.B : $e^{u(x)}$ دوما موجبة.

x_0 هي القيمة التي تعدم العبارة $\alpha e^{ax_0+b} + \beta = 0$

* حل متراجحات :

* نضع $\alpha e^{ax+b}+\beta>0$ ثم نحل المتراجحة حتى نجد المجال الذي تكون فيه العبارة موجبة
* تكون العبارة سالبة في المجال المتبقي من $\mathbb{R}$.

* $e^a>e^b \iff a>b$
* $e^a>b \iff \begin{cases} a>\ln b & : b>0 \\ \mathbb{R} & : b\leq 0 \end{cases}$
* $e^a<b \iff \begin{cases} a<\ln b & : b>0 \\ \emptyset & : b\leq 0 \end{cases}$

2/ عبارة من الدرجة الثانية أو أكثر:

$$ae^{2x}+be^x+c$$

نستعمل تبديل المتغير $y=e^x>0$

$$ay^2+by+c$$

* $\Delta<0$: اشارة a .
* $\Delta=0$: اشارة a $\quad a(e^x-y_1)^2$
* $\Delta>0$: نحلل العبارة $a(e^x-y_1)(e^x-y_2)$ ثم نستخدم اشارة الجداء

3/ اشارة عبارة $A(x)$ تتضمن الدالة الأسية:

* نحل المعادلة $A(x)=0$

إذا لم تقبل المعادلة أي حلول فإن:

$A(x)>0$: إذا كان $A(0)>0$ مثلا

$A(x)<0$: إذا كان $A(0)<0$ مثلا .

4/ اشارة e^x-1:

$x<0$: $0<e^x<1$

$x>0$: $e^x>1$

$x=0$: $e^0=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	

5/ انظر درس دراسة اشارة عبارة+حل متراجحات

6/ تطبيق:

ادرس اشارة العبارات التالية:

$7e^{3x}-e^x-6e^{2x}$	e^x-1
$2e^{2x}+e^x-3$	$2e^{3x+4}+3$
$6e^{2x}-18e^x+12$	$-3e^{-5x}-4$
$e^{2x}-e^x+1$	$-2e^{1-x}+1$

حل المتراجحات:

$2e^{3x+4}+3\leq 0$	$7e^{3x}-e^x-6e^{2x}\geq 0$
$e^{2x}-e^x+1>0$	$-2e^{1-x}+1\leq 0$

ب/ الدالة الأسية النيبيرية $f(x)=e^x$

1/ تعريف:

مجموعة التعريف: $D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

عبارة $f(x)$

$$f:]-\infty,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$$
$$x \longmapsto y=f(x)=\exp x=e^x$$

2/ النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} e^x=0^+$	محور الفواصل م م أفقي لـ (C_f) عند $-\infty$ ، (C_f) فوق (xx')
$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$	احتمال وجود م م م $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ (C_f) يقبل فرع لا نهائي عند $+\infty$ باتجاه (yy')

3/ الاستمرارية:

الدالة e^x مستمرة على $\mathbb{R}$

4/ الاشتقاقية:

← f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي f' حيث: $f'(x)=f(x)=e^x$

المماسات:

• مثلا عند النقطة ذات الفاصلة 0

(C_f) يقبل مماسا (T): $(T): y=x+1$

(C_f) يقع دوما فوق هذا المماس (T).

العدد المشتق عنده

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=f'(0)=1}$$

التقريب التآلفي عنده:

$$\boxed{e^h\approx 1+h \; ; \; h\to 0}$$

5/ اشارة المشتقة:

$f'(x)=e^x>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

الدالة e^x متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

6/ جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		
$f(x)$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

7/ نقط التقاطع مع المحاور:

مع (xx'): $f(x)=0 \Leftrightarrow e^x=0 \Leftrightarrow S=\emptyset$

لا يوجد نقط تقاطع

مع (yy'): $f(0)=e^0=1$

$(C_f)\cap(yy')=\{A(0,1)\}$

8/ اشارة الدالة e^x

$e^x>0$ برهان: $e^x=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2>0$

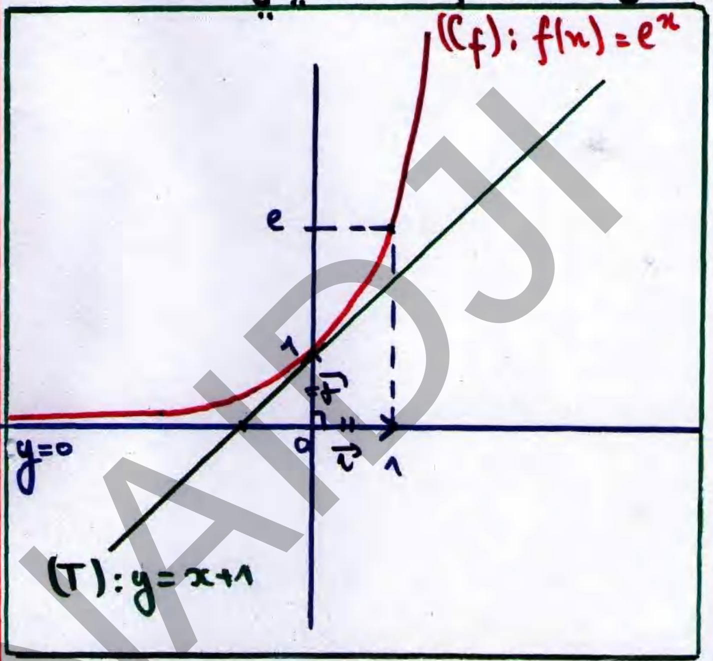
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

كتفسير هندسي: (C_f) يقع دوما فوق (xx')

9/ التمثيل البياني لمنحنى الدالة e^x:

* انطلاقا من جدول التغيرات أو باستعمال طريقة Euler $\begin{cases} f'(x) = e^x \\ f(0) = 1 \end{cases}$

يمكن انشاء (C_f) كمايلي:



10/ الدالة $f = \exp \circ u$

* مجموعة التعريف: $D_f = D_u$
* العبارة: $f(x) = e^{u(x)}$
* النهايات: (Voir Apres)
* الاستمرارية: إذا كانت u مستمرة على مجال I فإن f مستمرة على نفس المجال I
* الاشتقاقية: إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f قابلة للاشتقاق على I ودالتها المشتقة

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$$

اشارة $f'(x)$ من اشارة $u'(x)$

* تغيرات f: لها نفس تغيرات u.

تطبيق: احسب مشتقات الدوال التالية

$f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

$g(x) = (2x+3)e^{-2x+1}$

$h(x) = \dfrac{e^{2x} - 3}{e^{-x} + 3}$

$t(x) = -3x + 4 - 3e^{-2x-2}$

$k(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$

$z(x) = 2x + 1 - 3\dfrac{e^x}{e^x - 1}$

III/ الدالة الأسية ذات الأساس a

* مجموعة التعريف: $\mathbb{R}$
* العبارة: $(a > 0)$

$$\boxed{f(x) = a^x \quad \begin{cases} f(x) = 1 & ; a = 1 \\ f(x) = e^{x \ln a} & ; a > 0 ; a \neq 1 \end{cases}}$$

* الاشتقاقية:

$$\boxed{(a^x)' = \ln a \times e^{x \ln a}}$$

* $0 < a < 1$

$f'(x) < 0$ اذن f متناقصة تماما.

$a^x < a^y \iff x > y$

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

النهايات حسب اشارة $\ln a$

* $a > 1$

$f'(x) > 0$ اذن f متزايدة تماما

$a^x > a^y \iff x > y$

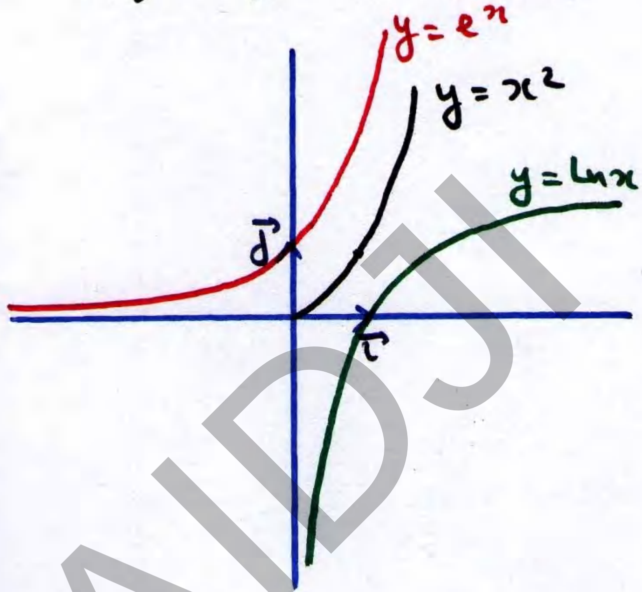
$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

VI/ التزايد المقارن (الدالة الأسية)

1/ مدخل:

عند $+\infty$: $e^x > x^n > \ln x$



$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

2/ ازالة ح.ع.ت : نهايات شهيرة:

حساب النهاية عند	النهاية الشهيرة
$+\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ المقلوب $\longrightarrow 0^+$
$-\infty$	$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0^-$ $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x \begin{cases} \to 0^- & n=2k+1 \\ \to 0^+ & n=2k \end{cases}$ المقلوب $\longrightarrow \infty$
عند عدد	$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ المقلوب $\longrightarrow 1$

في هذا الجدول يشترط التماثل (voir Apres)

3/ طرق استعمال هذه النهايات الشهيرة:

1/ التحليل باخراج x أو e^x كعامل مشترك:

$\leftarrow$ e^x كعامل مشترك

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x} \times x}{\cancel{e^x} \times \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}$

$= +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} (2x-1)e^x - 3e^{2x}$

$= \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(\frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 3\right) = -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{e^x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(e^x - 3 + \frac{4}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}$

$= +\infty$

$\leftarrow$ x كعامل مشترك

- $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} (e^{x+1} - 2x - 3) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{2x+3}{x+1}\right)$

$= +\infty$

2/ النشر:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\cancel{xe^x}^{\,0} - \cancel{e^x}^{\,0}$

$= 0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x-1)e^x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\cancel{e^x}^{\,0} + 2x\cancel{e^x}^{\,0} - \cancel{e^x}^{\,0} = 0$

3/ الانتقال بين $e^{u(x)}$ و $e^{-u(x)}$:

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overset{+\infty}{x}}{1+\underset{0^+}{e^{-x}}} = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\underbrace{\underset{0^+}{(-x)^2e^{-x}} - \underset{0^-}{(-x)e^{-x}} + \underset{0^+}{e^{-x}}}_{0^+}}$

$= +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-3e^x+4}{e^x+2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overset{+\infty}{e^x} - 3 + 4\overset{0}{e^{-x}}}{\underset{1}{1+2e^{-x}}}$

$= +\infty$

4/ تبديل المتغير:

وذلك إذا كانت العبارة فيها e^x فقط

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-3e^x+4}{e^x+2}$

$y=e^x$ لما $x\to-\infty$ فإن $y\to0^+$

$= \lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{y^2-3y+4}{y+2}$

$= 2$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-3e^x+4}{e^x+2}$

$= \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^2-3y+4}{y+2}$

$= \lim\limits_{y\to+\infty}(y)$

$= +\infty$

5/ إنشاء التماثل:

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\underset{2}{\dfrac{2x+1}{x}}\times\underset{+\infty}{\dfrac{e^{2x+1}}{2x+1}}$

$= +\infty$

6/ باستعمال خواص اللوغاريتم

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^{2x}-e^x+1)-2x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^{2x}(1-e^{-x}+e^{-2x})\right)-2x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})-2x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1-\underset{0}{e^{-x}}+\underset{0}{e^{-2x}}) = 0$

← هامة جدا: (Voir Apres cours Ln x).

الدوال اللوغاريتمية

الــدوال اللــوغاريتمية

I/ عموميات

1/ تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

* هي الدالة الأصلية لـ $f(x)=\frac{1}{x}$ والتي تنعدم من أجل $x=1$ ، $\ln(1)=0$
* هي الدالة العكسية للدالة الأسية النيبيرية

$$\boxed{y=\ln x \Leftrightarrow x=e^{y}\ ,\ x>0}$$

* الدالة اللوغاريتمية النيبيرية معرفة على $\boxed{]0,+\infty[}$ وتحقق:

$$f:]0,+\infty[\longrightarrow]-\infty,+\infty[$$
$$x \longmapsto f(x)=\ln x$$

2/ خواص:

* اشارة a: $]0,+\infty[$

$\ln a$ معرف من أجل
$\left.\begin{array}{l} \text{tjr } a>0 \\ \text{jamais } a=0 \\ \text{jamais } a<0 \end{array}\right\}$

* اشارة $\ln a$: $\mathbb{R}$

$\ln a<0 \Leftrightarrow 0<a<1$

$\ln 1=0 \Leftrightarrow a=1$

$\ln a>0 \Leftrightarrow a>1$

a	0		1		$+\infty$
$\ln a$	||	$-$	0	$+$	

* صور بعض القيم بالدالة ln:

$\ln e^{a}=a$	$\ln 1=0$
$e^{\ln a}=a\ ,\ a>0$	$\ln e=1$

* خواص الحساب:

1) a و b أعداد حقيقية موجبة تماما.

$\ln(a^{n})=n\ln a$	$\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$
$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b=-\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
$\ln\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\ln a$	$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$

2) اذا كان a و b حقيقيان أو عبارة بدلالة x:

* $\ln(u\times v)=\ln|u|+\ln|v|$
* $\ln\left(\frac{u}{v}\right)=\ln|u|-\ln|v|$
* $\ln u^{n} \begin{cases} n\ln u & n \text{ فردي} \\ n\ln|u| & n \text{ زوجي} \end{cases}$

3) أخطاء شائعة:

* $\ln(a+b)\neq\ln a+\ln b$
* $\ln a\times\ln b\neq\ln a+\ln b$
* $\frac{\ln a}{\ln b}\neq\ln a-\ln b$
* $(\ln a)^{n}\neq n\ln a$

أمثلة

3/ معادلات تتضمن الدالة اللوغاريتمية:

← نعين D (داخل ln موجب تماما)

← نبسط المعادلة باستعمال خواص ln

← نحصل على احدى الحالات .

①* $\ln u(x)=\ln v(x) \Leftrightarrow u(x)=v(x)$

②* $\ln u(x)=b \Leftrightarrow u(x)=e^{b}$

③* تبديل المتغير: إذا كانت كل المجاهيل مكتوبة على الشكل ln...

$$a(\ln x)^2+b\ln x+c=0 \Leftrightarrow ay^2+by+c=0$$

$$\begin{cases} y=\ln x \\ x=e^{y}\ ;\ x>0 \end{cases}$$

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ مايلي:

* $\ln(x^2-1)=\ln x$
* $\ln(2x-1)=2$
* $\ln(x-1)(x+2)=2\ln 2$
* $\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln 2$
* $2[\ln x]^2+(\ln x)-6=0$
* $\ln(x-1)+\ln(x+2)=\ln(2x-3)+\ln 4$
* $\ln|x|+\ln|4-x|=\ln|2x-1|+\ln 3$
* $\begin{cases} \ln 2x+\ln 3y=\ln 6 \\ 3x-y=2 \end{cases}$
* $\begin{cases} \ln x-\ln y=-\ln 3 \\ x^2+2y=16 \end{cases}$

4/ دراسة اشارة عبارة وحل متراجحات:

1/ عبارة من الدرجة الأولى:

* قاعدة اشارة $\alpha\ln(ax+b)+\beta$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\alpha\ln(ax+b)+\beta$	عكس αa	0	نفس αa

x_0 هي القيمة التي تعدم العبارة

$$\alpha\ln(ax+b)+\beta=0$$

* حل متراجحات : بعد تعيين D

* نضع $\alpha\ln(ax+b)+\beta>0$ ثم نحل المتراجحة حتى نجد المجال الذي تكون فيه العبارة موجبة.

* تكون العبارة سالبة في المجال المتبقي من D.

* $\ln u(x)>\ln v(x) \Rightarrow u(x)>v(x)$
* $\ln u(x)>a \Rightarrow u(x)>e^{a}$
* $\ln u(x)<a \Rightarrow u(x)<e^{a}$

2/ عبارة من الدرجة 2 أو أكثر:

$$a(\ln x)^2+b\ln x+c$$

بعد تعيين D: نستعمل تبديل المتغير $y=\ln x$

$$ay^2+by+c$$

$\Delta<0$: اشارة a

$\Delta=0$: اشارة a ، $a(\ln x-y_1)^2$

$\Delta>0$: نحلل العبارة $a(\ln x-y_1)(\ln x-y_2)$ وندرس اشارة الجداء .

3/ اشارة عبارة تتضمن الدالة اللوغاريتمية:

• نحل المعادلة $A(x)=0$

إذا لم تقبل المعادلة أي حلول في مجال ما فإن:

$A(x)>0$: إذا كان $A(0)>0$ مثلا

$A(x)<0$: إذا كان $A(0)<0$ مثلا.

