

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسياً.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

(4) أ- بين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4 - x) \in D_f$.

ب- بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) .

(5) مثل بيانياً المنحنى (C_f) .

(1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

لدينا إشارة المقام كالآتي:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
(x^2-4x+3)	$+$	0	$-$	0	$+$

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} \right) = 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} \right) = 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right) = \frac{1}{0} = +\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 0^+$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right) = \frac{1}{0} = -\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 4x + 3) = 0^-$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right) = \frac{1}{0} = -\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 3) = 0^-$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right) = \frac{1}{0} = +\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 4x + 3) = 0^+$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $y = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$
- $x = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$

(2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها

أولا: نحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(3x - 12)(x^2 - 4x + 3) - (2x - 4)(3x^2 - 12x + 10)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$= \frac{-2x + 4}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

ثانيا: ندرس إشارة $f'(x)$

لدينا $(x^2 - 4x + 3)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x + 4)$

لدينا: $-2x + 4 = 0$

ومنه $-2x = -4$

ومنه $x = 2$

ثالثا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	3	$+\infty$	2	$-\infty$	3

(3) إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

مع محور الترتيب:

▶ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الترتيب نحسب $f(0)$ ◀

$$f(0) = \frac{3(0)^2 - 12(0) + 10}{(0)^2 - 4(0) + 3} = \frac{10}{3}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{10}{3} \right) \right\}$$

مع محور الفواصل:

▶ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ◀

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x + 10 \dots (1) \\ \text{و} \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

نحل (1) نجد:

$$\Delta = (-12)^2 - 4(3)(10) = 24$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 - \sqrt{24}}{6} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + \sqrt{24}}{6} \end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ \left(\frac{12 - \sqrt{24}}{6}; 0 \right), \left(\frac{12 + \sqrt{24}}{6}; 0 \right) \right\}$$

4 أ- تبين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4 - x) \in D_f$:

لدينا $x \in D_f$ ومنه: $x \in]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

ومنه: $x \in]3; +\infty[$ أو $x \in]1; 3[$ أو $x \in]-\infty; 1[$

ومنه: $x > 3$ أو $1 < x < 3$ أو $x < 1$

ومنه: $-x < -3$ أو $-3 < -x < -1$ أو $-x > -1$

ومنه: $4 - x < 1$ أو $1 < 4 - x < 3$ أو $4 - x > 3$

ومنه: $(4 - x) \in]-\infty; 1[$ أو $(4 - x) \in]1; 3[$ أو $(4 - x) \in]3; +\infty[$

إذن: $(4 - x) \in]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

ب- تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) :

تذكير

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

أولا نثبت أن $(2(2) - x) \in D_f$

من السؤال السابق لدينا: $(4 - x) \in D_f$

ثانياً نثبت أن $f(2(4) - x) = f(x)$

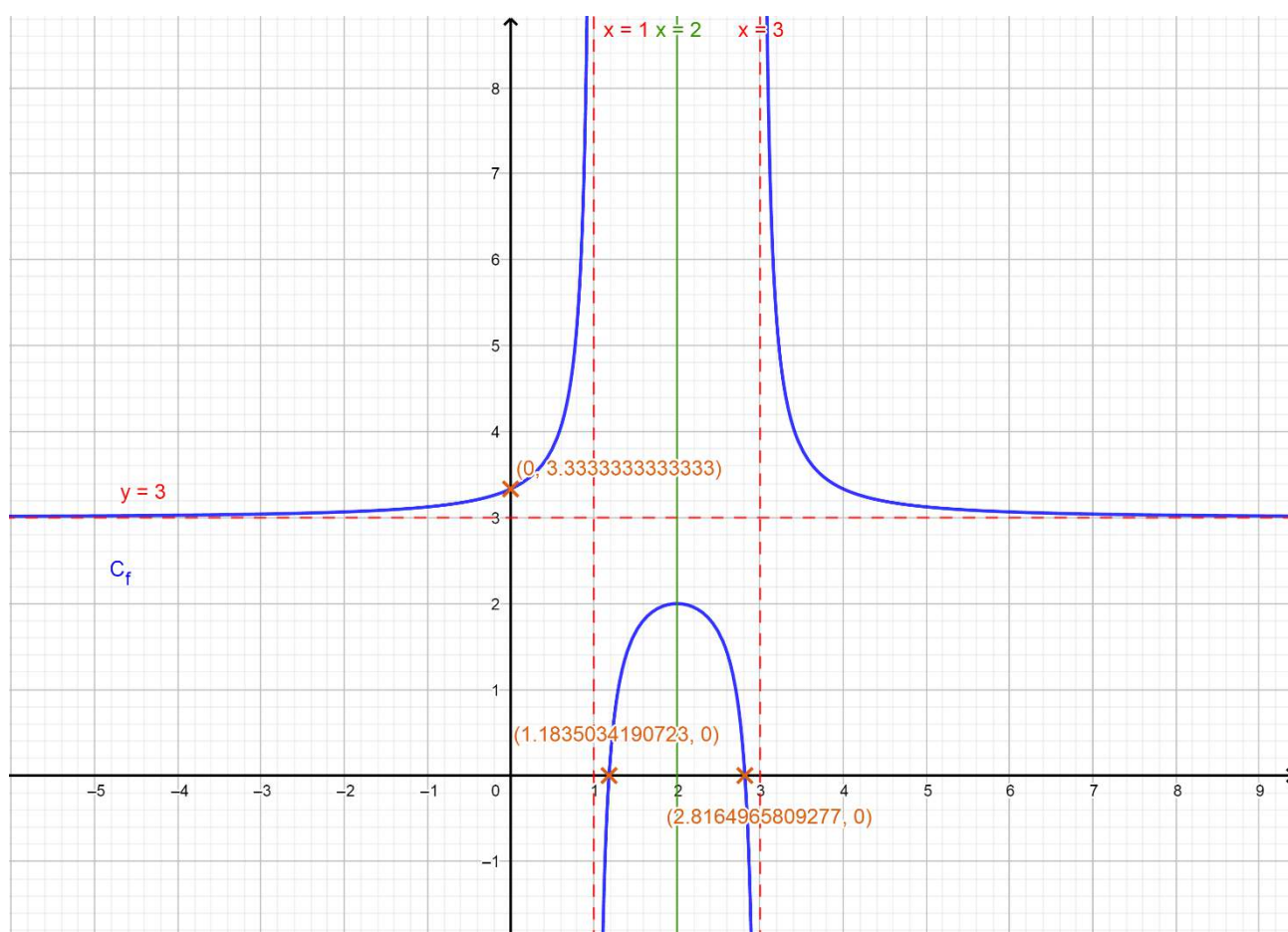
$$\begin{aligned}f(4 - x) &= \frac{3(4 - x)^2 - 12(4 - x) + 10}{(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 3} \\&= \frac{3(4^2 - 2(4)(x) + x^2) - 48 + 12x + 10}{4^2 - 2(4)(x) + x^2 - 16 + 4x + 3} \\&= \frac{3(16 - 8x + x^2) - 38 + 12x}{x^2 - 4x + 3} \\&= \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \\&= f(x)\end{aligned}$$

اذن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) .

5) التمثيل البياني للمنحنى (C_f) :

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم **المستقيمات المقاربة**: $y = 3$ و $x = 1$ و $x = 3$
- نرسم **المستقيم** ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f)
- نعين **نقط** تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نكمل الرسم



◀ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ▶