

التمارين

التمرين الأول: بكالوريا 2017 - الموضوع الأول - الدورة العادية

نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث:

$$c = 1954 \text{ و } b = 1437 \text{ ، } a = 2016$$

- (1) عين باقى القسمة الإقليمى لكل من الأعداد a ، b و c على 5.
- (2) استنتج باقى القسمة الإقليمى لكل من: $a + b + c$ ، $a \times b \times c$ و b^4 على 5.
- (3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعى n : $b^{4n} \equiv 1 [5]$.
ب- استنتج أن العدد $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5.
- (4) أ- تحقق أن: $c \equiv -1 [5]$.
ب- بين أن: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0 [5]$.

التمرين الثانى: بكالوريا 2017 - الموضوع الثانى - الدورة العادية

a ، b و c ثلاثة أعداد طبيعية حيث:

$$c = 2017 \text{ و } b = 1966 \text{ ، } a \equiv -5 [7]$$

- (1) عين باقى القسمة الإقليمى لكل من الأعداد a ، b و c على 7.
- (2) تحقق أن: $b \equiv -1 [7]$.
- (3) أثبت أن العدد: $2 - 3 \times c^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 7.
- (4) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعى k : $2^{3k} \equiv 1 [7]$.
ثم استنتج أن:
 $2^{3k+2} \equiv 4 [7]$ و $2^{3k+1} \equiv 2 [7]$
- (5) عين قيم العدد الطبيعى n حتى يكون $2^n + 3$ قابلا للقسمة على 7.

التمرين الثالث: بكالوريا 2017 - الموضوع الأول - الدورة الاستثنائية

- (1) أ- عين باقى القسمة الإقليمى لكل من الأعداد 4 ، 4^2 و 4^3 على 9.
ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعى n : $4^{3n} \equiv 1 [9]$.
ج- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعى n : $4^{3n+1} \equiv 4 [9]$.
- (2) تحقق أن: $2020^{1438} \equiv 4 [9]$.
- (3) بين أن العدد: $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9.

النمرين الرابع: بكالوريا 2017 - الموضوع الثاني - الدورة الاستثنائية

a و b عددان صحيحان حيث: $a \equiv 14 [13]$ و $b \equiv -1 [13]$.

(1) أ- بين أن باقي القسمة الإقليدية للعددين a و b على 13 هو 1 و 12 على الترتيب.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من $a + b$ ، $a - b$ ، و $2a + b^2$ على 13.

(2) بين أن العدد: $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13.

(3) عين الأعداد الطبيعية n بحيث: $b^{2017} + n + 1438 \equiv 0 [13]$.

الدول

حل النمرين الأول: بكالوريا 2017 - الموضوع الأول - الدورة العادية

نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث:

$$c = 1954 \text{ و } b = 1437 \text{ ، } a = 2016$$

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a ، b و c على 5:

◀ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 5:

لدينا:

$$a = 2016 = 403 \times 5 + 1$$

ونكتب:

$$a \equiv 1 [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 5 هو 1

◀ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 5:

لدينا:

$$b = 1437 = 287 \times 5 + 2$$

ونكتب:

$$b \equiv 2 [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 5 هو 2

◀ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد c على 5:

لدينا:

$$c = 1954 = 390 \times 5 + 4$$

ونكتب:

$$c \equiv 4 [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد c على 5 هو 4

(2) استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من: $a + b + c$ ، $a \times b \times c$ و b^4 على 5.

◀ استنتاج باقي القسمة الإقليدية ل $a + b + c$ على 5:

لدينا من (1):

$$\begin{cases} a \equiv 1 [5] \\ b \equiv 2 [5] \\ c \equiv 4 [5] \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف ينتج:

$$a + b + c \equiv 1 + 2 + 4 [5]$$

$$a + b + c \equiv 7 [5]$$

$$a + b + c \equiv 2 [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية ل $a + b + c$ على 5 هو 2

◀ استنتاج باقي القسمة الإقليدية ل $a \times b \times c$ على 5:

لدينا من (1):

$$\begin{cases} a \equiv 1 [5] \\ b \equiv 2 [5] \\ c \equiv 4 [5] \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف ينتج:

$$a \times b \times c \equiv 1 \times 2 \times 4 [5]$$

$$a \times b \times c \equiv 8 [5]$$

$$a \times b \times c \equiv 3 [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية ل $a \times b \times c$ على 5 هو 3