4/ اشارة $\ln x$

$x \in]0,+\infty[$

$0<x<1$: $\ln x<0$

$x=1$: $\ln x=0$

$x>1$: $\ln x>0$

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$\ln x$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

5/ انظر درس اشارة عبارة + حل متراجحات:

6/ تطبيق: بعد تعيين D

• حل المتراجحات:

• $\ln(2x-1)>2$

• $\ln(x+2)\leq 5$

• $\ln(x^2-1)<\ln(x)$

• $\ln(x-1)(x+2)\leq 2\ln 2$

• $\ln(x-1)+\ln(x+2)\leq 2\ln 2$

• $\ln(35-8x)>3\ln 2+\ln x^2$

• ادرس اشارة العبارة:

$(1+\ln x)(1-\ln x)(2-\ln x)(e^x-3)(e^{2x}-4)$

4/ الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1/ التعريف:

مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R}_*^+ =]0,+\infty[$

عبارة $f(x)$:

$$f :]0,+\infty[\longrightarrow]-\infty,+\infty[$$
$$x \longmapsto y = f(x) = \ln x$$

2/ النهايات:

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$	• محور التراتيب م م عمودي لـ (C_f) عند $-\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$	• احتمال وجود م م عند $+\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ (C_f) يقبل فرع لانهائي عند $+\infty$ باتجاه (xx')

3/ الاستمرارية:

الدالة $\ln x$ مستمرة على $]0,+\infty[$

4/ الاشتقاقية:

f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي f' حيث:

$$\boxed{(\ln x)' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

المماسات:

• مثلا عند النقطة ذات الفاصلة 1، (C_f) يقبل مماسا (T): $(T): y = x - 1$

(C_f) يقع دوما تحت (T)

العدد المشتق عند 1:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}$$

التقريب التآلفي عند 1:

$$\boxed{\ln(1+h) = h \quad ; h \to 0}$$

5/ اشارة المشتقة:

$f'(x) = \frac{1}{x} \; ; x>0$ ، $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ : f'(x) > 0$

الدالة $\ln$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

6/ جدول التغيرات:

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$				$+$			
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

7/ نقط التقاطع مع المحاور:

مع (xx'): $f(x)=0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 \Rightarrow x = 1$

$$(C_f) \cap (xx') = \{A(1;0)\}$$

مع (yy'): $\emptyset$ لا يمكن أصلا حساب $f(0)$ لأن 0 لا ينتمي إلى مجموعة تعريف الدالة $\ln$.

8/ اشارة الدالة $\ln x$:

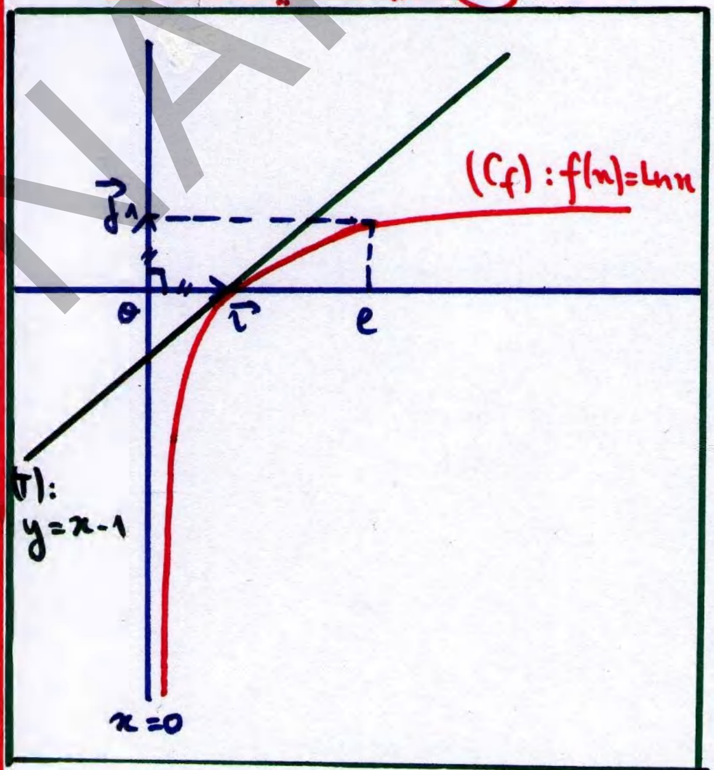
$0<x<1$: $\ln x<0$

$x>1$: $\ln x>0$

$x=1$: $\ln x=0$

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
اشارة $\ln x$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
وضع $(C_{\ln})$ و (xx')	(C_f) تحت (xx') $\quad$ (C_f) يقطع (xx') في $A(1,0)$ $\quad$ (C_f) فوق (xx')

9/ التمثيل البياني لمنحنى الدالة $\ln x$:



10/ الدالة $f=\ln o u$

* مجموعة التعريف:

الدالة	مجموعة التعريف
$\ln u(x)$	$u(x)>0$
$\ln \lvert u(x)\rvert$	$u(x)\neq 0$
$\ln (u(x))^n$ زوجي	$u(x)\neq 0$
$\ln (u(x))^n$ فردي	$u(x)>0$
$[\ln u(x)]^n$	$u(x)>0$
$\dfrac{1}{\ln(u(x))}$	$u(x)>0$ $u(x)\neq 1$
$\ln\left(\dfrac{A(x)}{B(x)}\right)$	$A(x)\times B(x)>0$
$\ln\left\lvert\dfrac{A(x)}{B(x)}\right\rvert$	$\begin{cases}A(x)\neq 0\\ B(x)\neq 0\end{cases}$

* العبارة: $f(x)=\ln[u(x)]$
* النهايات: (Voir Apres)
* الاستمرارية: إذا كانت u موجبة تماما ومستمرة على مجال I فالدالة $f=\ln u$ مستمرة على نفس المجال I
* الاشتقاقية: إذا كانت u موجبة تماما وقابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f=\ln u$ قابلة للاشتقاق على نفس المجال I و:

$$\boxed{[\ln(u(x))]'=[\ln\lvert u(x)\rvert]'=\frac{u'(x)}{u(x)}}$$

* تغيرات f: اشارة $f'(x)$ من اشارة $u'(x)$ لأن $(u(x)>0)$ $f \Leftarrow$ لهما نفس تغيرات u

* إشارة $Ln\, u(x)$:

$u(x) > 0$

* $0 < u(x) < 1$: $Ln\, u(x) < 0$
* $u(x) = 1$: $Ln\, u(x) = 0$
* $u(x) > 1$: $Ln\, u(x) > 0$
* $u(x) = e$: $Ln\, u(x) = 1$

$u(x)$	0		1		e		$+\infty$
$Ln\, u(x)$		$-$	0	$+$	1		

III الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a

* مجموعة التعريف: $]0,+\infty[$
* العبارة: $a>0 ; a\neq 1$

$$\boxed{f(x) = \log_a(x) = \frac{Ln\, x}{Ln\, a}}$$

* الاشتقاقية:

$$\boxed{\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{x\, Ln\, a}}$$

$0 < a < 1$

$f'(x) < 0$: f متناقصة تماما

$\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$

$0<a<1$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

النهايات حسب إشارة $\ln a$

$a > 1$

$f'(x) > 0$ اذن f متزايدة تماما

$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$

$a>1$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

* الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس e:

$f(x) = Ln\, x$

* الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس 10:

$f(x) = \log_{10}(x) = \log x = \frac{Ln\, x}{Ln\, 10}$

$\log 10 = 1$ $\log 10^n = n$	$\log 1 = 0$	الدالة $\log$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$
$n \leq \log x \leq n+1 \Leftrightarrow 10^n \leq x \leq 10^{n+1}$		

التزايد المقارن (الدالة اللوغاريتمية)

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

إزالة ح ع ت : نهايات شهيرة :

حساب النهاية عند	النهاية الشهيرة
$+\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$ المقلوب $\leftarrow +\infty$
0^+	$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0^-$ المقلوب $\leftarrow -\infty$
عدد	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ المقلوب $\leftarrow 1$

في هذا الجدول يشترط التماثل

طرق استعمال هذه النهايات الشهيرة :

1/ التحليل بإخراج x كعامل مشترك :

← خارج اللوغاريتم

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0^+}\right)$

$= +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 3x - \ln(1-2x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{(1-2x)}_{-\infty}\left(\underbrace{\frac{x^2+3x}{-2x+1}}_{-\infty} - \underbrace{\frac{\ln(1-2x)}{1-2x}}_{0^+}\right)$

$= +\infty$

← داخل اللوغاريتم

وذلك إذا كان أس x الذي داخل $\ln$ أكبر من أس x الذي خارج اللوغاريتم

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[2 \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0} + \frac{\ln\left(1+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{0}\right)}{x}\right]$

$= 0$

2/ النشر

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x+2)\ln x = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \underbrace{x \ln x}_{0} + 2\ln x$

$= -\infty$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x^2+x)\ln x = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \underbrace{x^2 \ln x}_{0} + \underbrace{x \ln x}_{0}$

$= 0$

3/ توحيد المقامات

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1} + \ln(2x-1)$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} \frac{1 + \cancel{(2x-1)\ln(2x-1)}^{\,0}}{\cancel{(2x-1)}_{\,0^+}} = +\infty$

4/ انشاء التماثل

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\ln(x+2)}}{\cancel{x+2}}^{\,0} \times \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x}}^{\,1}$

$= 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2x^2-x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\cancel{\ln x}}{\cancel{x}}^{\,0} \times \frac{\cancel{x}}{\cancel{2x^2-x+3}}^{\,0} \right)$

$= 0$

5/ استخدام خواص اللوغاريتم

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x - \ln(x+1)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2) - \ln(x+1)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\cancel{\frac{x^2}{x+1}}^{\,+\infty} \right)$

$= +\infty$

6/ باستخدام تعريف العدد المشتق

- $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = (\ln x)'_{x=e}$

$= \left(\frac{1}{x}\right)_{x=e} = \frac{1}{e}$

7/ تبديل المتغير

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[(\ln x)^2 - \ln x + 3\right]$

$y = \ln x$: $x \to +\infty$ معناه $y \to +\infty$

$= \lim\limits_{y\to+\infty} y^2 - y + 3$

$= +\infty$

- $\lim\limits_{x\to0^+} \left[(\ln x)^2 - \ln x + 3\right]$

$= \lim\limits_{y\to-\infty} y^2 - y + 3$

$= +\infty$

8/ الانتقال بين اللوغاريتمية والأسية

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0^+$

- $\lim\limits_{x\to0^+} x \times (\ln x)^n = \lim\limits_{y\to-\infty} e^y \times y^n$

$= \lim\limits_{y\to-\infty} y^n e^y = 0$

وذلك بوضع $y = e^x$

9/ باستعمال خواص $\ln$ $\Leftarrow$ هامة جدا

. العبارة التي داخل $\ln$ فيها الدالة e^x

. تستعمل الطريقة التالية لإزالة ح ع ت وكذلك اظهار المستقيم المقارب المائل.

$\boxed{f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)}$

$= \ln\left[e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right]$

$= \ln e^{2x} + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

$\boxed{f(x) = \underbrace{2x}_{} + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)}$

- $(D): y = 2x \Leftarrow$ م م م عند $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right] = +\infty$

أسئلة نظرية حول الدوال الأسية و اللوغاريتمية

الدوال الأسية واللوغاريتمية (أسئلة نظرية) .

1/8 اثبات النهايات الشهيرة :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$$

$f(x) = e^x - x \quad ; D_f = [0,+\infty[$

$f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad \forall x \in D_f$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 ↗	

$e^x > x \Leftarrow e^x - x > 0 \Leftarrow f(x) > 0$

$e^x > x$ لكن $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

اذن $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+}$$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0^+$

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x - e^0}{x-0} = (e^x)'_{x=0}$

$= e^0 = 1$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} \quad ; D_f = [0,+\infty[$

$f'(x) = e^x - x > 0 \quad \forall x \in D_f$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 ↗	

$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \Leftarrow e^x - \frac{x^2}{2} > 0 \Leftarrow f(x) > 0$

$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$: لكن عند $+\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

اذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0^-}$$

$\lim_{x\to-\infty} x e^x = \lim_{x\to-\infty} -\left(\frac{-x}{e^{-x}}\right)$

$= \lim_{y\to+\infty} -\frac{y}{e^y} \qquad y = -x$

$= 0^-$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty}$$

A عدد حقيقي كبير جدا $(A\to+\infty)$ حيث $\ln x > A$

هل يوجد عدد حقيقي كبير جدا B يحقق $x > B$ ؟

$\ln x > A \Leftarrow x > e^A$ يمكن أخذ B

على الأقل $e^A \Leftarrow$ محققة .

$$\boxed{\lim \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{\ln x^n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{n\ln x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}$$

$$= +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{e^{-x}} \;/\; y=-x$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{(-y)^n}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} (-1)^n \frac{y^n}{e^y}$$

n فردي : 0^-

n زوجي : 0^+

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y^{\frac{1}{n}}}{y} \;/\; y = x^n$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{n} \frac{\ln y}{y} = 0^+$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} x^n \ln x = 0^-}$$

$$\lim_{x\to0^+} x^n \ln x = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^n \ln\left(\frac{1}{y}\right) \;/\; y = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^n} \times -\ln y = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\ln y}{y^n}$$

$$= 0^-$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty}$$

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = \lim_{y\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \; ; \; y = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} -\ln(y) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0^+ \;/\; y = \ln x$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0^-}$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{y\to-\infty} y\, e^y = 0^- \;/\; y = \ln x$$

$$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$$

$$= (\ln x)'_{x=1} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=1} = 1$$

$$\boxed{\lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

بوضع $h = x-1$

$$\lim_{h\to0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$$

$$\boxed{(\ln u)' = (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}}$$

$$(\ln|u|)' \begin{cases} u>0 : (\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \\[2ex] u<0 \quad (\ln -u)' = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u} \end{cases}$$

Equations fonctionnelles

• **دوال تحول مجموع لجداء:**

الدوال غير المعدومة f والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق من أجل كل عددين حقيقيين x و y

$$\boxed{f(x+y) = f(x)\times f(y)}$$

هي الدوال

$$\boxed{x \longmapsto e^{kx} \; ; \; k\in\mathbb{R}}$$

• **دوال تحول الجداء لمجموع:**

كمثال عن هذه الدوال نأخذ الدوال

$\ln x \;,\; \log x \;,\; \log_a x \; \ldots\ldots$

$$\ln(a\times b) = \ln a + \ln b$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to0^+} e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)}$$

بحيث $y = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{y\to0^+} e^{\xrightarrow[]{\frac{\ln(y+1)}{y}} 1} = e$$

2/ اثبات خواص أخرى لـ e^x و $\ln x$:

$$\boxed{e^x > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$

$$e^x = e^{\frac{x}{2}\times 2} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\exp(x) = e^x}$$

$$\exp x = \exp(1\times x) = (\exp 1)^x$$

من التعريف نرمز لـ $\exp 1 = e = 2{,}71\ldots$

اذن $\exp x = e^x$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = e^{\ln x} \Rightarrow f'(x) = (\ln x)' e^{\ln x}$$
$$= (\ln x)' \times x$$

$$(\ln x)' \times x = 1$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

3/ الدوال العكسية:

f	f^{-1}
e^x	$\ln x$
a^x	$\log_a x$
10^x	$\log x$
x^n	$\sqrt[n]{x}$

* $f\left[f^{-1}(x)\right] = x$
* $(C_{f^{-1}})$ و (C_f) متناظران بالنسبة للمنصف الأول $(\Delta): y = x$

4 - نظرة عن الدالة الجذر النوني:

* مجموعة التعريف: $[0,+\infty[$
* العبارة: $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x} \quad x \neq 0$$

* الاشتقاقية:

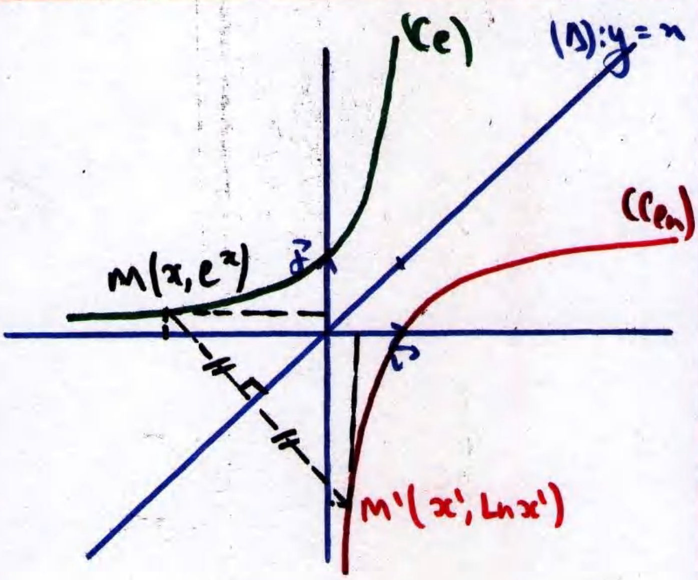
f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (غير قابلة للاشتقاق عنده 0) ودالتها المشتقة f'

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx} e^{\frac{1}{n}\ln x}$$

* $f'(x) > 0$
* الدالة الجذر النوني متزايدة تماما على $[0,+\infty[$
* اصطلاحا: $f(0)=0$

5/ اثبات بعض التناظرات:

(C_e) و $(C_{\ln})$ متناظران بالنسبة للمنصف الأول



$M'(b,a) \in (C_{\ln}) \iff M(a,b) \in (C_e)$

برهان:

$M(a,b) \in (C_e) \iff b = e^a$

$\iff \ln b = a$

$\iff M(b,a) \in (C_{\ln})$

اذن لكل نقطة $M(a,b) \in (C_e)$ نقطة أخرى $M'(b,a)$ من $(C_{\ln})$

اثبات أن M' نظيرة M بالنسبة للمنصف الأول

$M(a,b) \,/\, M'(b,a) \,/\, \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} b-a \\ a-b \end{pmatrix}$

$(\Delta): y = x \,/\, \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = (b-a)+(a-b) = 0$

اذن (Δ) عمودي على (MM')

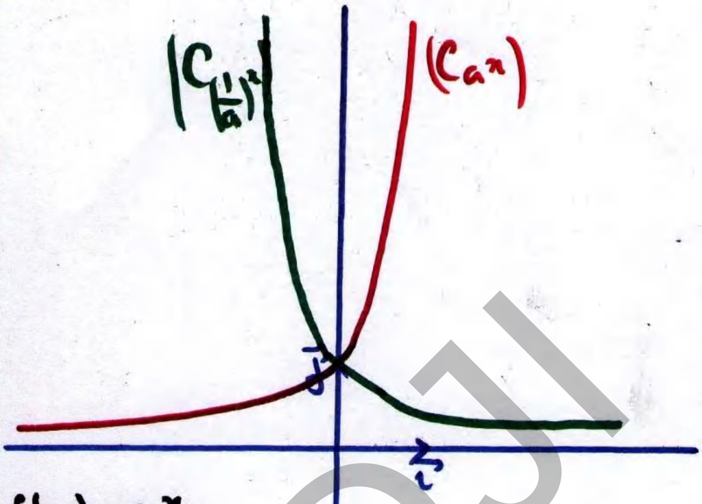
لتكن I منتصف $[MM']$ $I\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}\right)$

$x_I = y_I \Rightarrow I \in (\Delta)$

اذن (Δ) محور $[MM']$ $\Leftarrow$ M' صورة M بالنسبة (Δ)

$\Leftarrow$ لكل M من (C_e) صورة M' من $(C_{\ln})$ تناظرها بالنسبة للمنصف الأول $\Leftarrow$ (C_e) و $(C_{\ln})$ متناظران بالنسبة للمنصف الأول.

