



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

5

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 25

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ مبينا المستقيبات المقاربة لـ (C_f) .

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) m عدد حقيقي موجب تاما.

لتكن النقط A_m ذوات الفاصلة m ، والمستقيم (T_m) مماس (C_f) في النقط A_m .

أ/ اكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m) .

ب/ عين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0; 0)$.

ج/ اكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها.

3) مثل بيانيا المستقيمات (T_m) والمنحني (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{(\ln|x|)^2}{x}$$

4) بيّن أن الدالة g فردية.

5) بيّن أنه يمكن رسم (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه.

(I)

1) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right] = +\infty$$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right]$$

نضع $t = \ln x$ أي $e^t = x$ نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^2}{e^t} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^n}{e^t} \right] = 0 \text{ لأن}$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $x = 0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

- دراسة $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(2 \frac{1}{x} \ln x\right)(x) - (\ln x)^2}{x^2} \\ &= \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} \\ &= \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا: $x^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

$$\begin{aligned} 1) \ln x = 0 &\Rightarrow x = 1 \\ 2) 2 - \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = 2 \\ &\Rightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$2 - \ln x$	+		0	-
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$	0	$4e^{-2}$	0

(2) أ/ كتابة معادلة المماس (T_m):

$$\begin{aligned}
 (T_m): y &= f'(m)(x - m) + f(m) \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) (x - m) + \frac{(\ln m)^2}{m} \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x - \frac{(2 - \ln m) \ln m}{m} + \frac{(\ln m)^2}{m} \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x + \frac{2(\ln m)^2 - 2 \ln m}{m} \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x + \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m}
 \end{aligned}$$

ب/ تعيين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0; 0)$:

(T_m) يشمل المبدأ معناه:

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) (0) + \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} \\
 &\Rightarrow \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} = 0 \\
 &\Rightarrow 2 \ln m (\ln m - 1) = 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 2 \ln m = 0 \\ \ln m - 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \ln m = 0 \\ \ln m = 1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = e \end{cases}
 \end{aligned}$$

ج/ كتابة معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها:

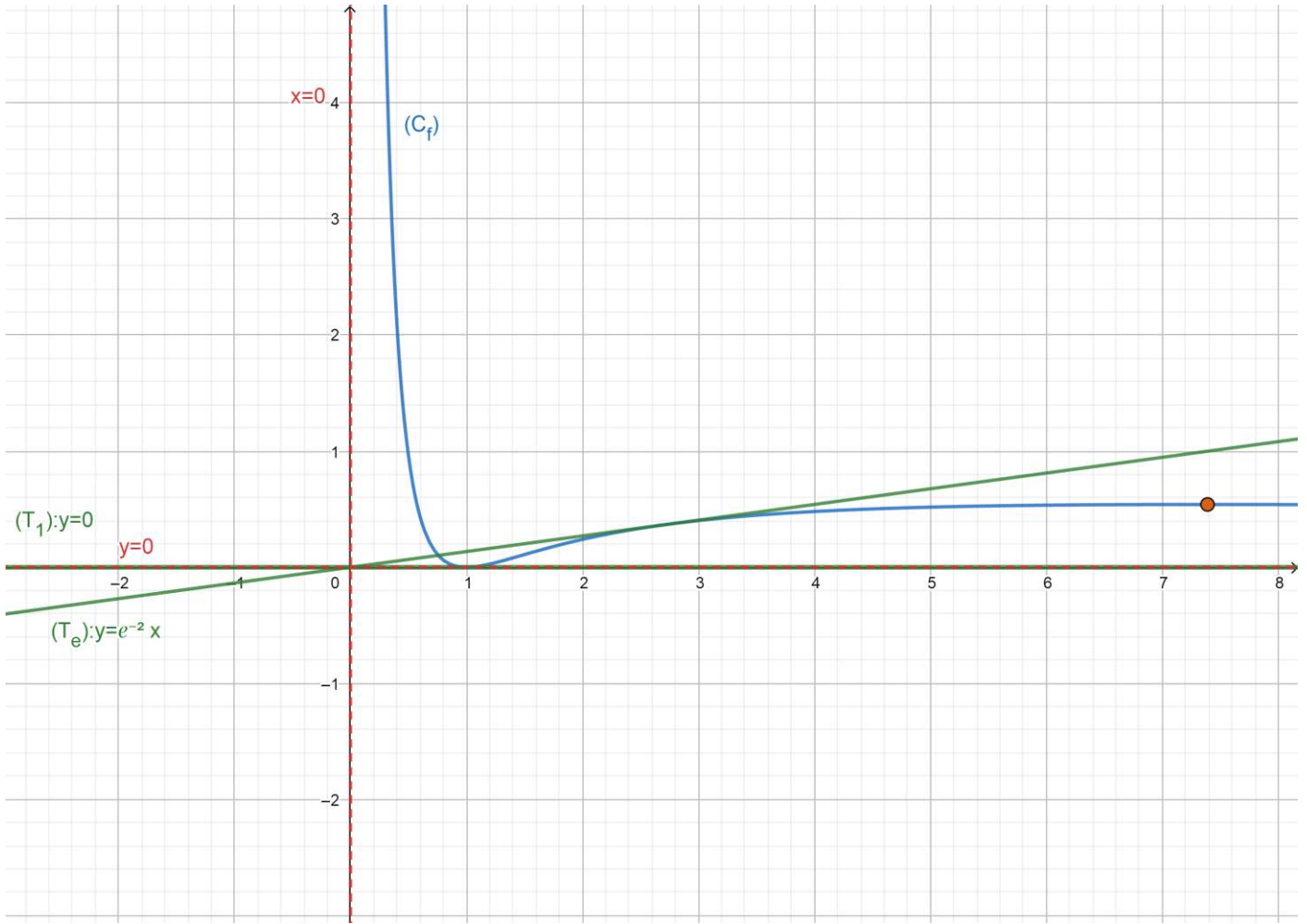
$$\begin{aligned}
 (T_1): y &= 0x + 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (T_e): y &= \left(\frac{(2 - 1) \times 1}{e^2} \right) x + \frac{2(1 - 1)}{e} \\
 &= \frac{1}{e^2} x \\
 &= e^{-2} x
 \end{aligned}$$

