# تمارين الدوال الأسية في البكالوريا

## شعبة : تقني رياضي

### التمرين [1] [باك 2009][م1]

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أحسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ .

2) أدرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0;+\infty[$ ثم استنتج جدول تغيّراتها على $\mathbb{R}$ .

3) أ- بيّن أن المستقيم ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$ .

4) بيّن أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا $\alpha$ بحيث : $-1,7<\alpha<-1,6$ .

5) أرسم $(C_f)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ .

### التمرين [2] [باك 2010][م2]

$f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) عيّن العددين الحقيقين $a$ و $b$ بحيث : $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ .

2) أحسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها .

3) بيّن أن $f$ متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

4) أ- $(D)$ و $(D')$ المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب : $y=x$ و $y=x+\dfrac{4}{3}$ .

بيّن أن $(D)$ و $(D')$ مقاربان للمنحنى $(C_f)$ ، ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما .

ب- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $x_0$ و $x_1$ حيث : $0,9<x_0<0,91$ و $-1,66<x_1<-1,65$ .

جـ- أحسب من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم $f(x)+f(-x)$ . فسّر النتيجة هندسيا .

د- أرسم $(D)$ و $(D')$ و $(C_f)$ .

هـ- $m$ عدد حقيقي ، $(D_m)$ المستقيم المعرف بالمعادلة $y=x+m$ .

ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$ .

5) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يأتي : $g(x)=[f(x)]^2$ .

أدرس تغيّرات الدالة $g$ دون حساب $g(x)$ بدلالة $x$ .

## التمرين [3] [باك 2011][م2]

$f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=3-\dfrac{4}{e^x+1}$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أدرس تغيّرات الدالة $f$ .

2) عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى $(C_f)$ .

3) بيّن أن للمنحنى $(C_f)$ نقطة إنعطاف $\omega$ يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة لمماس $(C_f)$ عندها .

4) لتكن $g$ الدالة العددية المعرّفة على كما يلي : $g(x)=f(x)-x$ .

أ- أدرس تغيّرات الدالة $g$ .

ب- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $2,7<\alpha<2,8$ .

5) أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x)=0$ .

ب- أرسم المماس و المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ و المنحنى $(C_f)$ .

## التمرين [4] [باك 2012][م1]

I) $g$ هي الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-4+(4-2x)e^x$ .

1) أدرس تغيّرات الدالة $g$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر $\alpha$ حيث : $1,59<\alpha<1,60$ .

3) استنتج إشارة $g(x)$ .

II) $f$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ . ( وحدة الطول $2cm$ )

1) بيّن أن $(C_f)$ يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتاهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$ .

2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$ .

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ .

جـ- أحسب $f(1)$ ، ثم استنتج ، حسب قيم $x$ ، إشارة $f(x)$ .

3) أ- بيّن أن $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، حيث $\alpha$ هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء **I)** .

ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ . ( تدور النتائج إلى $10^{-2}$ )

جـ- أرسم $(C_f)$ .

4) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، عدد و إشارة حلول المعادلة : $2x-2=(e^x-2x)(m+1)$ .

5) $h$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$ .

أ- أحسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$ .

ب- شكّل جدول تغيّرات الدالة $h$ .

## التمرين [5] [باك 2013][م2]

I) الدالة $g$ معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x-1)e^{x}$ .

1) أدرس تغيّرات الدالة $g$ .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $1+(x-1)e^{x}\geq 0$.

II) $f$ هي الدالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x} & ; \quad x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ .

1) أـ بيّن أن $f$ مستمرة على المجال $[0;+\infty[$ .

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) أـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^{x}}{x^{2}}$ .

بـ ـ استنتج إتجاه تغير الدالة $f$ ، ثم شكّل جدول تغيرَاتها .

III) $n$ عدد طبيعي حيث $n\geq 1$ ، $f_n$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f_n(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x}+n\ln x$ .

$(C_n)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f_n$ على المجال $]0;+\infty[$ .

2) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ .

3) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_n)$ و $(C_{n+1})$ .

4) بيّن أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة $B$ يطلب تعيين إحداثياتها .

5) أـ بيّن أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1$ من $]0,3;0,4[$ بحيث : $f_1(\alpha_1)=0$ .

بـ ـ بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$ فإن : $f_n(\alpha_1)<0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n$ من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$ .

6) أـ بالإعتماد على الجزء **II** ، بيّن أنه ، من أجل كل $x$ من $]0;1]$ : $\dfrac{e^{x}-1}{x}\leq e-1$ .

بـ ـ استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$ : $\ln(\alpha_n)\geq\dfrac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$ .

جـ ـ جد نهاية المتتالية $(\alpha_n)$ .

## التمرين [6] [باك 2014][م2]

$f$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x-1)e^{x}$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) عيّن نهاية $f$ عند كل من $+\infty$ و $-\infty$ .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيرَاتها.

3) أـ بيّن أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن : $1.27<\alpha<1.28$ .

بـ ـ أكتب معادلة لـ $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدد وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(T)$ .

جـ ـ أرسم $(T)$ و $(C_f)$ .

4) عيّن قيم العدد الحقيقي $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة : $(x-1)e^{x}-(m-1)e^{m}=-1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$ .

5) $h$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\left(|x|+1\right)e^{-|x|}$ . و $(C_h)$ تمثيلها البياني .

أـ بيّن أن الدالة $h$ زوجية .

بـ ـ أرسم $(C_h)$ مستعينا بالمنحنى $(C_f)$ .

6) $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(ax+b)e^{x}$ ، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان .

عيّن $a$ و $b$ حتى يكون : من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $g'(x)=f(x)$ .