(C_{a^x}) و $(C_{(\frac{1}{a})^x})$ متناظران بالنسبة لـ (yy')



$f(x)=a^x$

$g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$

$$g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x=e^{\ln\left(\frac{1}{a}\right)^x}=e^{x\ln\left(\frac{1}{a}\right)}$$

$$=e^{-x\ln a}=e^{\ln a^{-x}}=a^{-x}=f(-x)$$

(C_f) نظير (C_g) بالنسبة لـ (yy') $\iff g(x)=f(-x)$.

6/ دوال تؤول دراستها لدراسة دوال أسية:

• **الدالة تجب الزائدية:**

. معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

. دالة زوجية.

• **الدالة جيب الزائدية:**

. معرفة على $\mathbb{R}$ ب $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

. دالة فردية.

. **N.B** : عند $+\infty$: (C_{ch}) و (C_{sh}) منحنيان متقاربان.

الدوال الأصلية

الـــدوال الأصلـــية

1/ مفهوم الدالة الأصلية :

F دالة أصلية لـ f على مجال I معناه :
← F قابلة للاشتقاق على I
← $F'(x)=f(x)$

مثال:

$f(x)=2x-3 \quad , \quad F(x)=x^2-3x+1$

بين أن F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

2/ مجموعة الدوال الأصلية لدالة :

f تقبل دوالا أصلية على مجال I إذا وفقط إذا كانت مستمرة على هذا المجال

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على مجال I فإن كل الدوال $F+C$ هي دوال أصلية لـ f على I

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f والتي تحقق $F(x_0)=y_0$

مثال:

$f(x)=2x+\cos x$

• اثبت أن f تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}$
• عين مجموعة الدوال الأصلية لـ f
• عين الدالة الأصلية لـ f والتي تحقق $F(\pi)=-1$

لاثبات أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة، توجد طريقتان :
← F و G قابلتان للاشتقاق على I و $F'(x)=G'(x)$
← $F(x)-G(x)=C^{te}$

مثال:

$G(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}+x \qquad F(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$

اثبت أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

3/ الدوال الأصلية لدوال مألوفة :

دوال عددية :

f	F
a	$ax+C$
$x^n ; n\neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
ex: x	$\dfrac{1}{2}x^2+C$
$\dfrac{1}{x^n} ; n\neq 1$	$\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+C$
ex: $\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}+C \quad ; x\neq 0$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x + C ; x>0$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C ; x>0$

دوال مثلثية:

f	F
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$1+tg^2 x = 1/\cos^2 x$	$\tan x + C$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

دوال أسية ولوغاريتمية:

f	F
e^x	$e^x + C$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\ln x$ تجزئة	$x\ln x - x + C$
$\ln(ax+b)$ تجزئة	$\frac{1}{a}(ax+b)\ln(ax+b) - x + C$
$\frac{\ln(x+\alpha)}{x+\alpha}$ $u'u$	$\frac{1}{2}[\ln(x+\alpha)]^2 + C$
$\frac{1}{x\ln x}$, $\frac{U'}{U}$	$\ln[\ln x] + C$
$\frac{a}{(ax+b)\ln(ax+b)}$	$\ln[\ln(ax+b)] + C$
قواعد تكامل $\ln$ تبرهن بالتجزئة	

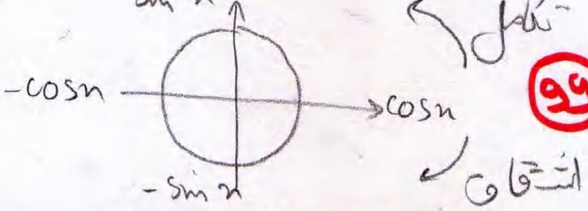
14/ عمليات على الدوال الأصلية:

f	F
$u'u^n, n\neq -1$ ex: $u'u$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $\frac{u^2}{2} + C$
$\frac{u'}{u^n}; n\neq 1$ ex: $\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + C$ $\frac{-1}{u} + C \; ; u\neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C \; ; u\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C \; ; u>0$
$u'e^u$	$e^u + C$

$u' + v'$	$U + V + C$
$k \cdot u'$	$k \cdot U + C$

$u' \cdot v'$	$U \cdot V$	⚠ Jamais
$\frac{u'}{v'}$	$\frac{U}{V}$	

N.B : لايجاد الدالة الأصلية لجداء دالتين، نستعمل التكامل بالتجزئة في بعض الأحيان (Voir Apres).



$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x+a}$$

$$* \frac{f(x)}{g(x)\times h(x)} = \frac{\alpha}{g(x)} + \frac{\beta}{h(x)}$$

4/ دوال مثلثية:

$$\cos u \times \cos v = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) + \cos(u+v)\right]$$

$$\sin u \times \sin v = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) - \cos(u+v)\right]$$

$$\sin u \times \cos v = \frac{1}{2}\left[\sin(u-v) + \sin(u+v)\right]$$

$\sin^n x \cos^m x$, $\cos^n x$, $\sin^n x$

نحول العبارة إلى الشكل $u'u^n$ وذلك باستعمال الساتير التالية:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2x\right]$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2x\right]$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (نادرا)

5/ ايجاد علاقة بين f و f' و f'':

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$$

- تحقق أن $f(x) - 2f'(x) + f''(x) = 4e^x$.
- عين دالة أصلية لـ f

$$F(x) = 2f(x) - f'(x) - 4\int e^x$$

$$F(x) = 2f(x) - f'(x) - 4e^x + C$$

5/ تقنيات لايجاد الدوال الأصلية:

1/ اظهار أحد الأشكال $u'u^n$, $\frac{u'}{u^n}$ .... وذلك بالضرب والقسمة في أعداد معينة:

$$f(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(2x+2)(x^2+2x+5)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} u' u^2 \quad tq:\ u(x) = x^2+2x+5$$

$$F(x) = \frac{1}{6}(x^2+2x+5)^3 + C$$

$$g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{2} \times \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$g(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{3}{2}\ \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

$$tq\ u(x) = x^2+2$$

$$G(x) = 3\sqrt{x^2+1} + C$$

2/ تغيير شكل الدالة في التمرين قبل حساب دالتها الأصلية:

مثال: f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$$

عين a و b بحيث $f(x) = e^x + a + \frac{be^x}{e^x - 1}$

ثم جد دالة أصلية للدالة f.

3/ دوال ناطقة:

يجب أن نغير شكلها كمايلي:

$$* \frac{ax+b}{cx+d} = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$$

$$* \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{a'x+b'}$$

6/ تطبيقات:

عين مجموعة الدوال الأصلية لـ f في كل حالة

- $f(x)=(x^2+3)(2x-1)$
- $f(x)=x-\frac{3}{x}$
- $f(x)=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$
- $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2}$
- $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$
- $f(x)=\frac{x^3}{x^4+1}$
- $f(x)=\frac{1}{x}\ln^2 x$
- $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}$
- $f(x)=\frac{2x^2+10x+9}{x^2+3x+2}$

$$=2+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+2}$$

- $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
- $f(x)=\frac{3}{x+1}$
- $f(x)=4\sin 2x+2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$
- $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+3}$
- $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$
- $f(x)=\frac{2\cos x}{\sin x}$
- $f(x)=\frac{1}{(x+1)^4}$
- $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^3}$
- $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$
- $f(x)=\frac{x^2+3x}{x-4}$
- $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

- $f(x)=\frac{2x^4+13x^2+x+18}{(x+1)(x^2+3)^2}$

$$=\frac{2}{x+1}+\frac{x}{(x^2+3)^2}$$

- $f(x)=\cos^2(2x)=\frac{1}{2}(1+\cos 4x)$
- $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos x=u^3u'$

- $f(x)=\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x$
- $f(x)=\cos^2 x\sin x=-u^2u'$
- $f(x)=\sin^2 x\cos^3 x$

$$=(\sin x\cos x)^2\cos x$$
$$=\left[\sin^2 x(1-\sin^2 x)\right]\cos x$$

- $f(x)=\sin^4 x=(\sin^2 x)^2$

$$=\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2$$
$$=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)$$
$$=\frac{1}{4}\left[1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]$$

- $f(x)=\cos 2x\cdot\cos 4x$
- $f(x)=\sin 3x\cdot\sin x$
- $f(x)=\sin 3x\cdot\cos 2x$
- $f(x)=\cos^2 x\cdot\sin^2 x$

$$=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)$$
$$=\frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)$$
$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]$$

6/ دراسة دالة أصلية دون حسابها:

F دالة معرفة بـ

$F(a)=b$ ←	$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$
$f(x)=\ldots\ldots$ ←	$F(a)=0$

الهدف دراسة تغيرات F دون حسابها.

تمارين:

ص 154 / ص ١٨١ / ت 91 ص 69

المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية.

1/ مفهوم معادلة تفاضلية

* نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تحتوي على $x , y , y' , y'' , \dots , y^{(n)}$ حيث $y = f(x)$ و $y', y'', \dots, y^{(n)}$ هي المشتقات المتعاقبة الدالة f.

* المجهول في المعادلات التفاضلية هو الدالة $y = f(x)$

* مجموعة حلول المعادلة التفاضلية هي كل الدوال التي تحقق هذه المعادلة التفاضلية.

2/ معادلات تفاضلية تحتوي $y, y', \dots$ فقط

المعادلة التفاضلية	الحل العام
$y' = ay \; ; \; a \neq 0$	$y = Ce^{ax}$
$y' = ay + b \; ; a \neq 0$	$y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$
$y'' = -w^2 y$	$y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$

أمثلة: حل المعادلات التفاضلية التالية:

$1/ \; 3y' - 2y = 0$

$2/ \; 2y' + y = 1$

$3/ \; y'' + \pi^2 y = 0$

الحل:

$1/ \; y = Ce^{\frac{2}{3}x}$

$2/ \; y = Ce^{-\frac{1}{2}x} + 1$

$3/ \; y = C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x$

3/ معادلات تفاضلية باستعمال الدوال الأصلية

* f دالة مستمرة على I و F دالة أصلية لها
* F دالة مستمرة على I و G دالة أصلية لها.

المعادلة التفاضلية	الحل العام.
$y' = f(x)$	$y = F(x) + C$
$y'' = f(x)$	$y = G(x) + C_1 x + C_2$

أمثلة: حل المعادلات التفاضلية التالية:

$1/ \; y' = \frac{1}{x^2}$

$2/ \; y'' = \sin x$

الحل:

$1/ \; y = -\frac{1}{x} + C$

$2/ \; y = -\sin x + C_1 x + C_2$

4/ معادلات تفاضلية تحتوي y, y', دالة f

المعادلة التفاضلية	الحل العام.
$y' - ay = f(x)$	$y = Ce^{ax} +$ الحل الخاص

نحقق أن u حل خاص؟ عين a و b حتى تكون u حل خاص

مثال:

(E): $y' + 2y = 6x - 1$

1/ أ. تأكد أن $p(x) = 3x - 2$ حل خاص لـ (E)

ب. عين $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الأولى والذي هو حل خاص للمعادلة (E)

2/ بين أن y حل للمعادلة (E) معناه $z = y - p$ حل للمعادلة التالية
(E'): $z' + 2z = 0$

3/ حل المعادلة (E')

4/ بين أن حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل $y = z + p$

5/ استنتج حلول المعادلة (E)

الحل:

السؤال 1 أ

p حل لـ (E) معناه $p' + 2p = 6x - 1$!!

$$p'(x) + 2p(x) = 3 + 2(3x - 2)$$
$$= 3 + 6x - 4$$
$$= 6x - 1$$

محققة

اذن $p(x) = 3x - 2$ حل خاص لـ (E).

السؤال 1 ب: ايجاد $p(x)$

$p(x) = ax + b$ حل لـ (E) معناه

$$p'(x) + 2p(x) = 6x - 1$$
$$a + 2(ax + b) = 6x - 1$$
$$a + 2ax + 2b = 6x - 1$$
$$(2a)x + (a + 2b) = 6x - 1$$

$$\begin{cases} 2a = 6 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b \Rightarrow -2 \end{cases} \Rightarrow p(x) = 3x - 2$$

السؤال 2:

$$\begin{cases} y' + 2y = 6x - 1 & : y \text{ حل لـ } (E) \\ p' + 2p = 6x - 1 & : p \text{ حل خاص لـ } (E) \end{cases}$$

بالطرح نجد: $y' - p' + 2y - 2p = 0$

$$(y - p)' + 2(y - p) = 0$$

نسمي $z = y - p$ ، ومنه فإن

$z = y - p$ حل للمعادلة (E'): $z' + 2z = 0$

السؤال 3:

$$(E'): z' = -2z \Rightarrow z = Ce^{-2x}$$

السؤال 4: اثبات أن $y = z + p$

لدينا $z = y - p$ اذن $y = z + p$.

السؤال 5: حلول المعادلة (E):

حلول المعادلة (E) هي $y = z + p$

حيث $\begin{cases} z = Ce^{-2x} \\ p = 3x - 2 \end{cases}$

اذن $\boxed{y = Ce^{-2x} + 3x - 2}$

5/ تعيين حل خاص بمعرفة الحل العام وشرط

* كل معادلة تفاضلية تقبل لا نهاية من الحلول التي لها نفس الشكل المشترك (الحل العام)
* بتغير الثوابت $C, C_1, C_2 \dots$ نحصل على حلول مختلفة.
* في بعض الأحيان يضاف الى المعادلة التفاضلية شرط من أجل تعيين الثابت C وايجاد الحل الخاص.
* عدد الثوابت المجهولة = عدد الشروط المعطاة

* أمثلة:

1/ عين الحل الخاص للمعادلة $2y'+y=1$

حيث $y(-1)=2$

2/ عين الحل الخاص لـ $y''+\pi^2 y=0$

حيث $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$ و $y'\left(\frac{2}{3}\right)=0$

* الحل:

السؤال ①

$$y=Ce^{-\frac{1}{2}x}+1 \Leftrightarrow 2y'+y=1$$

$$\begin{cases} y(-1)=Ce^{\frac{1}{2}}+1 \\ y(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow Ce^{\frac{1}{2}}+1=2$$
$$\Rightarrow C=e^{-\frac{1}{2}}$$

اذن $\boxed{y=e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}+1}$

السؤال ②

$$\begin{cases} y=C_1\cos\pi x+C_2\sin\pi x \\ y'=-\pi C_1\sin\pi x+\pi C_2\cos\pi x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right)=C_2 \\ y'\left(\frac{2}{3}\right)=-\pi C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi C_2\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}=C_2 \\ 0=-\pi C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi C_2\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2=\frac{2}{3} \\ C_1=\frac{-2}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

اذن $\boxed{y=\frac{-2}{3\sqrt{3}}\cos\pi x+\frac{2}{3}\sin\pi x}$

6/ تمارين

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية

1/ $y'=x^3+3x^2-2$

2/ $y'=e^{2x+1}+\frac{x}{x^2+1}$

3/ $y'=2\cos^2x+\sin 2x$

4/ $y''=-3x^2+2x+1$

5/ $y''=x+1+e^{-x}$

6/ $y''=2\sin^2x+2x$

7/ $(x^2+1)y'=x$ / $y(+2)=\ln 10$

8/ $y'-2y=0$ / $y(1)=e^2$

9/ $y''=-y$

10/ $y''+4y=0$

تمرين 2:

$(E)\ldots\ y'+y=\sin 2x$

عين a و b حتى تكون الدالة u حل خاص لـ (E) حيث $u(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$ ، ثم عين الحل العام لـ (E) والحل الخاص من أجل: $y(0)=\frac{1}{2}$

تمرين 3:

$(E):\ 2y'-y+2=0$

. برهن أن (E) تقبل الدالة الثابتة كحل خاص ثم جد الحل العام لـ (E)

. عين الحل الخاص الذي يحقق $y(0)=3$

الحساب التكاملي

الحساب التكاملي

1/ تعريف التكامل: "المحدود"

f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ و F دالة أصلية لها على هذا المجال (أي دالة أصلية)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x (a هو الحد الأسفل و b الحد الأعلى)

أمثلة: احسب التكاملات التالية:

1/ $\int_{-1}^{2}(-3x^2+1)\,dx$	4/ $\int_{3}^{-1}(x^2-4x+1)\,dx$
2/ $\int_{0}^{1} e^{2x-1}\,dx$	5/ $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$
3/ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$	6/ $\int_{0}^{1}(2x+e^{-x+1})\,dx$

الحل:

$$I = \int_{-1}^{2}(-3x^2+1)\,dx = \left[-x^3+x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(-2^3+2\right)-\left(-(-1)^3-1\right)$$
$$= -6-0$$
$$= -6$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \left(-\cos\pi\right)-\left(-\cos(-\pi)\right)$$
$$= 1-1$$
$$= 0$$

2/ خواص التكامل

* **من التعريف:**

* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
* $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
* $\int_a^b k\,.dx = k(b-a)$

N.B: $\int_a^b dx = (b-a)$

* **علاقة شال:**

* $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

* **خطية التكامل:**

* $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
* $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

* **شفعية دالة:**

* $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow$ f فردية
* $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \Leftrightarrow$ f زوجية

* اشارة التكامل + المقارنة:

x عدد كيفي من المجال $[a, b]$

* $\forall x \in [a,b]$: $f(x) \geq 0$

$$\int_a^b f(x) \geq 0 \Leftarrow \text{⚠}\ a \leq b$$

* $\forall x \in [a,b]$: $f(x) < g(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx \Leftarrow \text{⚠}\ a \leq b$$

