

تمارين الدوال الأسية في البكالوريا

شبهة : رياضيات

التمرين [1] [باك 2008] [2م]

- (I) f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$.
- وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- أدرس تغيرات الدالة f .
 - أ- بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف w وأكتب معادلة لمماس (C_f) عند w .
ب- أثبت أن w مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
 - أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)]$.
ب- استنتج أن (C_f) يقبل مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.
 - أ- بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فصلتها x_0 حيث $x_0 \in]-2,77; -2,76[$.
ب- أحسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})، ثم أرسم (C_f) ومستقيمه المقاربين.
- (II) g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ ، وليكن (C_g) تمثيلها البياني.
- أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) = f(-x)$.
 - ب- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) إلى (C_g) .
 - أنشئ (C_g) في نفس المعلم السابق (دون دراسة g).

التمرين [2] [باك 2010] [1م]

- (I) g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = (3-x)e^x - 3$.
- أدرس تغيرات الدالة g .
 - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما معدوم والآخر α حيث $2.82 < \alpha < 2.83$.
 - استنتج إشارة $g(x) = 0$ حسب قيم x .
- (II) f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{e^x - 1} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$
- وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$. أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند المبدأ O .
 - أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وأحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
ب- بين أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2 g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
ج- تحقق أن: $f(\alpha) = \alpha^2 (3 - \alpha)$ ، ثم عين حصره.
د- أنشئ جدول تغيرات f .
 - أ- أحسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $-x^3$ عند $x \rightarrow -\infty$.
ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ وفسر النتيجة هندسياً.
 - أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C_f) و (C) .

التصريف [3] [باك 2012] [م1]

- (I) g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 2 - xe^x$.
- (1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على \mathbb{R} ، ثم تحقق $0.8 < \alpha < 0.9$.
- (3) عين حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.
- (II) f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول $2cm$.
- (1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.
- (2) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- بـ بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) .
- (3) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.
- (4) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .
- بـ بين أن $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (5) أرسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .
- (6) ناقش، بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

التصريف [4] [باك 2012] [م1]

- (I) g هي الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$.
- (1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,59 < \alpha < 1,60$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$.
- (II) f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)
- (1) بين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتاهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.
- (2) أـ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.
- بـ استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- جـ أحسب $f(1)$ ، ثم استنتج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.
- (3) أـ بين أن $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$ ، حيث α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء I.
- بـ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2})
- جـ أرسم (C_f) .
- (4) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$.
- (5) h هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$.
- أـ أحسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.
- بـ شكل جدول تغيرات الدالة h .

- (I) الدالة g معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$.
- (1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- بـ أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (2) أـ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في \mathbb{R} ، ثم تحقق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$.
- (3) بـ استنتج إشارة $g(x)$ ، حسب قيم العدد الحقيقي x .
- (II) الدالة f معرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$.
- و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)
- (1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- بـ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
- جـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- (2) أـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.
- بـ شكل جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} . (نأخذ: $f(\alpha) \approx -0,9$)
- (3) أـ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجبه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.
- بـ مثل (Δ) و المماسين والمنحنى (C_f) .
- جـ ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.

- (I) الدالة g معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = (2-x)e^x - 1$.
- (1) أدرس تغيرات الدالة.
- (2) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلان α و β حيث: $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
- (II) الدالة f معرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.
- و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ وفسر النتيجة بيانيا.
- (2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ و استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.
- (4) أحسب $f(1)$ ، ثم أرسم المنحنى (C_f) .

الف الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

(3) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) عند $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلتها له.

(5) الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ بـ: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(6) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$: $f(x) > x$.

ب- استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ج- أنشئ المنحنى (C_f) .

(7) عدد حقيقي m ، الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ: $h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$.

أ- أحسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .

ب- باستعمال (C_f) ، ناقش بيانياً وحسب الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $h'_m(x) = 0$.

(I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كمايلي: $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلاً α يختلف عن 1، ثم تحقق أن $2,79 < \alpha < 2,80$.

(3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على \mathbb{R} .

(II) f و g الدالتان المعرفتان على \mathbb{R} كمايلي: $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماساً مشتركاً (T) في النقطة ذات الفاصلة 1، ثم جد معادلتها له.

(3) أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

(4) أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب- أدرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ ، ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g) .

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلته له .
 ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$.
 ثم أستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .
- (3) h الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2e^{-x+2} - 4$.
 أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ ، حدد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$.
- (4) أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[0; +\infty[$.
- (5) نعتبر الوسيط الحقيقي m والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب : $f(x) = m(x-2)$ (E)
 ناقش بيانها وحسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .
- (6) g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
 اعتمادا على السؤال رقم (1) ، شكل جدول تغيرات الدالة g .

- المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$
- I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ و (C) تمثيلها البياني
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) أثبت أن المنحنى (C) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما ، أحسب $f(-2)$ ، ثم أرسم المنحنى (C) .
- II ليكن m وسيط حقيقي ، نعتبر الدالة f_m المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f_m(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$.
- وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق .
- (1) أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثيها .
- (2) أدرس إتجاه تغير الدالة f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما .
- (3) M_m نقطة من (C_m) فاصلتها x_m حيث : $x_m = 1 - m$
- أثبت أنه عندما m يمسخ \mathbb{R} فإن M_m تنتمي إلى منحنى يطلب تعيين معادلته له .
- (4) أدرس حسب قيم الوسيط m حيث $m \neq 2$ الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m) .

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$.

$$(1) \text{ بين أنه من أجل كل } x \text{ من المجال }]0; +\infty[: g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

واستنتج إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,9 < \alpha < 1$.

واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$(1) \text{ أ- أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

واستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{-\frac{1}{x}} - x \right) = -1$ (يمكن وضع $t = -\frac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب

للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(3) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}$.

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ وأدرس إتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- تحقق أن : $f(x) - x = (1+x)h(x)$ ، ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 1,73$)

(I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$. k وسيط حقيقي .

(C_k) المنحنى الممثل للدالة f_k في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن كل المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما .

(2) أحسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k) .

(3) أ- أحسب $f'_k(x)$ ، ثم حدد حسب قيم الوسيط الحقيقي k إتجاه تغير الدالة f_k .

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما .

(4) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) .

(II) الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى (C_f) على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty \right]$.

(2) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل في \mathbb{R} حلين أحدهما α بحيث : $-1.28 < \alpha < -1.27$.

ب- عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left| \frac{x+1}{e^x} \right| = \left| \frac{m+1}{e^m} \right|$ حلا وحيدا .

- (I) الدالتان g و h معرفتان على المجال $]-\infty; 0]$ كما يلي: $g(x) = -2e^x$ و $h(x) = x(e^x + 1)$.
 حدد إشارة كلا من $g(x)$ و $h(x)$ على المجال $]-\infty; 0]$.
- (II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]-\infty; 0]$ كما يلي: $f(x) = (x-3)e^x + \frac{1}{2}x^2$.
 و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (1) أبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0]$: $f'(x) = h(x) + g(x)$.
 بـ استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.
 (2) أحسب $f(0)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .
 (3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 0]$ ، ثم تحقق أن: $-1.5 < \alpha < -1.4$.
 (4) (P) هو التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ على المجال $]-\infty; 0]$.
 أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x^2 \right]$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.
 بـ أدرس الوضع النسبي للمنحنين (P) و (C_f) .
 جـ أنشئ (P) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$.
 (5) ليكن m وسيطا حقيقيا. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة $|f(x)| = e^m$ في المجال $]-\infty; 0]$.

“The only way to learn mathematics is to do mathematics”

كتابة: خالد بخاخشة

نشر يوم 2020/12/09