## التمرين [7] [باك 2015] [م2]

**I)** $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x+2)e^{x}-2$ .

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ .

2) أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ .

**II)** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=-g(x)$ .

بـ- استنتج اشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ .

جـ- بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$ .

ثم أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

3) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث : $0{,}92<\alpha<0{,}93$ و $-1{,}56<\beta<-1{,}55$ .

بـ- أنشئ المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$ على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$ .

## التمرين [8] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م2]

**I)** $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1-2xe^{-x}$ .

- أدرس إتجاه تغيّر الدالة $g$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$

**II)** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=(x+1)(1+2e^{-x})$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ .

بـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ- بيّن أن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=1$ ثم استنتج معادلة لـ $(\Delta)$ ، المستقيم المقارب المائل للمنحنى $(C_f)$ .

بـ- أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

3) أثبت أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا وحيدا $(T)$ يوازي $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له.

4) باستعمال المنحنى $(C_f)$ ، عيّن قيم الوسيط الحقيقي $m$ حتى يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلين مختلفين .

## التمرين [9] [باك 2018][م1]

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا و أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

2) بيّن أنه من أجل كل $x$ من $]-\infty;1[$ : $f'(x)=\frac{(-x^2+x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$ و أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ- أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

بـ- $h$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ : $h(x)=e^{-x}+x-1$ .

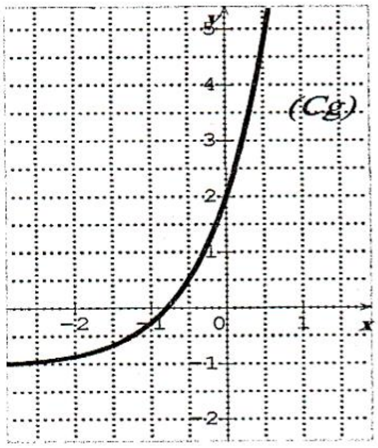
أدرس اتجاه تغيّر الدالة $h$ ، ثم أستنتج أنه من أجل كل $x$ من $]-\infty;1[$ : $h(x)\geq 0$ .

4) بيّن أنه من أجل كل $x$ من $]-\infty;1[$ : $f(x)+x=\frac{xh(x)}{x-1}$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و المماس $(T)$ .

فسر النتيجة بيانيا.

5) أكتب معادلة المستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل مبدأ المعلم $O$ و النقطة $A\left(-2;\frac{2}{3}e^2\right)$ ، ثم أرسم المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ و المنحنى $(C_f)$ على المجال $[-2;1[$ .

## التمرين [10] [باك 2019][م1] [ن5]




I) $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x+3)e^{-x}-1$ .

$(C_g)$ تمثيلها البياني كما هو مبيّن في الشكل .

بقراءة بيانية :

1) حدد إشارة $g(-1)$ و $g\left(\frac{-1}{2}\right)$ .

2) استنتج وجود عدد حقيقي $\alpha$ وحيد من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ بحيث : $g(\alpha)=0$ .

ثم تحقق أن : $-0.8<\alpha<-0.7$ .

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

II) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=(x+2)(e^{x}-1)$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=g(x)$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ ثم استنتج أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلة له .

بـ- أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

جـ- أكتب معادلة لـ $(T)$ مماس $(C_f)$ الموازي للمستقيم $(\Delta)$ .

4) أرسم المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$ على المجال $]-\infty;1]$. (يُعطى $f(\alpha)\approx-0.7$ )

5) $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1$ . $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- بيّن أن الدالة $h$ زوجية .

بـ- تحقق أنه من أجل كل $x$ من المجال $[0;+\infty[$ فإن : $h(x)=f(x-2)+1$ .

جـ- إشرح كيف يمكن رسم $(C_h)$ إنطلاقا من $(C_f)$ ثم أرسم $(C_h)$ على المجال $[-3;3]$ .

## التمرين [11] [باك 2020][2م]

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $\left]-1;+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=x-1+\frac{1}{4}(2e^{-x}-1)^2$ .

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ . ( وحدة الطول $2cm$ )

1) أ- بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $\left]-1;+\infty\right[$ : $f'(x)=(1-e^{-x})(2e^{-x}+1)$ .

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ ، و استنتج إتجاه تغيَر الدالة $f$ .

جـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيَراتها .

2) أ- بيَن أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-\frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

ب- أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

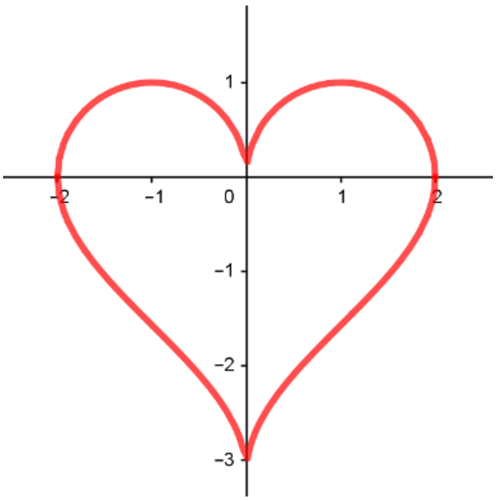
3) بيَن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$ يطلب كتابة معادلة له .

4) بيَن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيينها .

5) أرسم $(\Delta)$ ، $(T)$ و $(C_f)$ .

6) ليكن $m$ وسيطا حقيقيا . عيَن مجموعة قيم $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين مختلفين .

*“The only way to learn mathematics is to do mathematics”*




كتابة : خالد بخاخشة

نشر يوم 2020/12/02