◀ استنتاج باقي القسمة الإقليدية ل b^4 على 5:

لدينا من (1):

$$b \equiv 2 [5]$$

$$b^4 \equiv 2^4 [5]$$

$$b^4 \equiv 16 [5]$$

$$b^4 \equiv 1 [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية ل b^4 على 5 هو 1

(3) أ- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $b^{4n} \equiv 1 [5]$

لدينا:

$$b^4 \equiv 1 [5]$$

$$(b^4)^n \equiv (1)^n [5]$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $1^n = 1$ و $(b^4)^n = b^{4n}$.

ومنه:

$$b^{4n} \equiv 1 [5]$$

(3) ب- استنتاج أن العدد $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5:

$$b^{2016} - 1 \equiv 0 [5] \text{ معناه استنتاج أن:}$$

لدينا:

$$2016 = 4 \times 504$$

فنكتب:

$$b^{2016} \equiv b^{4 \times 504} [5]$$

$$b^{2016} \equiv b^{4n} [5] ; n = 504$$

$$b^{2016} \equiv 1 [5]$$

$$b^{2016} - 1 \equiv 1 - 1 [5]$$

$$b^{2016} - 1 \equiv 0 [5]$$

ومنه:

العدد $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5

(4) أ- التحقق أن: $c \equiv -1 [5]$.

لدينا:

$$1955 = 391 \times 5 + 0$$

$$1955 \equiv 0 [5]$$

$$1955 - 1 \equiv 0 - 1 [5]$$

$$1954 \equiv -1 [5]$$

ومنه:

$$c \equiv -1 [5]$$

(4) ب- تبين أن: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0 [5]$.

لدينا:

$$c \equiv -1 [5]$$

ونكتب:

$$\begin{cases} c^{1438} \equiv (-1)^{1438} [5] \\ c^{2017} \equiv (-1)^{2017} [5] \end{cases}$$

1438 عدد زوجي يعني: $(-1)^{1438} = 1$ و 2017 عدد فردي يعني: $(-1)^{2017} = -1$.

فينتج:

$$\begin{cases} c^{1438} \equiv 1 [5] \\ c^{2017} \equiv -1 [5] \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف نكتب:

$$c^{1438} + c^{2017} \equiv 1 - 1 [5]$$

ومنه:

$$c^{1438} + c^{2017} \equiv 0 [5]$$

النمرين الثاني: بكالوريا 2017 - الموضوع الثاني - الدورة العادية

a ، b و c ثلاثة أعداد طبيعية حيث:

$$c = 2017 \text{ و } b = 1966 \text{ ، } a \equiv -5 [7]$$

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a ، b و c على 7:

◀ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7:

لدينا:

$$a \equiv -5 [7]$$

$$a \equiv 2 [7]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية لـ a على 7 هو 2

ملاحظة:

لا يمكن أن يكون باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو -5 لأنه سالب.

◀ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7:

لدينا:

$$b = 1966 = 280 \times 7 + 6$$

ونكتب:

$$b \equiv 6 [7]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 6

◀ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7:

لدينا:

$$c = 2017 = 288 \times 7 + 1$$

ونكتب:

$$c \equiv 1 [7]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 1

(2) التحقق أن: $b \equiv -1 [7]$.

لدينا:

$$1967 = 281 \times 7 + 0$$

$$1967 \equiv 0 [7]$$

$$1967 - 1 \equiv 0 - 1 [7]$$

$$1966 \equiv -1 [7]$$

ومنه:

$$b \equiv -1 [7]$$

(3) إثبات أن العدد: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7.

لإثبات أن العدد $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7 يكفي أن نثبت أن:

$$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv 0 [7]$$

لدينا:

$$b \equiv -1 [7]$$

$$b^{2017} \equiv (-1)^{2017} [7]$$

بما أن 2017 عدد فردي فإن: $(-1)^{2017} = -1$.

