

الدالة Fonction Logarithme اللوغاريتمية

مقدمة للشعب: علوم تجريبية / تقني رياضي / رياضيات



اصدار 25 ديسمبر 2020

اعداد الأستاذ شعبان أسامة



Google / Facebook/ Telegram/ Instagram : 5min maths

تلمسان-0775737163

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اليك أيها الطالب " مجلة 5min Maths " للسنة الثالثة ثانوي الشعب العلمية محور الدالة اللوغاريتمية

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصص مساعدتك على التحضير الجيد للبيكالوريا لدورة 2021، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد وربما يكون حلك أحسن وأقصر لكن النتائج والأهداف واحدة ،

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك ويهديك الى سبيل الخير

الأستاذ شعبان أسامة

”

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا



وثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر



مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة، تم اصدار أول نسخة
بتاريخ: 2019/09/13



تجدون في هذا العمل

1. ملخص الدرس

2. تطبيقات

3. تمارين محلولة

4. تمارين مقترحة

تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0; +\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$.

يسمى هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " ونرمز إليه بالرمز " $\ln a$ ".

مثال: * العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b = 2$ هو إذن $\ln 2$.

تعريف الدالة " $\ln$ " نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز " $\ln$ " والتي ترفق بكل عدد حقيقي

x من $]0; +\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

1. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $x = e^y$ يعني $y = \ln x$.

2. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$.

3. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\ln(e^x) = x$.

4. بما أن $e^0 = 1$ فإن $\ln 1 = 0$ و بما أن $e^1 = e$ فإن $\ln e = 1$.

ملاحظة: نعبّر عن النتيجة "1" بالقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " هي الدالة العكسية للدالة الأسية " $\exp$ ".

***خاصية:** في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة

إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول).

البرهان: نرمز بـ (C) إلى منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ و بـ (C') إلى

منحنى الدالة $x \mapsto \ln x$.

بما أن $y = e^x$ يعني $x = \ln y$ فإن القول أن النقطة $M(x; y)$ تنتمي إلى (C)

يعني أن النقطة $M'(y; x)$ تنتمي إلى (C') .

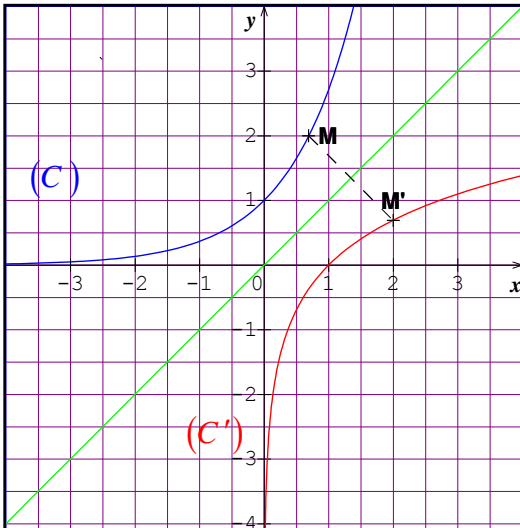
و بما أن $M(x; y)$ و $M'(y; x)$ متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة

$y = x$ فإن المنحنيين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى هذا المستقيم.

اتبع تغير الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

***خاصية:** الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

البرهان: a و b عددا حقيقيان كفيان من $]0; +\infty[$ حيث $a < b$. يعني $e^{\ln a} < e^{\ln b}$ و بما أن الدالة



الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $\ln a < \ln b$.

نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$:

1. $\ln a = \ln b$ يعني $a = b$.

2. $\ln a < \ln b$ يعني $a < b$.

3. $\ln a > 0$ يعني $a > 1$ و $\ln a < 0$ يعني $0 < a < 1$ كما أن $\ln 1 = 0$.

الخواص الجبرية

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ، $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ، $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ و $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما وهكذا يكون لدينا:

من أجل كل أعداد حقيقية $a_1, a_2, \dots, a_n$ من $]0; +\infty[$ ، $\ln(a_1 a_2 \dots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$.

خاصية: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln(a^n) = n \ln a$.