(3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمتين المقاربتين: $x=0$ و $y=0$
- نعين النقطة الحدية ذات الاحداثيات $(e^2; 4e^{-2})$
- نرسم المماسين: (T_e) و (T_1)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(II)

4 تبين أن الدالة g فردية:



دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية):

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \quad \text{لتبيين أن الدالة } f \text{ فردية} \quad \text{نبين أن}$$

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \quad \text{لتبيين أن الدالة } f \text{ زوجية} \quad \text{نبين أن}$$

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(\ln|-x|)^2}{-x} \\ &= -\frac{(\ln|x|)^2}{x} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة g فردية.

5) تبين أنه يمكن رسم (C_g) منحنى الدالة g انطلاقاً من (C_f) :

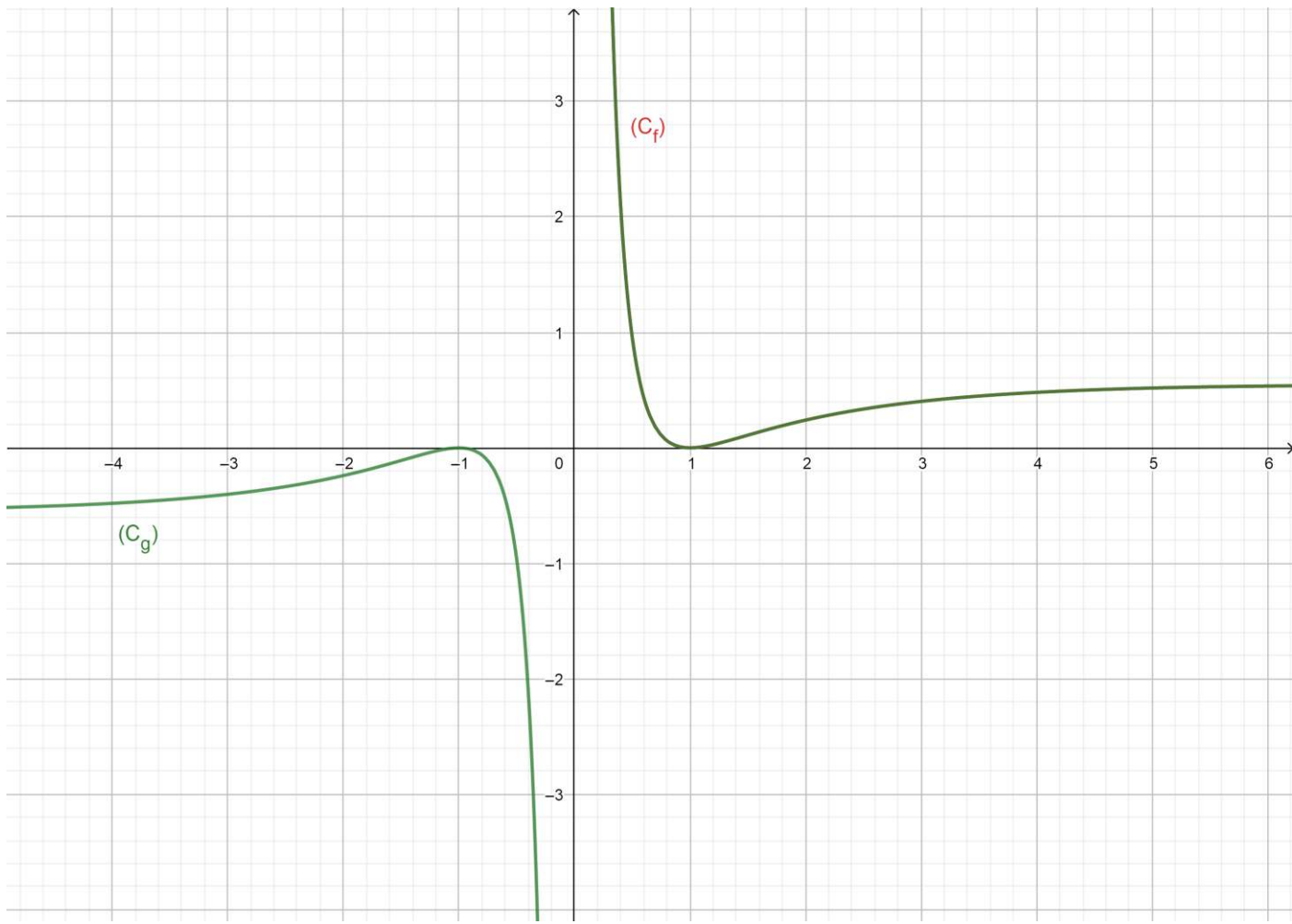
لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ \frac{(\ln(-x))^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ -\frac{(\ln(-x))^2}{-x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$: (C_g) ينطبق على (C_f)

ولما $x < 0$: (C_g) يناظر (C_g) بالنسبة للمبدأ

- تمثيل (C_g)



◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