* المتغير عند حساب التكامل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt \ldots$$

المتغير عند اجراء التكامل و الاشتقاق هو x وما سواه من الأحرف يعتبر ثابتا

مثال:

* $\int_0^2 (2x+2)\,dx = \left[x^2+2x\right]_0^2 = 8$
* $\int_0^2 (2t+2)\,dt = \left[t^2+2t\right]_0^2 = 8$
* $\int_0^2 \underbrace{(2x+2)}_{c^{te}}\,dt = (2x+2)(2-0) = 4x+4$
* $\int_0^2 (2x)\,dx = \left[x^2\right]_0^2 = 4$
* $\int_0^2 2x\,dy = 2x\left[y\right]_0^2 = 4x$
* $\int_0^2 (2x+t)\,dt = \left[(2x)t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^2$

$= 4x+2$

* استقلالية حساب التكامل المحدود عن اختيار الدالة الأصلية

f دالة مستمرة على $[a,b]$

F , G , H دوال أصلية لـ f على $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left[G(x)\right]_a^b$$

$$= \left[H(x)\right]_a^b = \ldots$$

مثال:

احسب $\int_0^2 f(x)$ حيث

$f(x) = 2x+2$

$$\begin{cases} F(x) = x^2+2x \\ G(x) = x^2+2x+100 \end{cases}$$

$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^2 = \left[x^2+2x\right]_0^2$

$= (2^2+2\times2) - (0^2+2\times0)$

$= 8$

$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_0^2 = \left[x^2+2x+100\right]_0^2$

$= (2^2+2\times2+\cancel{100}) - (0^2+2\times0+\cancel{100})$

$= 8$

* التكامل غير المحدود:

* $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ / $\int f' = f$ / $\int f'' = f'$

مثال:

$$\int (2x+2)\,dx = x^2+2x+c$$

3/ تقنيات لحساب التكامل

1/ باستعمال خواص التكامل

فكرة ①: علاقة شال (في حال وجود قيمة مطلقة)

① احسب $I=\int_0^3 |x^2-1|\,dx$

من أجل كل x من $[0;1]$: $x^2-1\leq 0$

$|x^2-1| = -x^2+1$

من أجل كل x من $[1;3]$: $x^2-1\geq 0$

$|x^2-1| = x^2-1$

$$I=\int_0^3 |x^2-1|\,dx=\int_0^1 |x^2-1|\,dx+\int_1^3 |x^2-1|\,dx$$

$$=\int_0^1 (-x^2+1)\,dx+\int_1^3 (x^2-1)\,dx$$

$$=\int_1^0 (x^2-1)\,dx+\int_1^3 (x^2-1)\,dx$$

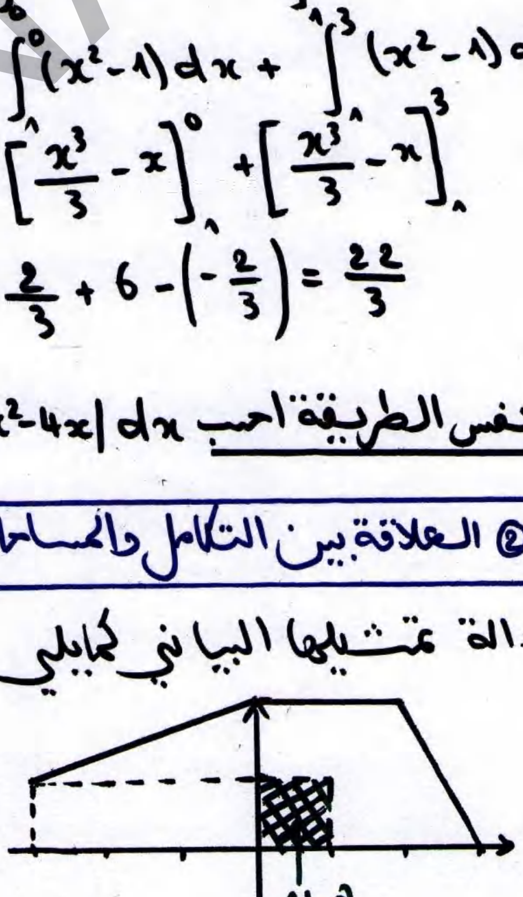
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^0+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^3$$

$$=\frac{2}{3}+6-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{22}{3}$$

② بنفس الطريقة احسب $\int_0^6 |x^2-4x|\,dx$

فكرة ②: العلاقة بين التكامل والمساحات

f دالة تمثيلها البياني كمايلي



احسب $I=\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$

$$I=\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = S\begin{pmatrix} x=-3 \ ; x=3 \\ y=0 \ ; y=f(x)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{(2+1)\times 3}{2}+\frac{(3+2)\times 2}{2}$$

$$=\frac{19}{2}\ u.a \quad (u.a=1cm\times 1cm)$$

$$=\frac{19}{2}$$

التكامل = المساحة مكتوبة بالوحدة ua

فكرة ③ ايجاد تكامل بمعرفة تكاملات أخرى

مثال ①: $I=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$, $J=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$

احسب I ، $I+J$ واستنتج J.

• $I=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

• $I+J=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx+\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$

$$=\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 \frac{x\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}\,dx$$

$$=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

• $J=(I+J)-I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

$$\boxed{J=\frac{1}{2}(1-\ln 2)}$$

مثال ②: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$

احسب I و J.

$\bullet\; I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2x+\sin^2x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$

$\bullet\; I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2x-\sin^2x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4}$

$=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{4} \\ I-J=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I=\frac{\pi+2}{8} \\ J=\frac{\pi-2}{8}\end{cases}$$

2/ باستعمال القيمة المتوسطة

① تعريف

f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$، القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a,b]$ هي:

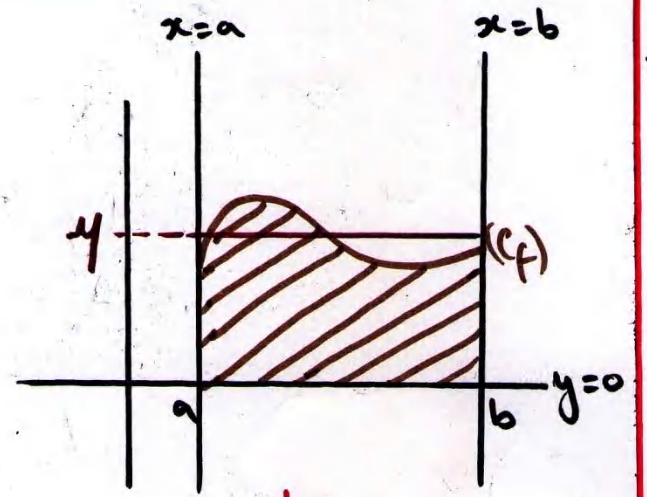
$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

② التفسير البياني:

μ هي ارتفاع المستطيل الذي:

← قاعدته $b-a$

← له نفس المساحة المحصورة بين $x=a$ و $x=b$ و $y=0$ والمنحني (C_f)



$$\mu(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

③ حصر القيمة المتوسطة

① إذا كان: $\forall x\in[a,b]:\; m\leq f(x)\leq M$

minorant (m) ، Majorant (M)

فإن $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\leq M(b-a)$

② إذا كان: $\forall x\in[a,b]:\; |f(x)|\leq m$

فإن $-m\leq f(x)\leq m$

و $m(a-b)\leq\int_a^b f(x)\leq m(b-a)$

④ تطبيق رقم ①

$$I=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

بمعارفنا لا يمكن ايجاد قيمة مضبوطة لـ I لكن يمكن ايجاد حصر له.

1/ بين انه $\forall x\in[0;1]$ فإن $0\leq\frac{1}{t^2+1}\leq 1$

2/ اجد حصرا لـ I.

تطبيق رقم ②

$$f(x) = \frac{x e^x}{1+e^x}$$

• بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$

$$\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$$

• استنتج حصرا لـ : $I = \int_0^2 f(x)$

تطبيق رقم ③

f دالة معرفة على $]-1,+\infty[$ بـ :

$$f(x) = 1 + \ln(x+1)$$

• ادرس اتجاه تغير f على المجال $[0 ; e-1]$

• استنتج حصرا لـ f.

• استنتج حصرا لـ $I = \int_1^{e-1} f(x)dx$.

تطبيق رقم ④

f الدالة المعرفة على $[-1;1]$ بـ $f(x) = x^2$

• احسب μ القيمة المتوسطة لـ f على المجال $[-1;1]$، فسر بيانيا.

3/ المكاملة بالتجزئة

مبرهنة

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

برهان

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx$$

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx$$

$$\int_a^b u\cdot v'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$

طريقة اختيار u و v'

$\begin{cases} u = \text{اللوغاريتمية} \\ v' = \text{الأسية / الجيبية} \end{cases}$ $\begin{cases} u' = \\ v = \end{cases}$

أمثلة عن المكاملة بالتجزئة في التكامل غير المحدود (لحساب الدوال الأصلية)

$$\boxed{\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx}$$

• $\int \ln x\,dx$

$\begin{cases} u = \ln x \\ v' = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{cases}$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\times x\,dx$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

منه $x\ln x - x$ دالة اصلية لـ $\ln x$

أمثلة عن المكاملة بالتجزئة في التكامل المحدود

$$I = \int_0^1 xe^x$$

$\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases}$ / $\begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x$$

$$I = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1$$

$$I = e - (e - e^0)$$

$$I = 1$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x$$

$\begin{cases} u = x \\ v' = \sin x \end{cases}$ $\begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$J = \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x$$

$$J = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi/3} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$J = \frac{-\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

احسب بالتجزئة، التكاملات التالية

1/ $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

2/ $\int_{-1}^0 (x+1)e^x dx$

3/ $\int_1^2 (x^2+x)\ln x \, dx$

4/ $\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$

5/ $\int_0^{\pi/4} (3x+2)\sin 2x \, dx$

6/ $\int_0^1 x(e^x - e^{-x}) dx$

7/ $\int_0^{\pi/8} x\cos 4x \, dx$

---

* $\int \ln(x+\alpha) dx$

$\begin{cases} u = \ln(x+\alpha) \\ v' = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u' = \frac{1}{x+\alpha} \\ v = x \end{cases}$

$$\int \ln(x+\alpha) dx = x\ln(x+\alpha) - \int \frac{x}{x+\alpha}$$

$$= x\ln(x+\alpha) - \int \left(1 - \frac{\alpha}{x+\alpha}\right) dx$$

$$= x\ln(x+\alpha) - \int dx + \alpha \int \frac{1}{x+\alpha} dx$$

$$= x\ln(x+\alpha) - x + \alpha \ln(x+\alpha)$$

$$= (x+\alpha)\ln(x+\alpha) - x + C$$

---

* $\int \ln(x+\alpha) dx$

$\begin{cases} u = \ln(x+\alpha) \\ v' = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u' = \frac{1}{x+\alpha} \\ v = x+\alpha \end{cases}$

$$\int \ln(x+\alpha) dx = (x+\alpha)\ln(x+\alpha) - \int dx$$

$$= (x+\alpha)\ln(x+\alpha) - x + C$$

---

* $\int \ln(ax+b) dx$

$\begin{cases} u = \ln(ax+b) \\ v' = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u' = \frac{a}{ax+b} \\ v = x + \frac{b}{a} \end{cases}$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - \int dx$$

$$= \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x$$

أمثلة عن استعمال التكامل بالتجزئة مرتين

* $\int_0^1 x^2 e^x dx$

$\begin{cases} u = x^2 \\ v' = e^x \end{cases}$ $\begin{cases} u' = 2x \\ v = e^x \end{cases}$

$I = \int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2\underbrace{\int_0^1 x e^x}_{J}$

$J = \int_0^1 x e^x dx$

$\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases}$ $\begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$

$J = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x = [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$

منه

$I = [x^2 e^x]_0^1 - 2J$

$I = [x^2 e^x]_0^1 - 2[x e^x]_0^1 + 2[e^x]_0^1$

$I = e - 2$

---

1. $\int_0^{\pi} (x^2+2x)\sin x \, dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x \, dx$
3. $\int_1^{e} (\ln x)^2 dx$

4/ حساب التكامل بتبديل المتغير

مثال ①: احسب $I = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx$

* نستعمل تبديل المتغير:

$I = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx$

نضع $\sqrt{x} = t$ أي $x = t^2$

$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \\ dx \text{ يجب تعويضها بـ } dt \end{cases}$

نشتق بالنسبة لـ x

نشتق بالنسبة لـ t

$x = t^2$

$1\, dx = 2t \, dt$

$dx = 2t\, dt$

$I = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \int_0^2 t \times 2t \, dt$

$= \int_0^2 2t^2 dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$

* طريقة أخرى:

$I = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$

مثال ②: $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

نستعمل تبديل المتغير:

نضع $x=\cos t$ أي $t=\cos^{-1}(x)$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3} \\ dx=-\sin t\,dt \end{cases}$$

$$x=\cos t$$

$$1\,dx=-\sin t\,dt$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\cos^2 t}\times -\sin t\,dt$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\sin^2 t}\times(-\sin t)\,dt$$

$\sin t\geq 0 \;:\; \frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{3}$

$$I=\int_{\pi/2}^{\pi/3}(+\sin t)(-\sin t)\,dt$$

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi/3}\sin^2 t\,dt$$

تغيير كتابة $\sin^2 t$:

$$\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t$$
$$\cos 2t=1-\sin^2 t-\sin^2 t$$
$$\cos 2t=1-2\sin^2 t$$
$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$$

منه

$$I=-\int_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{(1-\cos 2t)}{2}\,dt$$

$$I=\frac{-1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\pi/2}^{\frac{\pi}{3}}$$

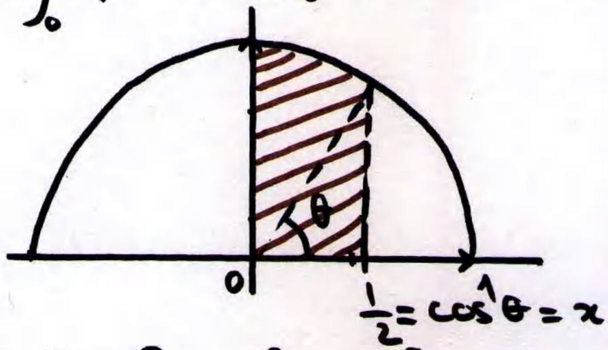
$$I=\frac{-1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)$$

$$I=\frac{-1}{2}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\boxed{I=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}}$$

الاجابة هندسيا:

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$$



$$I=S=S_{D}-S_{\Delta}+S_{\Delta}$$

$$I=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\begin{cases} S_{\Delta}: 90^\circ\longrightarrow\frac{\pi}{4} \\ \quad\theta\longrightarrow S_{\Delta} \\ S_{\Delta}=\frac{\pi}{4}\,\frac{\theta^\circ}{90}=\frac{\pi}{4}\,\frac{\cos^{-1}x}{90}=\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{\Delta}=\frac{\cos\theta\times\sin\theta}{2}=\frac{\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}}{2} \\ S_{\Delta}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$$

$$\boxed{I=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}}$$

منه

① أ حسب التكاملات التا لية :

$\int_0^1 \frac{dt}{4+t^2}$	$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$	$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$	$\int_1^2 (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$	$\int_1^2 (x+\frac{1}{x^2})dx$	$\int_0^1 x\sqrt{3+x^2}dx$
$\int_0^1 \frac{x}{2+x^2}dx$	$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$	$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$	$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^4}dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+7}}$	$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$
$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$	$\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{x^2+1}dx$	$\int_0^1 x(2+x^2)^4dx$	$\int_0^1 \frac{t+1}{t-2}dt$	$\int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2}dt$	$\int_0^2 \lvert 2x-1\rvert^3 dx$
$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin x}\cos x dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$	$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$
$\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^x}dx$	$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}dx$	$\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x}dx$	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$	$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$

② با ستعما ل مكا ملة با لاجزاء أ حسب التكا ملا ت التا ليـة :

$\int_2^3 \ln(\frac{x-1}{x+1})dx$	$\int_1^2 x\ln(x+1)dx$	$\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$	$\int_1^2 \ln(x+2)dx$	$\int_1^e \ln x dx$
$\int_{\sqrt{e}}^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$	$\int_0^1 (x^2-2x+3)e^x dx$	$\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$	$\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$	$\int_0^1 xe^x dx$
$\int_0^1 \frac{-2x^3}{(x^2+1)^2}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$	$\int_0^2 x\sqrt{2-x}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x-1)\sin x dx$
$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$	$\int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$	$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)(1+\tan^2 x)dx$	

③ با ستعما ل مكا ملة بتغيير المتغير أ حسب التكا ملا ت التا لية :

$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ $(t=e^x)$	$\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx$ $(t=\sqrt{x+1})$	$\int_5^{10} \frac{1+\sqrt{x-1}}{x-2}dx$ $(t=\sqrt{x-1})$	$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $(t=1+\sqrt{x})$	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ $(t=\sqrt{e^x-1})$
$\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x}{(e^x-1)\sqrt{e^x-2}}dx$ $(t=\sqrt{e^x-2})$	$\int_{-2}^{-1} x\sqrt{x+2}dx$ $(t=\sqrt{x+2})$	$\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ $(t=\sqrt{x-1})$	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$ $(t=\frac{1}{x})$	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ $(t=\frac{x+1}{2})$

تطبيقات التكامل

4/ تطبيقات التكامل

1/ الدالة الأصلية لدالة والتي تنعدم من أجل قيمة معلومة مسبقا a

الطريقة التقليدية:

* تعيين الدالة الأصلية لـ f باستعمال قواعد الدوال الأصلية
* تعيين الثابت C من الشرط $F(a)=0$

الطريقة الثانية باستعمال التكامل:

$$\boxed{F(x)=\int_a^x f(t)\,dt}$$

مثال:

عين الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ والتي تنعدم عند 1 :