ومنه:

$$b^{2017} \equiv -1 [7]$$

ولدينا:

$$c \equiv 1 [7]$$

$$c^{1438} \equiv 1^{1438} [7]$$

ومنه:

$$c^{1438} \equiv 1 [7]$$

فنكتب:

$$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv -1 + 3 \times 1 - 2 [7]$$

$$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv -1 + 3 - 2 [7]$$

$$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv 0 [7]$$

ومنه:

العدد: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7

(4) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $2^{3k} \equiv 1 [7]$.

لدينا:

$$2^3 \equiv 8 [7]$$

$$2^3 \equiv 1 [7]$$

$$(2^3)^k \equiv 1^k [7]$$

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا: $1^k = 1$ و $(2^3)^k = 2^{3k}$.

ومنه:

$$2^{3k} \equiv 1 [7]$$

استنتاج أن: $2^{3k+1} \equiv 2 [7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4 [7]$

لدينا:

$$2^{3k} \equiv 1 [7]$$

$$\{ 2^{3k} \times 2^1 \equiv 1 \times 2^1 [7]$$

$$2^{3k} \times 2^2 \equiv 1 \times 2^2 [7]$$

$$\{ 2^{3k+1} \equiv 2 [7]$$

$$2^{3k+2} \equiv 4 [7]$$

ومنه:

$$2^{3k+2} \equiv 4 [7] \text{ و } 2^{3k+1} \equiv 2 [7]$$

(5) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $2^n + 3$ قابلا للقسمة على 7:

العدد $2^n + 3$ يقبل القسمة على 7 معناه: $2^n + 3 \equiv 0 [7]$.

لدينا:

$$2^n + 3 \equiv 0 [7]$$

$$2^n \equiv -3 [7]$$

$$2^n \equiv 4 [7]$$

ولدينا:

$$2^{3k+2} \equiv 4 [7]$$

بالمطابقة نجد:

$$n = 3k + 2 ; k \in \mathbb{N}$$

التمرين الثالث: بكالوريا 2017 - الموضوع الأول - الدورة الاستثنائية

(1) - تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4، 4^2 و 4^3 على 9:

لدينا:

$$\begin{cases} 4 \equiv 4 [9] \\ 4^2 \equiv 7 [9] \\ 4^3 \equiv 1 [9] \end{cases}$$

ومنه:

◀ باقي القسمة الإقليدية للعدد 4 على 9 هو 4

◀ باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^2 على 9 هو 7

◀ باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^3 على 9 هو 1

(1) - ب- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{3n} \equiv 1 [9]$.

لدينا:

$$4^3 \equiv 1 [9]$$

$$(4^3)^n \equiv 1^n [9]$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $1^n = 1$ و $(4^3)^n = 4^{3n}$.

ومنه:

$$4^{3n} \equiv 1 [9]$$

(1) - ج- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{3n+1} \equiv 4 [9]$.

لدينا:

$$4^{3n} \equiv 1 [9]$$

$$4^{3n} \times 4 \equiv 1 \times 4 [9]$$

$$4^{3n+1} \equiv 4 [9]$$

ومنه:

نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n أن:

$$4^{3n+1} \equiv 4 [9]$$

(2) التحقق أن: $2020^{1438} \equiv 4 [9]$.

لدينا:

$$2020 = 224 \times 9 + 4$$

$$2020 \equiv 4 [9]$$

$$2020^{1438} \equiv 4^{1438} [9]$$

$$2020^{1438} \equiv 4^{3 \times 479 + 1} [9]$$

$$2020^{1438} \equiv 4^{3n+1} [9] ; n = 479$$

من (1) ج- لدينا:

$$4^{3n+1} \equiv 4 [9]$$

ومنه:

$$2020^{1438} \equiv 4 [9]$$

(3) تبيان أن العدد: $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9.

لتبيان أن العدد $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9 يكفي أن نبين أن:

$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 0 [9]$$

لدينا من (2):

$$2020^{1438} \equiv 4 [9]$$

ولدينا:

$$2017 = 224 \times 9 + 1$$

$$2017 \equiv 1 [9]$$

$$2017^2 \equiv 1^2 [9]$$

ومنه:

$$2017^2 \equiv 1 [9]$$

ولدينا:

$$1995 = 221 \times 9 + 6$$

ومنه:

$$1995 \equiv 6 [9]$$

فنكتب:

$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 4 - 1 + 6 [9]$$

$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 9 [9]$$

$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 0 [9]$$

ومنه:

العدد: $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9

التمرين الرابع: بكالوريا 2017 - الموضوع الثاني - الدورة الاستثنائية

a و b عددان صحيحان حيث: $a \equiv 14 [13]$ و $b \equiv -1 [13]$.