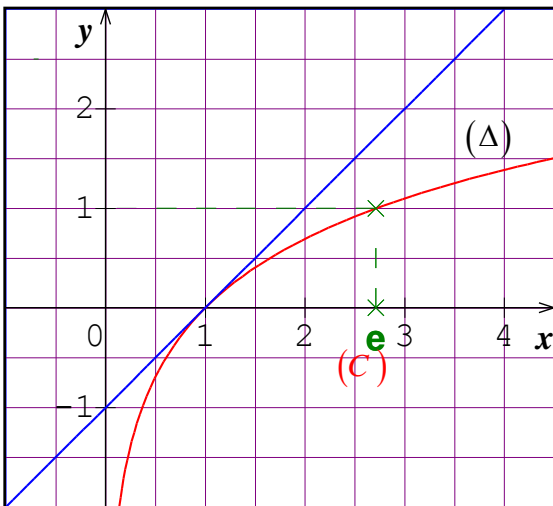
خاصية: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0; +\infty[$ ، $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

النهايات **خاصية:** نهاية الدالة " $\ln$ " عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند 0 هي $-\infty$.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

الاستمرارية و الاشتقاقية

خاصية: الدالة " $\ln$ " مستمرة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.



جدول تغيرات الدالة " $\ln$ "

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$		+	
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

المنحني (C) الممثل للدالة "ln" يقبل محور الترتيب كمستقيم مقارب.

• لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $y = x - 1$: (Δ).

• من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = 1$ إذن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ أو $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

نتيجة: الدالة $h \mapsto h$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $h \mapsto \ln(1+h)$ بجوار 0.

أي من أجل h قريب من 0 لدينا: $\ln(1+h) \approx h$.

دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز "log" و المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

ملاحظة: $\log 1 = 0$ و $\log 10 = 1$.

• **خاصية:** من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ، $\log(ab) = \log a + \log b$.

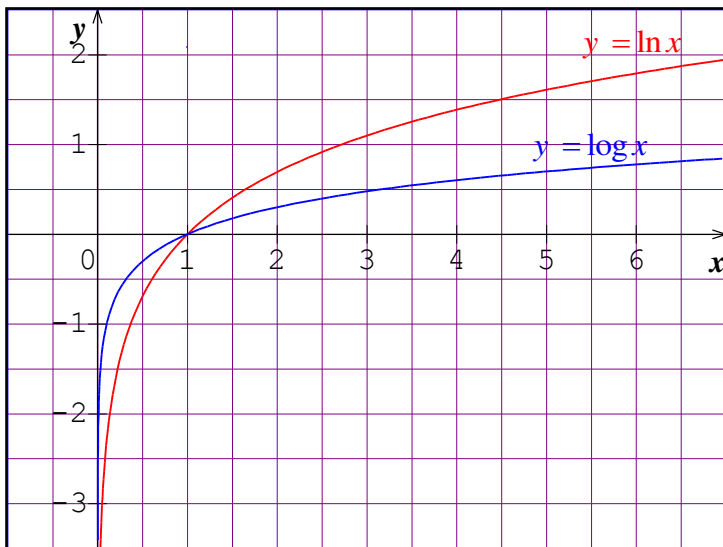
نتائج: كل الخواص الجبرية للدالة "ln" تبقى محققة من قبل الدالة "log" ومنه:

1. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ، $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

2. من أجل كل عدد حقيقي a من $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\log(a^n) = n \log a$.

حالة خاصة: من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\log(10^n) = n$ لأن $\log 10 = 1$.

• **خاصية:** الدالة "log" متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.



البرهان: من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $\log x = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$

و بما أن $\ln 10 > 0$ فإن للدالتين "log" و "ln" نفس اتجاه

التغيرات. و بما أن الدالة "ln" متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

فإن الدالة "log" متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

يستنتج التمثيل البياني للدالة "log" انطلاقا من التمثيل البياني

للدالة "ln".

نتيجة: إذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$ فإن $n \leq \log x \leq n+1$

مثال:

نعتبر العدد الحقيقي x بحيث $x = 3,87 \times 10^7$.

لدينا $10^7 < x < 10^8$ و منه $\log 10^7 < \log x < \log 10^8$

نجد هكذا أن $7 < \log x < 8$

ملاحظة: لدالة اللوغاريتم العشري تطبيقات عديدة وهامة في مختلف المواد وبصفة خاصة في الفيزياء، الكيمياء والجغرافيا.

دراسة الدالة $\ln \circ u$

النهايات لدراسة نهاية دالة $\ln \circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]2; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x-2)$.