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x \ln t\,dt$$

$$\begin{cases} u=\ln t \\ v'=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'=\frac{1}{t} \\ v=t \end{cases}$$

$$F(x)=\left[t\ln t\right]_1^x-\int_1^x dt$$

$$F(x)=\left[t\ln t\right]_1^x-\left[t\right]_1^x$$

$$F(x)=x\ln x-\cancel{\ln 1}^{\,0}-x+1$$

$$F(x)=x\ln x-x+1$$

2/ حساب المساحات

$$\boxed{S=\int_{\text{يسار}}^{\text{يمين}}(\text{أعلى}-\text{أسفل})\,dx \quad \text{en } (u.a)}$$

*** طرح الأسئلة:**

س1: احسب المساحة من المستوي المحصور بين (C_f) و
- محور الفواصل
- المستقيم (Δ)
- المنحني (C_g)

و المستقيمين $x=a$ و $x=$ b / a / n

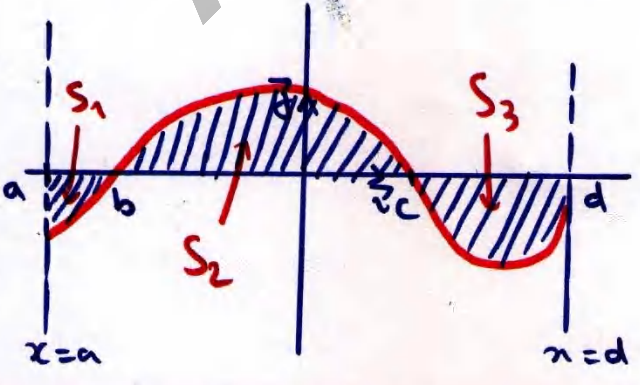
س2: احسب مساحة الحيز من المستوي المعرف بمجموعة النقط $M(x,y)$

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases}$$

⇐ لا داعي لدراسة الوضع النسبي والاشارة

f دالة مستمرة على $[a,b]$ $(a<b)$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد (ليس شرط متجانس)

1* المساحة المحددة بـ (C)، محور الفواصل و المستقيمان $x=a$ و $x=b$



* ندرس اشارة f و نميز 3 حالات:

أ- $f(x) \geq 0$

$$S_2 = \int_b^c f(x)\,dx$$

ب- $f(x) \leq 0$:

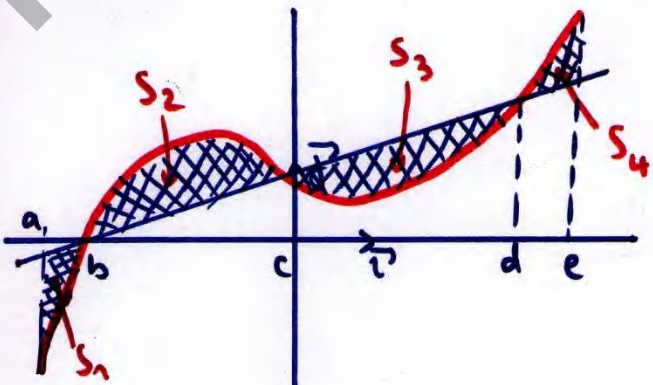
$$S_1 = \int_a^b -f(x)\,dx$$

$$S_3 = \int_c^d -f(x)\,dx$$

جـ- f تتغير اشارتها:

$$S = \int_a^b -f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx$$

② * المساحة المحددة بـ (C)، مستقيم $y=\alpha x+\beta$
والمستقيمات $x=a$ و $x=b$



* ندرس الوضع النسبي بين (C) و (Δ) و نميز 3 حالات:

أ- $f(x) \geq \alpha x+\beta$ (فوق)

$$S_2 = \int_b^c \left(f(x)-(\alpha x+\beta)\right)dx$$

$$S_4 = \int_d^e \left(f(x)-(\alpha x+\beta)\right)dx$$

ب- $f(x) \leq \alpha x+\beta$ (تحت)

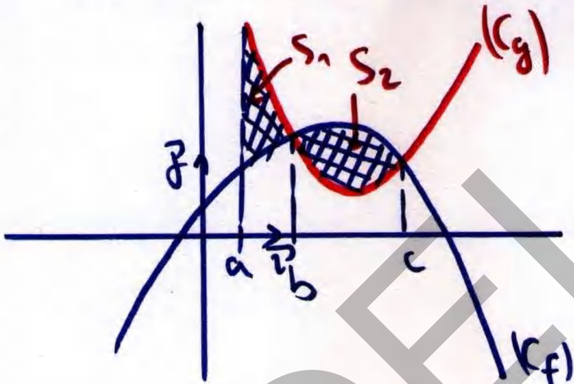
$$S_1 = \int_a^b \left(\alpha x+\beta - f(x)\right)dx$$

$$S_3 = \int_c^d \left(\alpha x+\beta - f(x)\right)dx$$

جـ- الوضع النسبي يتغير:

$$S = \int_a^b \left(\alpha x+\beta-f(x)\right)dx + \int_b^c f(x)-(\alpha x+\beta)\,dx + \int_c^d \left(\alpha x+\beta-f(x)\right)dx + \int_d^e [illegible]\,dx$$

③ * المساحة المحددة بـ (C_f)، (C_g)،
المستقيمات $x=a$ و $x=b$



* ندرس الوضع النسبي بين (C_f) و (C_g):

أ- $f(x) \geq g(x)$ (فوق)

$$S_2 = \int_b^c \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

ب- $f(x) \leq g(x)$ (تحت)

$$S_1 = \int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

جـ- الوضع النسبي يتغير:

$$S = \int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx + \int_b^c \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

④ • ملاحظات هامة جدا :

Ⓐ • في كل ما سبق حسبنا $\int_{a}^{b}$ (أعلى - أسفل) dx

حيث b عدد معطى في التمرين.

← α عوض b : حيث α هو العدد الذي يحقق $g(x)=0$ ....، السؤال يكون كمايلي :

① ← احسب $A(\alpha)$ بدلالة α ؟

② ← بين أن $A(\alpha)=\dots$ (هنا نعزل e^{α} و $\ln\alpha$ لنصل للنتيجة) ثم احصر $A(\alpha)$

← n بدل b : حيث n عدد طبيعي أكبر من 1 ... والسؤال كمايلي :

① ← احسب $A(n)$ بدلالة n.

② ← نعرف المتتالية $u_n=A(n)$ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n)$

③ ← عين n حتى يكون $A(n)\geq 8$ أو $A(n)\leq 6$ مثلا...

Ⓑ • بعد حساب المساحة بالتكامل نجدها بوحدة و.م.

$$\boxed{1\ \text{و.م} = \|\vec{i}\|\cdot\|\vec{j}\|}$$

⑤ • تطبيقات

تمرين ①:

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ :
$$f(x)=x+2+\frac{\ln x}{x}$$

1/ برهن أن (Δ) ذو المعادلة $y=x+2$ م م لـ (C_f) عند $+\infty$

2/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

3/ احسب S المساحة المحددة بـ (C_f) و $y=x+2$ ، $x=\frac{1}{e}$ ، $x=e$

تمرين ②:

احسب مساحة الحيز من المستوي المعرف بـ $1\leq x\leq 3$ و $3x+1\leq y\leq 2x^2+x+5$

تمرين ③:

f دالة معرفة على $]-\infty,0[$ كمايلي : $f(x)=1-\frac{\ln x^2}{x}$ و (d) مستقيم معادلة $y=1$

1/ ادرس تغيرات f

2/ ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (d)

3/ بين أن $f(x)=0$ تقبل حلا α حيث $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$

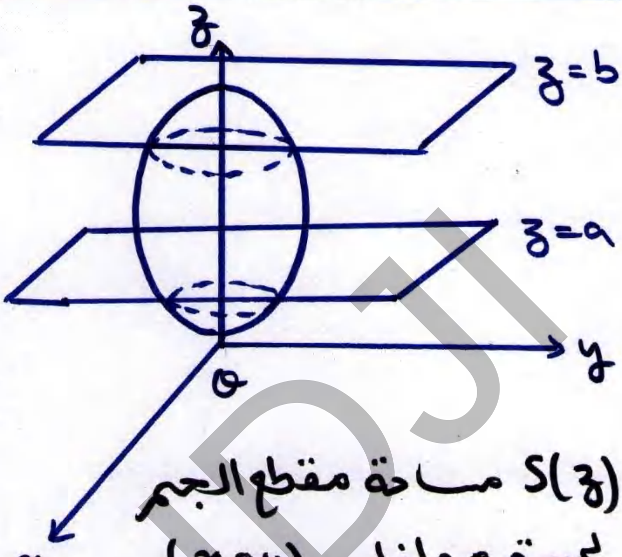
4/ احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) ، (d) ، $x=-1$ ، $x=\alpha$

5/ بين أن $A(\alpha)=\frac{\alpha^2}{4}$

6/ جد حصرا لـ $A(\alpha)$!!

3/ حساب الحجوم

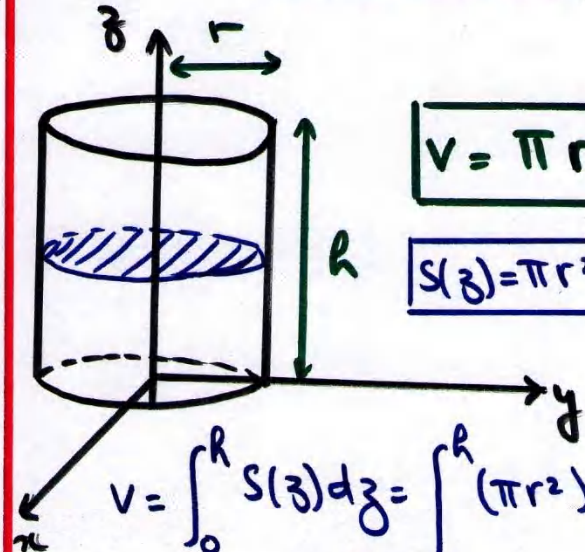
① قواعد حجوم مجسمات بسيطة



$S(z)$ مساحة مقطع الجسم بمستو موازي (xoy) ذا قيمة z حيث $a \le z \le b$

$$V=\int_a^b S(z)\,dz$$

مثال ① حجم الأسطوانة:



$$\boxed{V=\pi r^2 h}$$

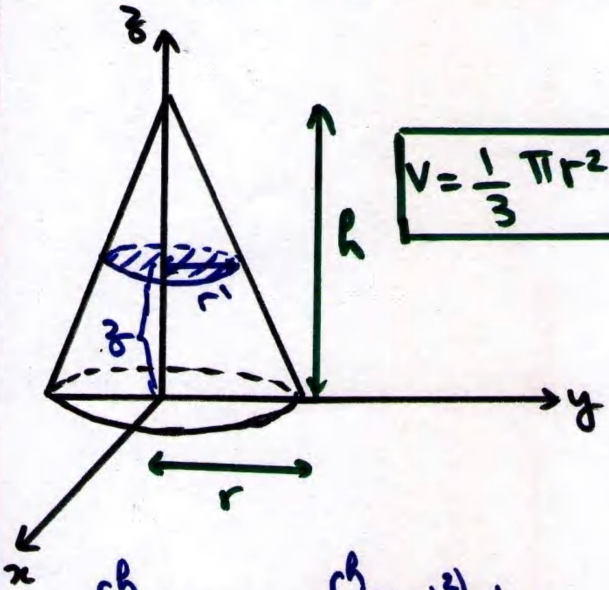
$$\boxed{S(z)=\pi r^2}$$

$$V=\int_0^h S(z)\,dz=\int_0^h (\pi r^2)\,dz$$

$$V=\left[(\pi r^2)z\right]_0^h=\pi r^2 h$$

$$V=\pi r^2 h$$

مثال ② حجم المخروط الدوراني:



$$\boxed{V=\frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

$$V=\int_0^h S(z)\,dz=\int_0^h (\pi r'^2)\,dz$$

$$\boxed{S(z)=\pi r'^2 \quad / \quad \frac{r'}{r}=\frac{h-z}{h} \quad / \quad r'=\frac{r(h-z)}{h} \qquad r'=r\left(1-\frac{z}{h}\right)}$$

$$V=\int_0^h \pi\left(r\left(1-\frac{z}{h}\right)\right)^2 dz=\pi r^2\int_0^h\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 dz$$

$$V=\pi r^2\int_0^h\left(-\frac{1}{h}z+1\right)^2 dz$$

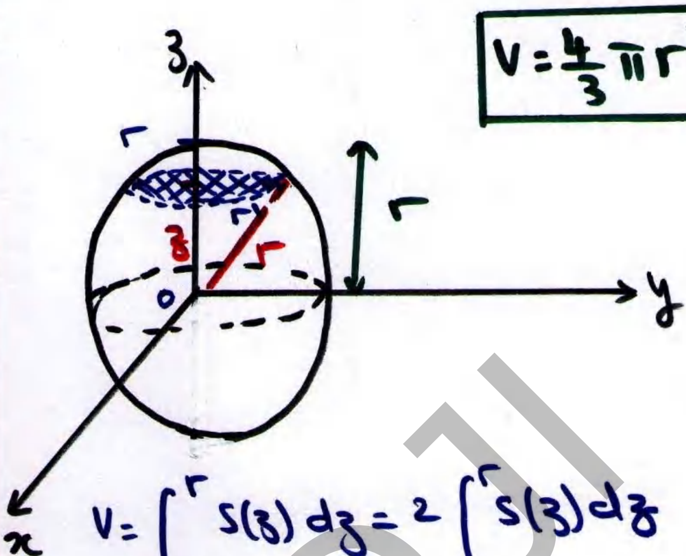
$$V=\pi r^2(-h)\int_0^h -\frac{1}{h}\left(-\frac{1}{h}z+1\right)^2 dz$$

$$V=-\pi r^2 h\left[\left(-\frac{1}{h}z+1\right)^3\right]_0^h\times\frac{1}{3}$$

$$V=\frac{-\pi r^2 h}{3}\left[\underbrace{(-1+1)^3-(1^3)}_{-1}\right]=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

مثال ③ : حساب حجم الكرة

$$\boxed{V=\frac{4}{3}\pi r^3}$$



$$V=\int_{-r}^{r} S(z)\,dz = 2\int_{0}^{r} S(z)\,dz$$

$$\boxed{\begin{array}{c} S(z)=\pi r'^2 \;/\; r'^2 = r^2-z^2 \\ S(z)=\pi\left(r^2-z^2\right) \end{array}}$$

$$V=2\int_{0}^{r}\pi\left(r^2-z^2\right)dz = 2\pi\int_{0}^{r} r^2-z^2\,dz$$

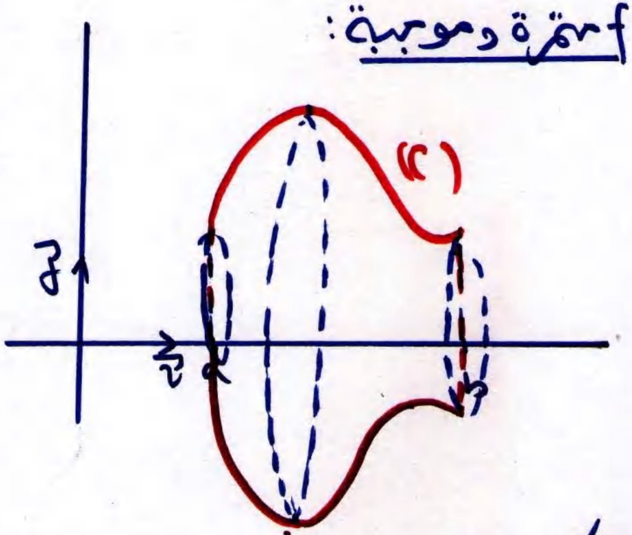
$$V=2\pi\left[r^2 z-\frac{z^3}{3}\right]_0^r$$

$$V=2\pi\left[\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-0\right]=2\pi\left(\frac{3r^3-r^3}{3}\right)$$

$$V=2\pi\left(\frac{2r^3}{3}\right)=\frac{4\pi r^3}{3}$$

② حجم مجسم دوراني محور $(x'x)$

f مستمرة وموجبة:



ليكن V حجم المجسم المولد عن دوران (C_f) حول حامل محور الفواصل.

$$\boxed{V=\pi\int_{a}^{b} f(x)^2\,dx}$$

تطبيق:

1/ باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب:

$$I=\int_{2}^{3}(x-2)e^{2x}\,dx$$

$$J=\int_{2}^{3}(x-2)^2e^{2x}\,dx$$

2/ لتكن f الدالة المعرفة على $[2;3]$ ب:

$$f(x)=(x-2)e^{x}$$

وليكن (C) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس، احسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول $(x'x)$

5/ منهجية طرح أسئلة التكامل:

طريقة ①:

① أسئلة مساعدة لتعيين $F(x)$

- احسب التكامل التالي
- باستعمال التكامل بالتجزئة، عين .
- تحقق أن G دالة أصلية لـ ... (جزء من f)
- عين α و β حتى تكون G أصلية لـ ... (جزء من f)
- اثبت أن f تكتب على الشكل أو يطلب تعيين ثوابت a، b.
- اثبت أن $af''+bf'+cf=\dots$

② حساب $F(x)$

- بين أن f تقبل دالة أصلية على $[a,b]$
- جد الدالة الأصلية لـ f والتي تحقق
- جد الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم من أجل a ← 2 طرق .

③ حساب المساحات:

- عين إشارة f
- ادرس الوضع النسبي بين ... و .
- احسب مساحة الحيز المحصور بين ... و ... و ... و ...
- أو الحيز المعرف ب $\begin{cases} \dots\leq x\leq\dots \\ \dots\leq y\leq\dots \end{cases}$
- الحد الأعلى للتكامل قد يكون
  ← عدد ما
  ← α، بين أن $A(\alpha)=$ وجدحصرا
  ← عدد طبيعي n : بين أن $A(n)=\dots$
  احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n)$ ، عين n حتى $A(n)\geq$

④ حساب الحجوم:

احسب V حجم المجسم المولد عن دوران (C_f) حول (xx')

طريقة ②:

نعرف F كمايلي

$$\begin{cases} f(x)=\dots \\ F(a)=b \end{cases}$$

أو $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

نريد دراسة الدالة F دون ايجاد عبارتها .