(1) أ- تبيان أن باقي القسمة الإقليدية للعددين a و b على 13 هو 1 و 12 على الترتيب:

لدينا:

$$\begin{cases} a \equiv 14 [13] \text{ (من المعطيات)} \\ 14 \equiv 1 [13] \end{cases}$$

نجد:

$$a \equiv 1 [13]$$

ومنه:

◀ باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 13 هو 1

ولدينا:

$$\begin{aligned} 13 &\equiv 0 [13] \\ 13 - 12 &\equiv 0 - 12 [13] \\ 1 &\equiv -12 [13] \\ -1 &\equiv 12 [13] \end{aligned}$$

فنكتب:

$$\begin{cases} b \equiv -1 [13] \text{ (من المعطيات)} \\ -1 \equiv 12 [13] \end{cases}$$

نجد:

$$b \equiv 12 [13]$$

ومنه:

◀ باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 13 هو 12

(1) - استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من $a + b$ ، $a - b$ و $2a + b^2$ على 13:

◀ استنتاج باقي القسمة الإقليدية لـ $a + b$ على 13:

من 1) أ- لدينا:

$$\begin{cases} a \equiv 1 [13] \\ b \equiv -1 [13] \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف نكتب:

$$a + b \equiv 1 - 1 [13]$$

نجد:

$$a + b \equiv 0 [13]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $a + b$ على 13 هو 0

◀ استنتاج باقي القسمة الإقليدية لـ $a - b$ على 13:

من 1) أ- لدينا:

$$\begin{cases} a \equiv 1 [13] \\ b \equiv -1 [13] \end{cases}$$

بالطرح طرف من طرف نكتب:

$$a - b \equiv 1 + 1 [13]$$

نجد:

$$a - b \equiv 2 [13]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $a - b$ على 13 هو 2

استنتاج باقي القسمة الإقليدية لـ $2a + b^2$ على 13:

من (1) أ- لدينا:

$$\begin{cases} a \equiv 1 [13] \\ b \equiv -1 [13] \end{cases}$$

ونكتب:

$$\begin{cases} 2a \equiv 2 \times 1 [13] \\ b^2 \equiv (-1)^2 [13] \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} 2a \equiv 2 [13] \\ b^2 \equiv 1 [13] \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف نكتب:

$$2a + b^2 \equiv 2 + 1 [13]$$

نجد:

$$2a + b^2 \equiv 3 [13]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $2a + b^2$ على 13 هو 3

(2) تبيان أن العدد: $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13.

لتبيان أن العدد $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13 يكفي أن نبين أن:

$$a^{1438} + b^{2017} \equiv 0 [13]$$

لدينا:

$$a \equiv 1 [13]$$

$$a^{1438} \equiv (1)^{1438} [13]$$

ومنه:

$$a^{1438} \equiv 1 [13]$$

ولدينا:

$$b \equiv -1 [13]$$

$$b^{2017} \equiv (-1)^{2017} [13]$$

بما أن 2017 عدد فردي فإن: $(-1)^{2017} = -1$.

ومنه:

$$b^{2017} \equiv -1 [13]$$

فنكتب:

$$a^{1438} + b^{2017} \equiv 1 - 1 [13]$$

$$a^{1438} + b^{2017} \equiv 0 [13]$$

ومنه:

العدد: $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13

(3) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث: $b^{2017} + n + 1438 \equiv 0 [13]$.

لدينا:

$$\begin{cases} b^{2017} \equiv -1 [13] \\ 1438 \equiv 8 [13] \end{cases}$$

ولدينا:

$$b^{2017} + n + 1438 \equiv 0 [13]$$

فنكتب:

$$-1 + n + 8 \equiv 0 [13]$$

$$n + 7 \equiv 0 [13]$$

$$n \equiv -7 [13]$$

$$n \equiv 6 [13]$$

ومنه:

$$n = 13k + 6 ; k \in \mathbb{N}$$