- لدينا $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) = -\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$
- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = +\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. اتجاه التغيرات

***خاصية:** إذا كانت u دالة معرفة وموجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln\left(\frac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f = \ln \circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $u(x) = \frac{3}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$

. المشتقة

***خاصية:** إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على I

ولدينا من أجل كل x من I ، $(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

مثال: * مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ هي $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

* مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \ln(e^x + 1)$ هي $g'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

تطبيقات

تطبيق ①: عين مجموعتي تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي: $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \ln(x^2)$

طريقة: يكون لـ $\ln a$ معنى إذا وفقط إذا كان العدد الحقيقي a موجب تماما.

◀ **الحل:**

- تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $x+1 > 0$ أي $x > -1$ و منه مجموعة تعريف f هي $]-1; +\infty[$.
- تكون g معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2 > 0$ أي $x \neq 0$ و منه مجموعة تعريف g هي $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
-

تطبيق ②: حل المعادلة والمتراجحتين التالية:

$$\ln(x+2) \leq 5 \quad (3) \quad \ln(x-1) \geq -3 \quad (2) \quad \ln(2x-1) = 2 \quad (1)$$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $\ln[u(x)] = p$ (على التوالي متراجحة من الشكل $\ln[u(x)] < p$):

عين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).

نحل في D المعادلة $u(x) = e^p$ (على التوالي المتراجحة $u(x) < e^p$).

◀ **الحل:**

$$1. \text{ لدينا } D =] \frac{1}{2}; +\infty[\text{ تعني } (1) \cdot D =] \frac{1}{2}; +\infty[\text{ أي } 2x-1 = e^2 \text{ و منه مجموعة الحلول هي } S = \left\{ \frac{1+e^2}{2} \right\}$$

$$2. \text{ لدينا } D =]1; +\infty[\text{ تعني } (2) \cdot D =]1; +\infty[\text{ أي } x-1 > e^{-3} \text{ و منه مجموعة الحلول هي } S =]1+e^{-3}; +\infty[$$

$$3. \text{ لدينا } D =]-2; +\infty[\text{ تعني } (3) \cdot D =]-2; +\infty[\text{ أي } x+2 \leq e^5 \text{ و منه مجموعة الحلول هي } S =]-2; e^5-2]$$

تطبيق ③: حل المعادلة والمتراجحة التاليتين: $\ln(x^2-1) = \ln(x)$ (1) $\ln(x^2-1) \leq \ln(x)$ (2)

طريقة: لحل المعادلة $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ (على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)] < \ln[v(x)]$):

نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).

نحل في D المعادلة $u(x) = v(x)$ (على التوالي المتراجحة $u(x) < v(x)$).

◀ **الحل:**

$$1. \text{ تكون المعادلة معرفة من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ حيث } x^2-1 > 0 \text{ و } x > 0 \text{ و منه } D =]1; +\infty[$$

$$(1) \text{ تعني } x^2-1 = x \text{ أي } x^2-x-1=0. \text{ حلول المعادلة } x^2-x-1=0 \text{ هما } x' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ و } x'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

نلاحظ أن x'' عنصر من D بينما x' لا تنتمي إلى D . و هكذا مجموعة الحلول هي $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة هي $D =]1; +\infty[$ لدينا (2) تعني $x^2 - x - 1 \leq 0$. مجموعة حلول المتراجحة $x^2 - x - 1 \leq 0$ هي $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$ وبالتالي فمجموعة حلول المتراجحة (2) هي تقاطع مجموعة التعريف D مع المجال $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$. نجد هكذا أن مجموعة الحلول هي: $\left] 1; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$.

تطبيق 4: حل المعادلتين التاليتين:

$$\ln(x-1) + \ln(x+2) = 2\ln 2 \quad (1) \quad \text{و} \quad \ln(x-1)(x+2) = 2\ln 2 \quad (2)$$

طريقة: الكتابة $\ln a + \ln b$ تفرض أن يكون $a > 0$ و $b > 0$ بينما الكتابة $\ln(a \times b)$ تفرض أن يكون $ab > 0$

وبعني هذا أنه يمكن للعددين a و b أن يكونا سالبين معا.

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)(x+2) > 0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2) = \ln 4$ أي $(x-1)(x+2) = 4$ أي $x^2 + x - 6 = 0$. -3 و 2 حلول هذه المعادلة تنتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S = \{-3; 2\}$.