أمثلة:

- ص 154
- ص 181
- ت 91 ص 69
- Bac 2015 M_1 ...

تابع لحساب المساحات:

سؤال
ليكن العدد $A(\lambda)=\int_0^\lambda h(x)\,dx$
حيث $h(x)=f(x)+x$
فسر هندسيا العدد $A(\alpha)$ ؟
← $A(\alpha)$ هي مساحة الحيز المستوي المحصور بين

$x=0$
$x=\lambda$
(C_f)
المستقيم $y=x$

استنتاج منحنيات انطلاقا من منحنيات أخرى

استنتاج تمثيل بياني لـ (Cg) مجهول انطلاقا من تمثيل بياني معلوم (Cf)

/1 $\boxed{g(x)=f(x+\alpha)+\beta}$

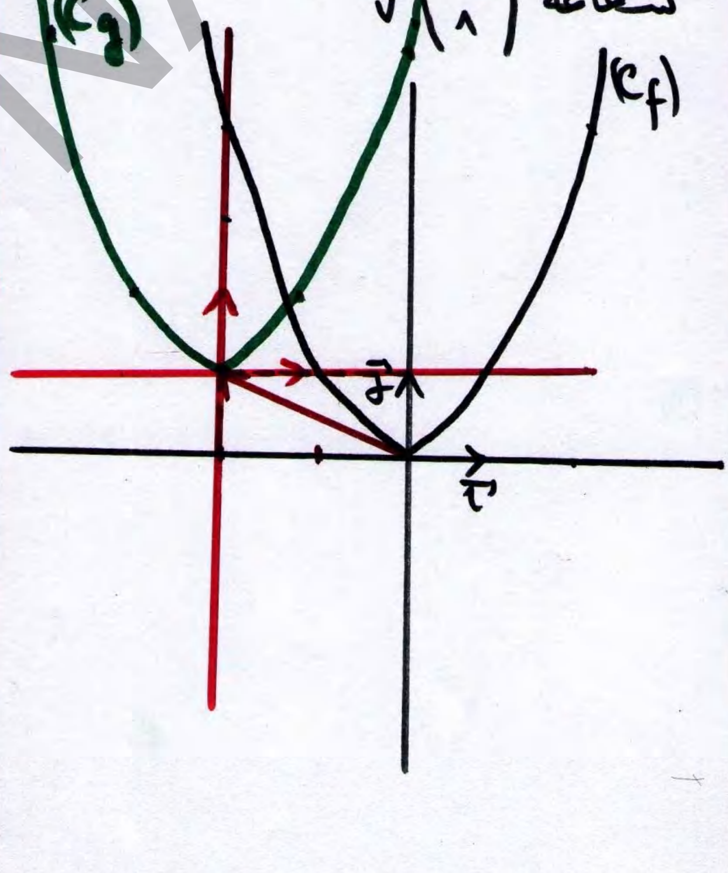
* (Cg) صورة (Cf) بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

مثال: باستعمال دالة مرجعية ودون دراسة تغيرات الدالة g، مثل (Cg)

① $g(x)=x^2+4x+3$

$g(x)=(x+2)^2+1$

(Cg) صورة منحني الدالة مربع بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$



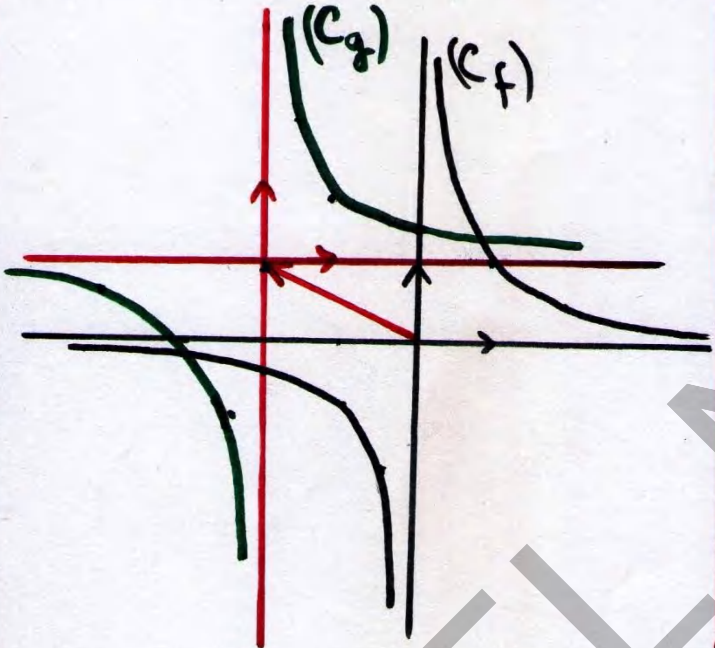
② $g(x)=\frac{x+3}{x+2}$

$g(x)=1+\frac{1}{x+2}$

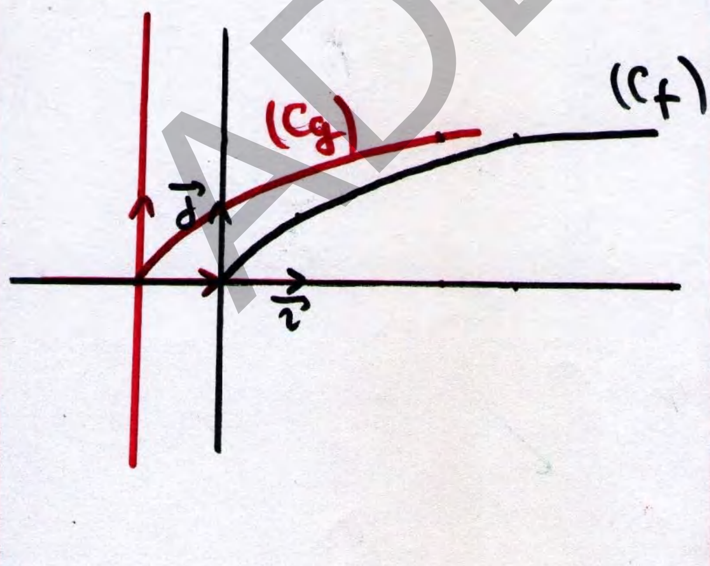
بوضع $f(x)=\frac{1}{x}$

$g(x)=f(x+2)+1$

(Cg) صورة (Cf) بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$



③ $g(x)=\sqrt{x+1}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$



② $g(x)=k.f(x)$

$M(x,y)\in(C_f)$

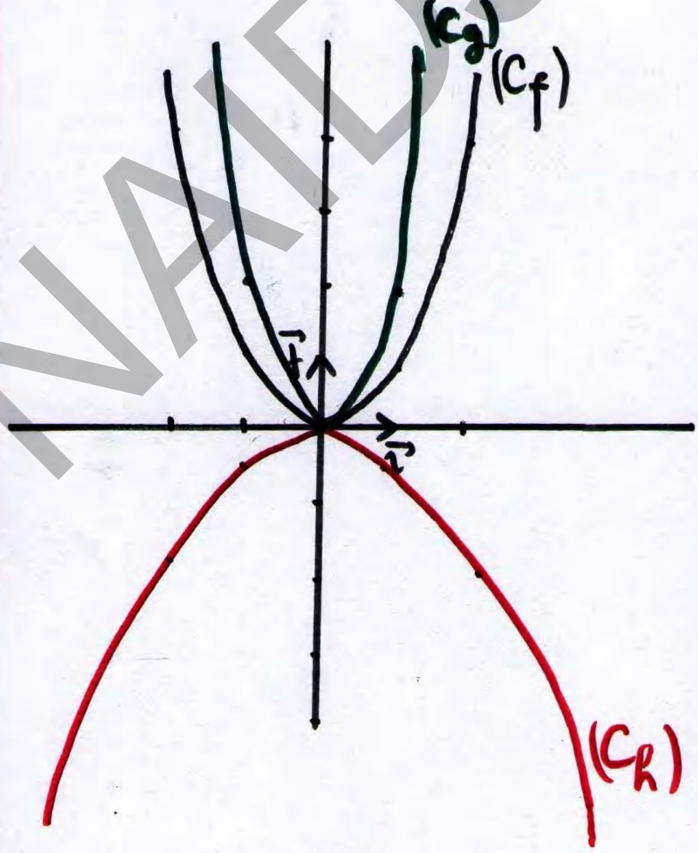
$M(x,ky)\in(C_g)$

$k>0$: (C_f) و (C_g) في نفس الجزء

$k<0$: (C_f) و (C_g) في جزءين متعاكسين

مثال: $g(x)=2x^2$

$h(x)=-\frac{1}{2}x^2$



③ حالة خاصة $g(x)=f(ax+b)+\beta$

• في بعض الأحيان يمكننا انشاء (C_g) وذلك باستعمال التحويلين السابقين معا.

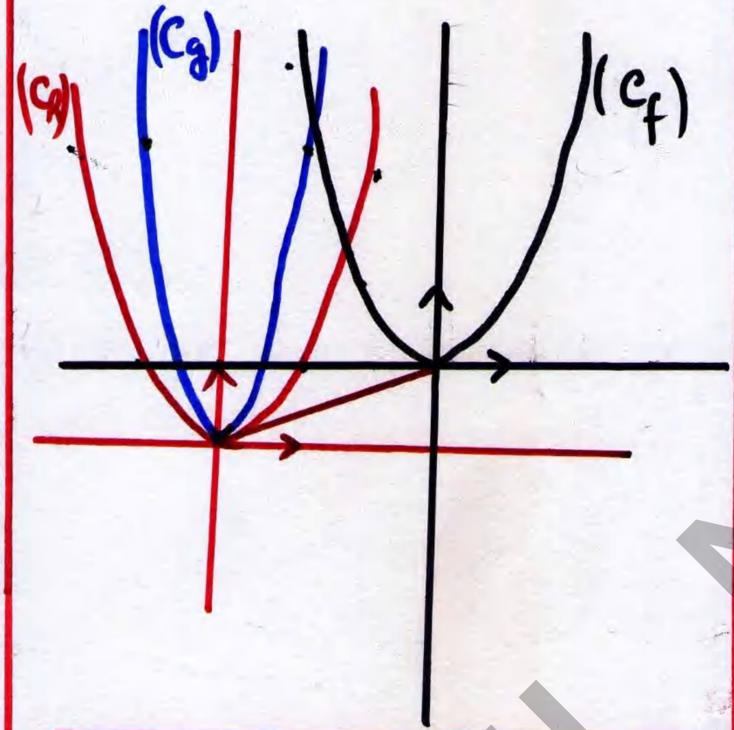
• مثال : $g(x)=4x^2+24x+32$

$g(x)=(2x+6)^2-4$

$g(x)=4\left[(x+3)^2-1\right]=4h(x)$

. انطلاقا من منحني الدالة مربع نسحب بشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ لنحصل على (C_h)

. انطلاقا من (C_h) ننشئ (C_g)



④ العبارة تتضمن قيمة مطلقة

$g(x)=f(x)$: تطابق

$g(x)=f(-x)$: تناظر بالنسبة لمحور التراتيب

$g(x)=-f(x)$: تناظر بالنسبة لمحور الفواصل

$g(x)=-f(-x)$: تناظر بالنسبة للمبدأ.

الخطوات :

* ندرس شفعية الدالة
* نتخلص من رمز القيمة المطلقة
* نختار مجال مناسب للدراسة ثم نرسم (Cg) على هذا المجال
- نناظر الجزء المرسوم

* حالة ① $g(x)=f(|x|)$

* g دالة زوجية ⇐ (Cg) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

$x\geq 0$: $g(x)=f(x)$

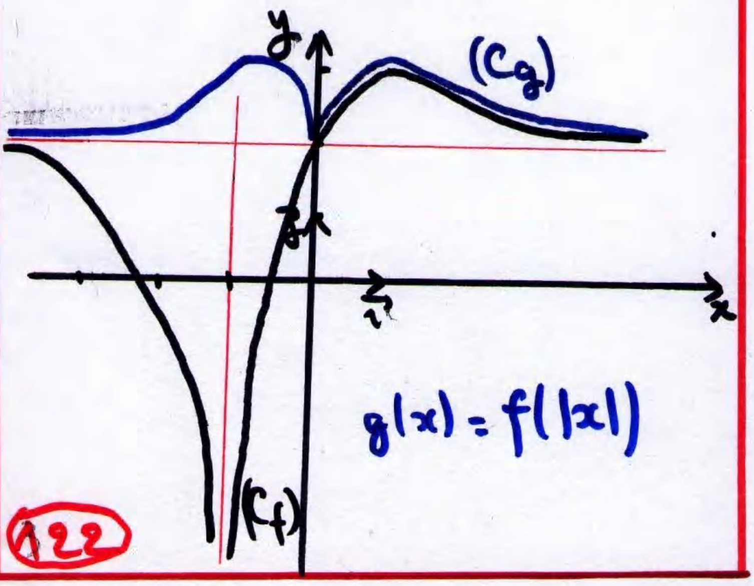
(Cg) يطابق (Cf) على هذا المجال

$x<0$:

← نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ (yy') من (Cg) ⇐ الشفعية

← أو: $g(x)=f(-x)$ اذن نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ (yy')

* مثال: $f(x)=\frac{2x^2+8x+2}{x^2+2x+1}$



حالة ② $g(x)=f(-|x|)$

* g دالة زوجية ⇐ (Cg) متناظر بالنسبة لـ (yy')

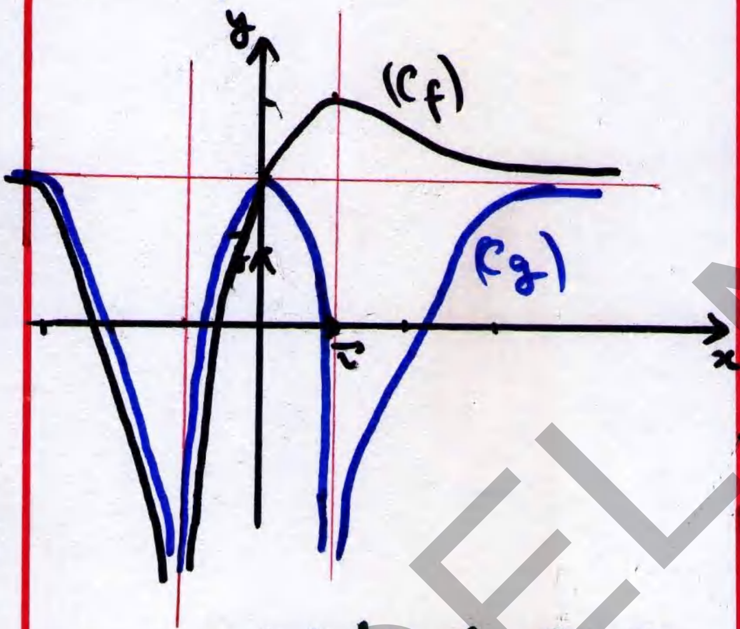
$x\leq 0$: $g(x)=f(x)$

(Cg) يطابق (Cf)

$x\geq 0$: نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ (yy')

المثال السابق:

$g(x)=f(-|x|)$



حالة ③ : $g(x)=|f(x)|$

$g(x)=|-f(x)|$

• لما $f(x)\geq 0$ ((Cf) فوق محور الفواصل)

$g(x)=f(x)$

(Cg) يطابق (Cf)

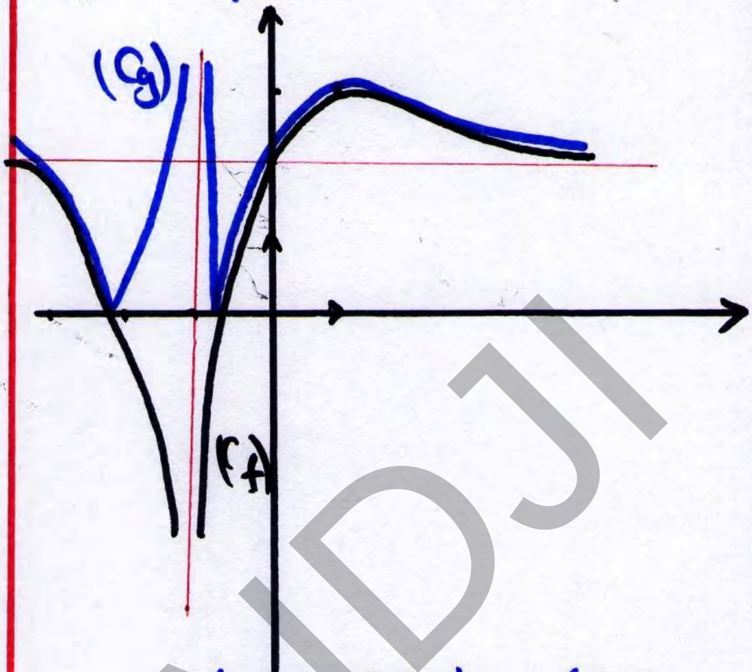
• لما $f(x)<0$ ((Cf) تحت (xx'))

$g(x)=-f(x)$

(Cg) يناظر (Cf) بالنسبة لمحور الفواصل

المثال السابق:

$g(x)=|f(x)|$



(C_g) هو ما فوق (xx')

$\boxed{g(x)=[f(x)]^n}$ /5

$$g'(x)=n\cdot f'(x)\cdot[f(x)]^{n-1}$$

* n فردي: اشارة $g'(x)$ من اشارة $f'(x)$ $\Leftrightarrow$ تغيرات g نفسها تغيرات f.

* n زوجي: اشارة $g'(x)$ من اشارة $f'(x)\cdot f(x)$

مثال:
لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب

$f(x)=-x^2-4x+5$

* تشكل جدول تغيرات f
* استنتج جدول تغيرات h / k حيث $k(x)=[f(x)]^2$ ، $h(x)=[f(x)]^3$

①

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−		−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	9	↘	0	↘	$-\infty$
signe $f(x)$		−	0	+		+	0	−	

$: h(x)=[f(x)]^3$

$h'(x)=3\cdot f'(x)\cdot f(x)^2$

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$h'(x)$		+		+	0	−		−	
$h(x)$	$(-\infty)^3=-\infty$	↗	0	↗	9^3	↘	0	↘	$(-\infty)^3=-\infty$

$k(x)=f(x)^2$

$k'(x)=2f'(x)\cdot f(x)$

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$k'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$k(x)$	$(-\infty)^2=+\infty$	↘	0	↗	9^2	↘	0	↗	$(-\infty)^2=+\infty$

اشارة $k'(x)$ نستنتج من الجدول ①

6/ بحساب $g'(x)$ ودراسة اشارتها

f دالة عددية معرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي:

x	-2		0	e^{-2}	4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	5	6	$\nearrow$	9

استنتج جدول تغيرات g , h , k

$g(x)=f(x^2)$

$h(x)=f(e^x)$; $D=]-2;+\infty[$

$k(x)=\sqrt{f(x)}$

$g(x)=f(x^2)$

$g'(x)=2x\,.\,f'(x^2)$

من أجل كل x من $]-2;+\infty[$:

$x^2\geq 0$

أي $f'(x^2)\geq 0$

لما $x=0$: $x^2=0$: $f'(x^2)=0$.

x	-2		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$f'(x^2)$		$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	6	$\searrow$	4	$\nearrow$	9

$g(+\infty)=f(+\infty)=9$

$g(0)=f(0)=4$

$g(-2)=f(4)=6$

$h(x)=f(e^x)$

$h'(x)=e^x\,.\,f'(e^x)$

من أجل كل $x\in]-2;+\infty[$; $e^x>0$

$f'(e^x)>0$

x	-2		0		$+\infty$
$h'(x)$			$+$		
$h(x)$	5	$\nearrow$	$f(1)$	$\nearrow$	9

$h(+\infty)=f(e^{+\infty})=f(+\infty)=9$

$h(-2)=f(e^{-2})=5$

$k(x)=\sqrt{f(x)}$

$$k'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

تغيرات k من تغيرات f.

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$\sqrt{+\infty}=+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{4}=2$	$\nearrow$	$\sqrt{9}=3$

تمارين

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+6x+12$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-1,48;-1,47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-6}{x^2+2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{x\,g(x)}{(x^2+2)^2}$،

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

5) نرمز بـ S الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=\alpha$، $x=0$ و $y=0$.

أثبت أنّ: من أجل كل $x\in[\alpha;0]$، $-3\le f(x)\le f(\alpha)$ ثم بيّن أنّ : $\dfrac{3}{2}\alpha^2\le S\le -3\alpha$.

الوحدة: الـدوال العددية

عـــادل نعيجـي

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) – لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}7<\alpha<0{,}8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) – نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ)

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f. (نأخذ $f(\alpha)\approx-0{,}1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h).

التمرين الرابع: (06 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ- أثبت أن الدالة f فردية.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=1+\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

جـ- ادرس تغيرات الدالة f .

2) أ- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

جـ- بيّن أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$، ثم استنتج معادلة المستقيم المقارب الآخر (d').

د- ارسم (d) و (d') و (C_f) في المعلم السابق.

3) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=|x|\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

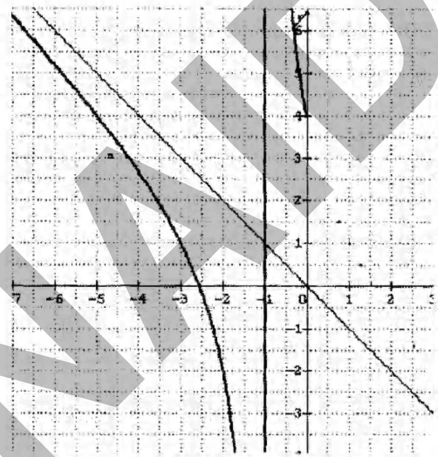
أ- بيّن أن الدالة g زوجية.

ب- انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I) f دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$

(c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.



1) أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها.

2) g دالة معرفة المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$

(c_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد تجانس.

أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) أدرس تغيرات g .

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to0\\ >}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to0\\ <}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أرسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k).

4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها:

$x=-\frac{1}{2}$ ، $x=\frac{1}{2}$ ، $y=0$

تمرين 4: (7 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي : $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

(C_f) منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدّالة f .

2) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y=x$.

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D).

3) أ- بيّن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1{,}3<x_0<1{,}4$.

ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحني (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التّراتيب.

جـ- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.

4) أوجد الدّالة الأصلية للدّالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير x .

5) g الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.

(C_g) منحنى الدّالة g في المعلم السابق.

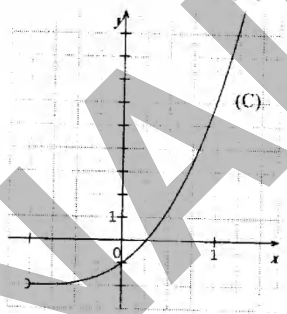
- بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثمّ ارسمه في نفس المعلم السّابق.

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=m^2$.

التمرين الرابع (07 نقط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي :

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$



1– أ) – بقراءة بيانية شكّل جدول تغيرات الدالة g و حدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب) علّل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2 – f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 – نأخذ $\alpha\simeq 0,26$

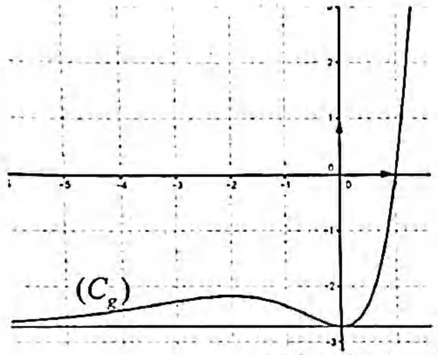
أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) ارسم المنحنى (Γ)

4- أ) أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق : $F(1)=2$

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^x-e$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (كما هو في الشكل المقابل).

– احسب $g(1)$.

– بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب النهايات الآتية: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) بيّن أنّ المنحنى (γ) الذي معادلته : $y=e^{-x}-2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ).

3) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا : $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$.

4) استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة: $x\mapsto e^x$ ثم ارسم بعناية كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

6) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

احسب العدد الحقيقي l حيث $l=A(0)+A(1)+\dots+A(2016)$

الوحدة : الدوال الأسية

عـــادل نعيجي

التمرين الرابع:(07 نقاط)

I) لتكن الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-2xe^{-x}$.

–ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)(1+2e^{-x})$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$ ثمّ استنتج معادلة لِ (Δ)، المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f).

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3) اثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

4) باستعمال المنحنى (C_f)، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتّى يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلّين مختلفين.

5) ليكن α عددا حقيقيا موجبا، نرمز بـ $\mathcal{A}(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات التي معادلاتها على الترتيب : $y=x+1$ ، $x=-1$ و $x=\alpha$.

– احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α ثمّ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

التمرين الرابع :(07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=1cm$.

I) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ ، (C) تمثيلها البياني .

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) أثبت أنّ المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما، احسب $f(-2)$ ، ثمّ ارسم المنحنى (C).

II) ليكن m وسيط حقيقي ، نعتبر الدّالة f_m المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_m(x)=(x^2+mx+1)\,e^{-x}$

وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أثبت أنّ جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثييها.

2) ادرس اتجاه تغير الدّالة f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدّالة f_m قيمتين حدّيتين يطلب تعيينهما.

3) M_m نقطة من المنحنى (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m=1-m$.

أثبت أنّه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فإنّ M_m تنتمي إلى منحن يطلب تعيين معادلة له.

4) ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، حيث $m\neq 2$ ، الوضعية النّسبية للمنحنيين (C) و (C_m).

5) احسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α ، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C) و (C_3) والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$ ، ثمّ احسب : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$.

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1–أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادلة له.

ب) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$

ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

2) اكتب معادلة (T)مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3) h الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$.

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0;+\infty[$.

4) ارسم المماس (T) والمنحني (C_f) على المجال $[0;+\infty[$.

5) نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب: $f(x)=m(x-2)$ ... (E)

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E).

6) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيّرات الدالة g .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة ، ثمّ احسب النهاية $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $h(x)\ge 0$، ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T).

2) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

تحقّق أنّ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$، ثمّ احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I- لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1- أ) احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب) بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$.

ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38<\alpha<-1,37$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II- لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2e^x}{e^x-x}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{xe^x g(x)}{(e^x-x)^2}$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f).

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2- أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) احسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$، ثمّ فسر النتيجة بيانيا.

ج) أنشئ المنحنى (C_f). (تعطى $f(\alpha)\simeq 0.29$)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّين في $\mathbb{R}$، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1,52<\alpha<-1,51$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول $1cm$).

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=-g(x)$. (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f).

ج) شكّل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$، (نأخذ $f(\alpha)\approx 0,38$).

د) عيّن دون حساب: $\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

د) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$.

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $]-2;+\infty[$.

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c حتّى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ) احسب التكامل التالي: $A(\lambda)=\int_0^\lambda h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما وفسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) φ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاً α يختلف عن 1 ثم تحقّق أنّ: $2{,}79<\alpha<2{,}80$.

3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

3) ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب) ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

ج) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t)\,dt$.

د) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$.

III) 1) احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم. ($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n=f^{(n)}(1)$.

أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع : u_k+u_{k+1}.

ب) استنتج بدلالة n ، المجموع : $u_1+u_2+\ldots+u_{2n}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=(x+2)e^x-2$.

1) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيراتها .

3) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^x$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $0{,}92<\alpha<0{,}93$ و $-1{,}56<\beta<-1{,}55$.

ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$

4) أ) بيّن أنّ الدالة: $x\mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$ (حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال 3) أ)).

ج) جد حصرا للعدد A .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقّق أنّ : $0{,}36<\alpha<0{,}37$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب) استنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0{,}1$.

6) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرّفة بـ : $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2) احسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$.

ب) استنتج أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$، يُطلب تعيين معادلة له.

5) g الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

6) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)>x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

جـ) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

7) (u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$.

ب) حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ عيّن $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

8) m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغيّر الحقيقي x المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ:

$$h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$$

أ) احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m.

ب) باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x)=0$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) عيّن نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن $1,27<\alpha<1,28$

ب) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدّد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

جـ) أرسم (T) و (C_f)

4) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^x-(m-1)e^m=-1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(|x|+1)e^{-|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني

أ) بيّن أنّ الدالة h زوجية.

ب) ارسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

6) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(ax+b)e^x$ حيث: a، b عددان حقيقيان

عيّن a، b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $g'(x)=f(x)$

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(2-x)e^x-1$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) بيّن أنّ للمعادلة: $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1,2<\alpha<-1,1$ و $1,8<\beta<1,9$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ وفسّر النتيجتين هندسيا .

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

4) احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f)

5) λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

أ) احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-1]\,dx$

ب) احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) احسب $f'(x)$. بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جِد حصرا للعدد α.

4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C)، ثمّ ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty;1[$، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$، ثمّ بيّن أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

التمرين الثالث: (07 نقاط)

I- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=-4+(4-2x)e^{x}$.

1- ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1{,}59<\alpha<1{,}60$.

3- استنتج إشارة $g(x)$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^{x}-2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$).

1- بيّن أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتاهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-2x)^{2}}$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

جـ) احسب $f(1)$، ثم استنتج، حسب قيم x، إشارة $f(x)$.

3- أ) بيّن أنّ: $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$، حيث α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء I.

ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

جـ) ارسم (C_f).

4- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x-2=(e^{x}-2x)(m+1)$.

5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=[f(x)]^{2}$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة h.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I- الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^{2}-1)e^{-x}$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. (**نأخذ:** $g(1-\sqrt{2})\simeq-0{,}25$ و $g(1+\sqrt{2})\simeq1{,}43$)

2. أ - بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حليّن في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر α، حيث: $-0{,}8<\alpha<-0{,}7$.

ب - استنتج إشارة $g(x)$؛ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II- الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^{2}e^{-x}$

$(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\ cm$)

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$، مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

جـ - ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2. أ - بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$. (يرمز f' إلى الدالة المشتقة للدالة f)

ب - شكّل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (**نأخذ:** $f(\alpha)\simeq-0{,}9$)

3. أ - بيّن أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب - مثّل (Δ) والمماسين والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

جـ - ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x: $(x+1)^{2}+me^{x}=0$.

4. الدالة H معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x)=(-x^{2}-4x-5)e^{-x}$.

أ - بيّن أن H دالة أصلية للدالة: $x\mapsto(x+1)^{2}e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب - احسب بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

III- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

(تذكّر أنّ العدد α يحقّق $g(\alpha)=0$)

1. برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1\le u_n\le\alpha$.

2. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

3. استنتج أنّ (u_n) متقاربة، ثمّ احسب نهايتها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-xe^x$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- تحقق أنّ $0,5<\alpha<0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^x-x-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x)=-g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تُدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

4) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,6<x_1<-1,5$ و $1,5<x_2<1,6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^x$.

أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^x$.

1) ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن: $0,8<\alpha<0,9$.

3) عيّن، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x+2}{e^x+2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول $2cm$).

1) بيّن أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بيّن أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ)، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

4) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب- بيّن أن: $f(\alpha)=\alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5- ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f).

6- ناقش، بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

III) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le U_n<\alpha$.

2) باستعمال (Δ) و (C_f) مثّل على محور الفواصل الحدود: U_0 ، U_1 و U_2، ثم خمّن اتجاه تغير (U_n).

3) برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

التمرين الثالث: (07.5 نقطة)

أ) f الدّالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=3-\frac{4}{e^{x}+1}$$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة f.

2- عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

3- بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة لمماس (C_f) عندها.

4- لتكن g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.

أ- ادرس تغيّرات الدّالة g.

ب- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2{,}7<\alpha<2{,}8$

5- أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=0$.

ب- ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$ والمنحنى (C_f).

ب) (U_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $U_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$

1- باستخدام (C_f) والمستقيم (Δ) مثّل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل.

2- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n فإن: $1\leq U_n<\alpha$.

3- بيّن أنّ المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4- استنتج أن (U_n) متقاربة و بيّن أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x}-ex-1$.

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب - احسب $f'(x)$ ثمّ ادرس إشارتها.

جـ - شكّل جدول تغيرات الدالة f.

2. أ - بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

ب - اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

جـ - بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1{,}75;1{,}76[$ حلا وحيدا α.

د - ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]-\infty;2]$.

3. أ - احسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

ب - أثبت أنّ : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^{2}-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات).

التمرين الثالث: (07 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

ليكن (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$ من أجل كلّ x من $\mathbb{R}^*$
2. احسب نهايات الدّالة f عند أطراف مجالات تعريفها.
3. بيّن أنّ f متزايدة تماما على كلّ مجال من مجالي تعريفها ثمّ شكل جدول تغيراتها.
4. أ - (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+\frac{4}{3}$.
بيّن أنّ (D) و (D') مقاربان للمنحنى (C_f) ، ثمّ حدّد وضعيته بالنسبة لكل منهما.
ب - بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,9<x_0<0,91$
و $-1,66<x_1<-1,65$
جـ - احسب من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم $f(x)+f(-x)$.
فسّر النتيجة هندسيا.
د - ارسم (D) و (D') و (C_f) .
هـ - m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرّف بالمعادلة $y=x+m$.
ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$
5. نعتبر الدّالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يأتي: $g(x)=[f(x)]^2$
ادرس تغيّرات الدّالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(3x+4)e^x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ أ) احسب f'، f'' ثم برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن:
$f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^x$ حيث: f'، f''، ...، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f
ب) استنتج حل المعادلة التفاضلية : $y''=(3x+16)e^x$

2/ أ) بيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ وفسر النتيجة هندسيا
ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ أ) اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ω التي فاصلتها $\dfrac{-10}{3}$.
ب) بين أن ω هي نقطة انعطاف المنحنى (C_f)
جـ) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty;0]$.

4/ أ) x عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0]$، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية
للدالة f على المجال $]-\infty;0]$.
ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\dfrac{4}{3}$
احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي
معادلاتها: $y=0$، $x=-\dfrac{4}{3}$ و $x=\lambda$، ثم جد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ وفسّر هندسيا النتيجة.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+1$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$

ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)؟

جـ) ارسم (Δ)، (Δ') ثم المنحنى (C_f).

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)\,e^{-x}=m$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(3-x)e^x-3$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82<\alpha<2,83$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ ، اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند المبدأ O.

2) أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بيّن أنه من أجل $x\neq 0$ فإن: $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$.

جـ) تحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ ثم عين حصرا له.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f.

3) احسب $f(x)+x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x\mapsto -x^3$

بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$ وفسر النتيجة هندسيا.

4) أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و (C_f).

التمرين الثالث: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \dfrac{2}{e^{x}+1}$

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. احسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثمّ استنتج أنّ النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$
2. ادرس تغيّرات الدّالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ استنتج جدول تغيّراتها على $\mathbb{R}$.
3. بيّن أنّ المستقيم ذي المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

   احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$ ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$.
4. بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$
5. ارسم $(\mathcal{C}_f)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$
6. بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = x + \dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$
7. احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات ذات المعادلات :

   $x=\alpha$ و $x=0$ و $y=x+2$

   بيّن أنّ $\mathcal{A}(\alpha)=2\ln(-\alpha)$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $\mathcal{A}(\alpha)$

التمرين الرابع (07,5 نقط)

I – نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=(ax+b)\,e^{-x}+1$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II – نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=(-x-1)\,e^{-x}+1$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا.(نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها.

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

هـ) ارسم (C_g).

و) H الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يأتي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي:

$$k(x)=g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

تمرين 4: (7 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$ و C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 – ادرس تغيرات الدالة f .