2. تكون المعادلة (2) معرفة من أجل من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1) > 0$ و $(x+2) > 0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D =]1; +\infty[$. (2) تعني $\ln(x-1)(x+2) = \ln 4$ أي $(x-1)(x+2) = 4$ أي $x^2 + x - 6 = 0$. من بين -3 و 2 حلول هذه المعادلة، الحل 2 هو الوحيد الذي ينتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S = \{2\}$.

تطبيق 5: حل المتراجحتين التاليتين:

$$\ln(x-1) + \ln(x+2) \leq 2\ln 2 \quad (1) \quad \text{و} \quad \ln(x-1)(x+2) \leq 2\ln 2 \quad (2)$$

الحل:

1. مجموعة تعريف المتراجحة (1) هي $D =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2) \leq \ln 4$ أي $x^2 + x - 6 \leq 0$

مجموع الحلول هي $[-3; 2] \cap D = [-3; -2[\cup]1; 2]$

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D =]1; +\infty[$

$$(2) \text{ تعني } \ln(x-1)(x+2) \leq \ln 4 \text{ أي } x^2 + x - 6 \leq 0$$

$$\text{مجموع الحلول هي }]1;2] \cap D =]-3;2]$$

تطبيق 6: حل المعادلة التالية: $2[\ln(x)]^2 + \ln(x) - 6 = 0$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = 0$ مع $a \neq 0$ نضع $X = \ln x$

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ ثم نستنتج قيم x في حالة وجودها.

الحل: مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]0; +\infty[$

بوضع $X = \ln x$ نحصل على المعادلة $2X^2 + X - 6 = 0$ ذات الحلين -2 و $\frac{3}{2}$.

$$\ln x = -2 \text{ تعني } x = e^{-2} \text{ و } \ln x = \frac{3}{2} \text{ تعني } x = e^{\frac{3}{2}} \text{ و منه مجموعة الحلول هي } S = \left\{ e^{-2}; e^{\frac{3}{2}} \right\}$$

تطبيق 7: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$

1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

2. عين الدالة f' . أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

الحل:

$$1. \text{ نعلم أن } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty$$

$$\text{لدينا } f(x) = \ln x [(\ln x) - 1] \text{ و بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

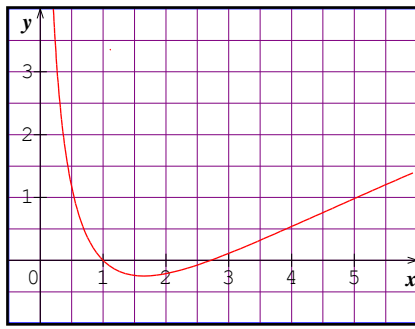
2. بما أن الدالة "ln" قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا من أجل

$$\text{كل } x \text{ من }]0; +\infty[, f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (2 \ln x - 1) , \text{ بما أن } x > 0 \text{ فإن إشارة } f'(x) \text{ هي من نفس إشارة } (2 \ln x - 1)$$

$$\text{لدينا } 2 \ln x - 1 \geq 0 \text{ تعني } \ln x \geq \frac{1}{2} \text{ أي } x \geq e^{\frac{1}{2}} \text{ ومنه:}$$

- من أجل كل x من $]0; e^{\frac{1}{2}}[$ ، $f'(x) \leq 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $]0; e^{\frac{1}{2}}[$.
- من أجل كل x من $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ ، $f'(x) \geq 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

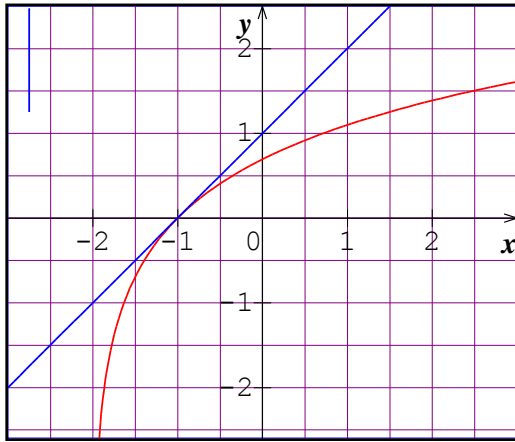
3. باستعمال قيم مساعدة نحصل على التمثيل البياني للدالة f .



x	$f(x)$
-0,5	
1	
e	
3	
4	
5	

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

تطبيق 8: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x+2)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. عين نقطة (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y = x$. أرسم (C_f) وهذا المماس.