2 – بين أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω و اكتب معادلة لمماس C_f عند النقطة ω .

– اثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى C_f .

3– احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$.

– استنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما .

4– بين أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77\,;-2,76[$.

– احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تُدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم C_f ومستقيميه المقاربين.

II) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=-x+3-\dfrac{4}{e^x+1}$ ، C_g منحنى الدالة g .

1– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=f(-x)$.

– استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

2– أنشئ في نفس المعلم السابق C_g (دون دراسة الدالة g) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر f الدالة العددية المعرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{1}{2}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين بيانيا.

2) أ) بيّن أنّ: من أجل كل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$.

4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها، ثمّ انشئ (C_f).

II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $g(x)=2[-x+\ln(2x+1)]$.

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g.

أ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,2<\alpha<1,3$

ب) استنتج إشارة $g(x)$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

- أثبت أن: من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

الوحدة: الدوال اللوغاريتمية

عـــادل نعيجي

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+2-\ln x$.

ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$.

1) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $f'(x)=\frac{-g(x^2)}{2x^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

2) أ) احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x)+f(x)$ ، ثمّ فسّر النّتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$.

جـ) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب لـ(C_f) ثمّ ادرس وضعية (C_f) بالنّسبة إلى (Δ).

4) أ) أثبت أنّه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثمّ جد معادلة لكلّ منهما.

ب) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

حيث $2<\alpha<2{,}1$ و $-0{,}5<\beta<-0{,}4$.

5) ارسم المماسين والمستقيم (Δ) ثمّ المنحنى (C_f).

6) باستعمال المنحنى (C_f)، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتّى تقبل المعادلة $x(e-2m)=\ln(x^2)$ حلاً وحيدا.

7) نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها

$x=\alpha$ ، $x=1$ و $x+2y=e$.

تحقّق أنّ: $A(\alpha)=\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2 cm^2$.

التمرين الرابع :(07 نقاط)

لتكن الدالة العددية f المعرّفة على D_f حيث $D_f=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب النهايتين : $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ ، $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين بيانيا.

ب) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من D_f، $f'(x)=-2-\frac{2}{(x-1)(x-2)}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) تحقق أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $(3-x)\in D_f$ و $f(3-x)+f(x)=0$.

ب) استنتج أنّ (C_f) يقبل مركز تناظر يُطلب تعيين إحداثيه.

4) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,45;0,46[$ ثم استنتج أنّها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له.

5) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f)، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

6) ارسم (Δ) و (C_f).

7) بيّن أنّ الدالة: $h:\ x\mapsto(x-1)ln(x-1)-(x-2)ln(x-2)$ أصلية للدالة $x\mapsto ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على $]2;+\infty[$.

ثم احسب بدلالة β مساحة الحيّز المستوي المُحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y=-2x+3$ ، $x=\beta$ و $x=3$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ،

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا.

2) احسب النهايات التالية : $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$، $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8<\alpha<1,9$.

5) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

6) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

7) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,76\,;1,77[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x-\ln x} & ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 على اليمين ،

ثم احسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$.

3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x-\ln x$

أ) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $h(x)>0$ ،

واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.

ب) ارسم (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)\approx 2,31$)

5) لتكن الدالة F المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

– بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\geq 1$ ، $\frac{1}{x}+1\leq f(x)\leq f(\alpha)$.

– اعط تفسيرا هندسيا للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصرا له.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-x\ln x$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث : $3,5<\alpha<3,6$.

3) استنتج إشارة العبارة $g(x)+1$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$، حيث: $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=4cm$.

1) بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=0$ و $y=0$.

2) أ- برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$.

ب- بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha[$ و متناقصة تماما على $]\alpha;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

جـ- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

د- احسب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، فسّر النتيجة هندسيا.

التمرين الرابع:(07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث: $0,4<\alpha<0,5$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+(x-1)\ln(x+1)$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و فسّر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

ب- بيّن أنّ: $f(\alpha)=-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}$ ثمّ أعط حصرا لـ $f(\alpha)$. (تُدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

3) ليكن a عدد حقيقي من المجال $]-1;+\infty[$، نسمي (T_a) مماس المنحنى (C) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ عند النقطة ذات الفاصلة a .

نضع من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h(x)=f(x)-[f'(a)(x-a)+f(a)]$.

أ- تحقّق أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $h'(x)=f'(x)-f'(a)$.

ب- باستعمال اتجاه تغيّر الدالة g ، عيّن إشارة $h'(x)$ حسب قيم x واستنتج اتجاه تغيّر h على $]-1;+\infty[$.

جـ- حدّد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (T_a) .

4) أ- بيّن أنّه يوجد مماسان (T_a) يشملان النقطة $A(1;0)$ يطلب تعيين معادلتيهما.

ب- ارسم المماسين والمنحنى (C) .

5) نعتبر الدالة H المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $H(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$.

أ- بيّن أنّ الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x-1)\ln(x+1)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=1$ و $x=2$.

3) أ- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$.

ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تُدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

جـ- ارسم (C_f) .

4) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي:

$x^2+x-2m(x+1)=\ln(x^2)$ ... (E) .

أ- تحقّق أنّ المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}x-m$.

ب- عيّن بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلّين متمايزين.

5) h هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x)=\frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ و (C_h) منحناها البياني في المستوي.

أ- بيّن أنّ الدالة h زوجية.

ب- ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$.

(حيث العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1- ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2- بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث : $-0,34<\alpha<-0,33$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$.

II- لتكن الدالة f المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$. (f' هي مشتقة الدالة f).

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

د) ارسم المنحنى (C_f). (نقبل أنّ: $f(\alpha)\simeq 3.16$)

2- أ) بيّن أنّ الدالة: $x\mapsto \dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما على التوالي: $x=0$ و $x=1$.

3- نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ بـ: $k(x)=f(-|x|)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ الدالة k زوجية.

ب) بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم ارسمه (دون دراسة تغيّرات الدالة k).

ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $k(x)=m$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

2) احسب $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

ب - شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

4) أ - بيّن أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y=x-1$ معادلة له.

ب - ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثمّ المنحنى (C).

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له.

أ - تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m).

ب - ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx-m$.

7) أ - جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب - احسب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C) ، المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي ($n>1$).

جـ - عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإنّ : $I_n>2$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+x^2+2\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]0,52\,;\,0,53[$ حلاً وحيدا α.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+\dfrac{3+2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

ج) تحقّق أنّ : $f(\alpha)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ ثم عيّن حصرا له.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ).

ج) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

4) نقبل أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث:

$0,22<x_0<0,23$ و $2,11<x_1<2,13$

أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f).

5) m وسيط حقيقي . ناقش بيانيا و حسب قيم m، عدد حلول المعادلة : $3+2\ln x-mx=0$.

III) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x\right]dx$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$.

2) أعط تفسيرا هندسيا للعدد u_0 .

3) احسب u_n بدلالة n.

4) نضع: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$. احسب S_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I) h الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بما يلي : $h(x)=(x+2)^2+2-2\ln(x+2)$.

1) احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} -2} h(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة h ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3) استنتج أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$ ، $h(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$(وحدة الطول $1cm$).

1) احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ، ثمّ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-2;+\infty[$: $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+2)^2}$

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-2;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4) أ) اثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثييها.

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) .

جـ) احسب بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=-1$ و $x=1$.

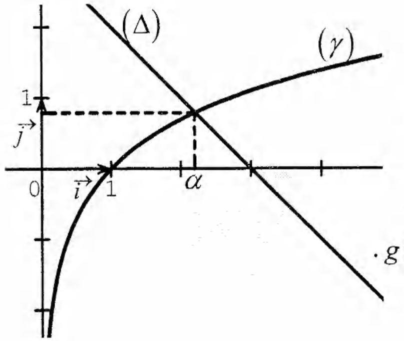
III) g الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $g(x)=|x+1|+\frac{2}{x+2}|\ln(x+2)|$

1) احسب $\lim_{x \xrightarrow{<} -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ ؛ ماذا تستنتج بالنسبة إلى g؟

2) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

3) انطلاقا من المنحنى (C_f) ارسم المنحى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .

1) بقراءة بيانية حدّد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقّق أنّ: $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ؛ ثمّ أنشئ (C_f) على المجال $]0;e^2]$.

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقّق: $F(1)=-3$.

1) بيّن أنّ منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أنّ $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ؛ ثمّ استنتج عبارة الدالة F .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرّفة بـ : $f(0)=1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f(x)=1-x^2\ln x$.

$(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f الممثل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

ب) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)-1}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

ب) تحقّق أنّ $1{,}531<\alpha<1{,}532$

4) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$.

$(\mathcal{C}_g)$ المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) ادرس شفعية الدالة g .

ب) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ على المجال $[-2;2]$.

5) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ ، والتي تنعدم من أجل القيمة 1.

6) t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha]$. نضع $F(t)=\int_t^{\alpha} f(x)dx$.

أ) اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0;\alpha]$ ، $F(t)=\dfrac{-3t\,f(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$.

جـ) احسب $\lim\limits_{t \xrightarrow{>} 0} F(t)$.

7) m عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha]$.

$\mathbb{S}(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O ونصف القطر m.

نفرض أنّ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_g)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما على الترتيب: $x=-\alpha$ و $x=\alpha$ ، هي: $\mathcal{A}$ حيث: $\mathcal{A}=\dfrac{2}{9}\left(\alpha^3+6\alpha\right)ua$

(ua وحدة المساحات).

أ) عيّن القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $\mathbb{S}(m)=2\mathcal{A}$.

ب) علماً أنّ $3{,}140<\pi<3{,}142$ أعط حصرًا للعدد m .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

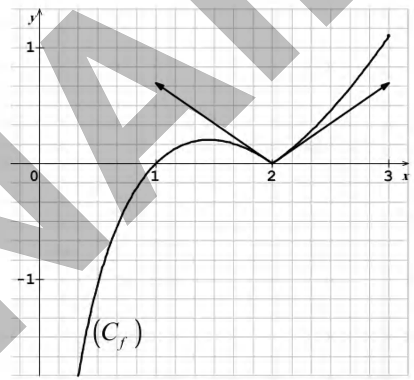
المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

I) g الدالة المعرفة على المجال $]0;3]$ بـ: $g(x)=x\ln x+x$

1) أدرس تغيرات الدالة g

2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;3]$ ثم تحقق أن $1,45<\alpha<1,46$

ب) استنتج إشارة $g(x)-2$



II) التمثيل البياني المقابل (C_f) هو للدالة f المعرفة على المجال $]0;3]$ بـ: $f(x)=|x-2|\ln x$

1) باستعمال (C_f) ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند 2

2) أثبت صحة تخمينك.

3) أدرس تغيرات الدالة f

III) h الدالة المعرفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي: $h(x)=(2-\cos x)\ln(\cos x)$

1) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h)؛ حيث (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h

2) أدرس اتجاه تغير الدالة h، ثم شكل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h)

التمرين الرابع: (06 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$؛ فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

جـ) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I- الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x$.

1) ادرس تغيرات g.

2) بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $1+(x-1)e^x \geq 0$.

II- الدّالة f معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x} \; ; x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1- أ) بيّن أنّ f مستمرة على $[0;+\infty[$.

ب) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2- أ) تحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

III- n عدد طبيعي حيث $n\geq 1$؛ f_n الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$.

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على $]0;+\infty[$.

2- احسب $\lim_{x\to 0} f_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

4- بيّن أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتيها.

5- أ) بيّن أنّه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1)<0$ ، ثمّ برهن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

6- أ) بالاعتماد على الجزء II؛ بيّن أنّه، من أجل كل x من $]0;1]$: $\dfrac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

ب) استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$: $\ln(\alpha_n)\geq\dfrac{1-e}{n}$ ، ثمّ $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

جـ) جد نهاية المتتالية (α_n).

التمرين الرابع: (05.5 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) ادرس تغيرات الدالة f

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبري).

ج) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم (C_f) على المجال $]0;e^2]$

2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=1-\ln x$

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) ادرس تغيرات الدالة g

ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم ارسم (C_g) على المجال $]0;e^2]$

3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$

أ) احسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية للدالة : $x\mapsto(\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$

ب) احسب العدد: $\int_{\frac{1}{e}}^{e}[f(x)-g(x)]dx$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- الدّالة g معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأن:

$$\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$$

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II - الدّالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$.

3) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

4) بيّن أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) مثّل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.

III- (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1) أثبت أنّ المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

2) الدّالة k معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ) بيّن أنّ للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

جـ) بيّن أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الطول $2cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة : $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I – 1. الدالة u معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$.

أ - ادرس اتجاه تغيّر الدالة u.

ب - بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x-e>3x-4$.

2. الدالة v معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$.

أ - بيّن أنّ: $v'(1)=0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v)

ب - أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x)\le 0$.

جـ - استنتج، أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$.

3. أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$.

II – الدالة f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب: $\lim_{x\to 0^{+}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3. احسب $f(1)$، ثمّ مثّل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left]0;\frac{5}{2}\right]$.

(نأخذ: $f(2)\approx 2,3$ ، $f(1,64)\approx 1$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)\approx 5,75$).

4. احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- g هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+a+b\ln(x)$ حيث a و b عددان حقيقيان.

1- عيّن a و b علما أن التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4.

2- نضع $a=-2$ و $b=2$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;+\infty[$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II- f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2-\frac{2\ln(x)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

1- أ) احسب $\lim_{x\to 0^{+}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) احسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أنّ: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ج) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

2- أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x-2$ مقارب لـ(C_f)، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

ب) بيّن أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)، ثم جِد معادلة له.

ج) نأخذ $\alpha=1,25$. بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث:

$0,6<x_1<0,7$ و $2,7<x_2<2,8$ ، ثم ارسم كلا من (Δ)، (T) و (C_f).

3- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $(m+2)x+2\ln(x)=0$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بيّن أنّ المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها.

7) لتكن g الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

بيّن أنّ g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) g هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $g(x)=2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8<\alpha<-0,7$.

3) عيّن، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب- عيّن إشارة $h'(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h.

II) f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;3]$، $f'(x)=\frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب- بيّن أن: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصرا لـ $f(\alpha)$.

جـ- احسب $f(3)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) أ- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;3]$ فإن: $x-\ln(x+1)\geq 0$.

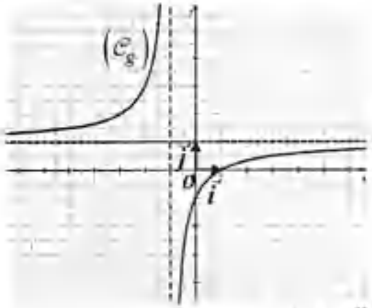
ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

5) ارسم (T) ، (T') و (C_f).

6) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل) ، بقراءة بيانية:

أ - شكل جدول تغيرات الدالة g.

ب - حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ - عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2. أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

ب - احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ - باستعمال الجزء I) السؤال جـ ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب - α عدد حقيقي.

بيّن أنّ الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جـ - تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{a+b\ln 2x}{4x^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان و (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ عيّن a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ للمنحنى (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل.

2/ g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{1+2\ln 2x}{4x^2}$ و (C_g) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} g(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

جـ) حل في $]0;+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$.

د) أنشئ (C_g).

3/ أ) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{1+\ln 2x}{2x}$ ، احسب $h'(x)$.

ب) تحقق أن: $g(x)=\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{\ln 2x}{2x^2}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+\ln x^2-1$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$

2/ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(1-\frac{1}{x^2})\ln x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ/ بين أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x$ ، ماذا تستنتج ؟
- ارسم (δ) و (C_f).

3/ أ/ x عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$

- تحقق أن: $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]1;+\infty[$.
- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

ب/ α عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=\alpha$ ، ثم احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x-1-2\ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول هي $4cm$.

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2- أ- بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة g.

جـ- احسب $g(1)$.

د- برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث: $3{,}5<\alpha<3{,}6$

هـ- استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=-x^2+x+x^2\ln x \;;\; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

جـ- بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$، واستنتج اتجاه تغير الدالة f.

د- شكل جدول تغيرات الدالة f، بين أن: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

4- ارسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0;3]$.

التمرين الثالث: (10 نقاط)

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$f(x) = \ln(x + a) + b$ حيث: a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ln ثم ارسم (C) و (C_f) .

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) احسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ حلا وحيدا α.

تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ في المعلم السابق.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d).

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; \alpha[$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1; \alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$.

2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

1. g دالة معرّفة على $]1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x + \ln x$

أ) احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

ج) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ فإن $g(x) \neq 0$.

2. لتكن f دالة معرّفة على $]1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{6\ln x}{2x + \ln x}$

أ) بيّن أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{6\frac{\ln x}{x}}{2 + \frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x \in [1, +\infty[$.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f

د) شكل جدول تغيّرات f ، ما هي قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متمايزين؟

هـ) جد معادلة للمماس (Δ_1) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 1 حيث $(\mathscr{C}_f)$ يرمز إلى التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3. نعتبر الدّالة h المعرّفة على $]1; +\infty[$ بالعبارة: $h(x) = f(e^x)$ و $(\mathscr{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) شكل جدول تغيّرات الدّالة h.

ب) جد معادلة للمماس (Δ_2) للمنحنى $(\mathscr{C}_h)$ عند النقطة التي فاصلتها 1.

ج) ارسم كلا من (Δ_1) ، (Δ_2) ، $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_h)$ في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول:

h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$

1. أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: لتكن f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

ب) باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

جـ) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

د) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
3. بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و3,4 .
4. أرسم (C_f).
5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

$y=x-1$ ؛ $x=0$ و $x=1$.

ADEL NAIDJI / BAC 2018 MATHEMATIQUES / SERIE EXTRAITE DU BAC ALGERIEN / CHAPITRE : << FONCTIONS LOGARITHMES >>

تم بحمد الله...

نـجاحكم هدفنا