الحل: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-2; +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{1}{x+2}$.

يكون المماس عند نقطة من (C_f) فاصلتها x موازيا لـ $y = x$: (Δ) لما

يكون $f'(x) = 1$ أي $\frac{1}{x+2} = 1$ ومنه $x = -1$ مع $f(-1) = 0$.

معادلة المماس عند النقطة $A(-1; 0)$ هي: $y = x + 1$.

(C_f) هو صورة منحنى الدالة "ln" بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$.

تطبيق 9: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$$\log x > 3 \quad (3)$$

$$\log x \leq -4 \quad (2)$$

$$\log x = 2 \quad (1)$$

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

$\log x = 2$ تعني $\log x = \log(10^2)$ أي $x = 10^2$. إذن مجموعة الحلول هي: $S = \{10^2\}$.

2. تكون المتراجحة (2) معرفة من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

$\log x \leq -4$ تعني $\log x \leq \log(10^{-4})$ و بما أن الدالة "log" متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ فإن $x \leq 10^{-4}$. إذن مجموعة الحلول هي: $S =]0; 10^{-4}]$.

3. تكون المتراجحة (3) معرفة من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

$\log x > 3$ تعني $\log x > \log(10^3)$ و بما أن الدالة "log" متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ فإن $x > 10^3$. إذن مجموعة الحلول هي: $S =]10^3; +\infty[$.

تطبيق 10: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)$

أدرس نهايتي الدالة f عند 1 وعند $+\infty$.

الحل:

• لدينا من جهة: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow 2} \ln X = \ln 2$ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 + 1) = \ln 2$
و لدينا من جهة ثانية: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 - 1) = -\infty$

نستنتج مما سبق أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow 1} [\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)] = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ لدينا إذن حالة عدم التعيين.

من أجل كل x من $]1; +\infty[$ ، $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$ ، بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = 1$ و علما أن $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$

نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = 0$

تطبيق 11: نعتبر الدالة f المعرفة على $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ $f(x) = x + 3\ln(2x - 1)$

1. أحسب $f'(x)$

2. عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

الحل:

1. من أجل كل x من $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ ، $f'(x) = 1 + 3 \times \frac{2}{2x - 1} = \frac{2x + 5}{2x - 1}$

2. لدينا: $f(1) = 1$ و $f'(1) = 7$. لدينا $(\Delta): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ و منه $(\Delta): y = 7x - 6$.

x	-3	1	$+\infty$
$u(x)$	3		$+\infty$
		e	

تطبيق 12: جدول التغيرات المقابل هو دالة u

استنتج جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-3; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \ln[u(x)]$$

الحل: نلاحظ من جدول تغيرات الدالة u أنه من أجل كل x من $[-3; +\infty[$ ، $u(x) \geq 0$ و منه فالدالة u موجبة تماما على المجال $[-3; +\infty[$. إذن

للدالتين u و $f = \ln \circ u$ نفس مجموعة التعريف. نعلم بالإضافة إلى ذلك أن لهما نفس اتجاه التغير. لدينا $f(-3) = \ln[u(-3)] = \ln 3$ و

$$f(1) = \ln[u(1)] = \ln e = 1$$

فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ بما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = +\infty$$

x	-3	1	$+\infty$
$f(x)$	$\ln 3$	1	$+\infty$

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

2- ادرس إشارة $g(x)$. (لاحظ أن $g(1)=0$)

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحنىها البياني في المستوى

السابق

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أنشئ المنحنى (C) .

كما نلاحظ:

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \quad \text{و} \quad g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln(x)$$

استنتج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1)=0$ والدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص الإشارة في الجدول الموالي

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	-	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t) = +\infty$ ومنه

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{t} \right] = 0 \text{ لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\ln(t)}{t} \right]^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = 0 \text{ لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ حساب}$$

: لدينا $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$: $]0, +\infty[$ من x التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (-\ln x)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = f(x)$$

يقبل مستقيما مقارب عموديا (C_f) ومنه المنحنى $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$: $x = 0$ معادلته .

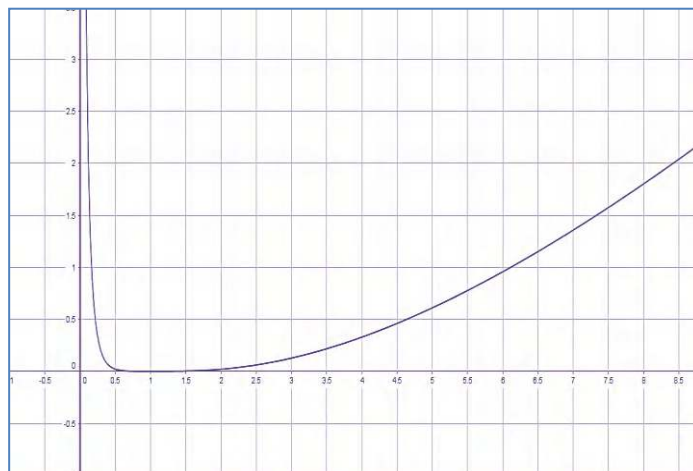
2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ بالحساب $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ و منه

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}(\ln x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{x} - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

3- رسم المنحنى (C) :



(1) g دالة معرفة $] -1, +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x - \ln(x+1)$

(أ) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

(ب) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$

(ج) أحسب $g(0)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $] -1, +\infty[$

(2) f دالة معرفة $] -1, +\infty[$ كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x - (x+1)\ln(x+1) \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم م م ($o, \vec{i}, \vec{j}$)

(أ) بين ان : $f(\alpha) = -(\alpha^2 + \alpha)$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب 0,01

(ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = -1$ ثم فسر النتيجة هندسيا

(ت) بين انه من اجل $x \in] -1, +\infty[$: $f'(x) = g(x)$.

(ث) بين انه من اجل $x \in] -1, +\infty[$: $f(x) = (x+1)^2 \left(\frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right)$ ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f

(3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

(4) أرسم المماس (T) والمنحني (C_f)

كماحل:

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(\frac{2x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

ب- لدينا : $g'(x) = 2 - \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$ إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x+1)$

x	-1	α	-0.5	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	0	+	+
$g(x)$	$+\infty$		$-1 + \ln 2$		$+\infty$

ب- بمان g مستمرة ومتناقصة تماما على $[-0,8 ; -0,7]$ $g(-0,8) \times g(-0,7) = 0,009 \times (-0,196) < 0$ حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $-0,8 < \alpha < -0,7$

ج- $g(0) = 0$ و استنتاج إشارة $g(x)$

x	-1	α	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+

معناه $g(\alpha) = 0$ $\ln(\alpha+1) = 2\alpha$ ومنه

$$f(x) = \alpha^2 + \alpha - (\alpha+1)\ln(\alpha+1)$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - (\alpha+1) \times (2\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 2\alpha^2 - 2\alpha = -(\alpha^2 + \alpha)$$

ومنه $0,06 < f(\alpha) < 0,31$ و $0,49 < \alpha^2 < 0,64$ و $-0,8 < \alpha < -0,7$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(h-1)^2 + (h-1) - h \ln(h)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h^2 - h - h \ln(h)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} (h-1 - \ln h) = +\infty \quad \text{ب.}$$

ومنه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند -1 على اليمين ، (C_f) يقبل نصف مماسا يوازي محور الترتيب معادلته $x = -1$

ت-

$$f'(x) = 2x + 1 - \ln(x+1) - (x+1) \times \frac{1}{x+1} = 2x - \ln(x+1) = g(x)$$

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

$$(x+1)^2 \left(\frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = \frac{(x+1)^2 x}{x+1} - \frac{(x+1)^2 \ln(x+1)}{x+1} = x^2 + x - (x+1)\ln(x+1) = g(x) \quad \text{ث-}$$

الجزء الثاني :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 - (x^2 + 2)e^{-x} - 4e^{-x}) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (1) \text{ أ-}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x^2 + 2)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x^2 e^{-x} - 4x e^{-x} - 4e^{-x}) = 0 \quad \text{ب-}$$

ومنه $y = x + 4$ مقارب مائل للمنحني بجوار $+\infty$

ج- درلسة الوضع النسبي : $[f(x) - y] = -(x+2)^2 e^{-x}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	-
الوضع النسبي	(Δ) تحت (C_f)	تحت (C_f) (Δ)	(Δ) تحت (C_f)

(2) أ- لدينا:

ومنه : $f'(x) = 1 + (x^2 + 4x + 4 - 2x - 4)e^{-x}$

اي : $f'(x) = 1 + (x^2 + 2x)e^{-x} = g(x)$ ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$2,05$		$+\infty$	
	$-\infty$		$-0,25$		

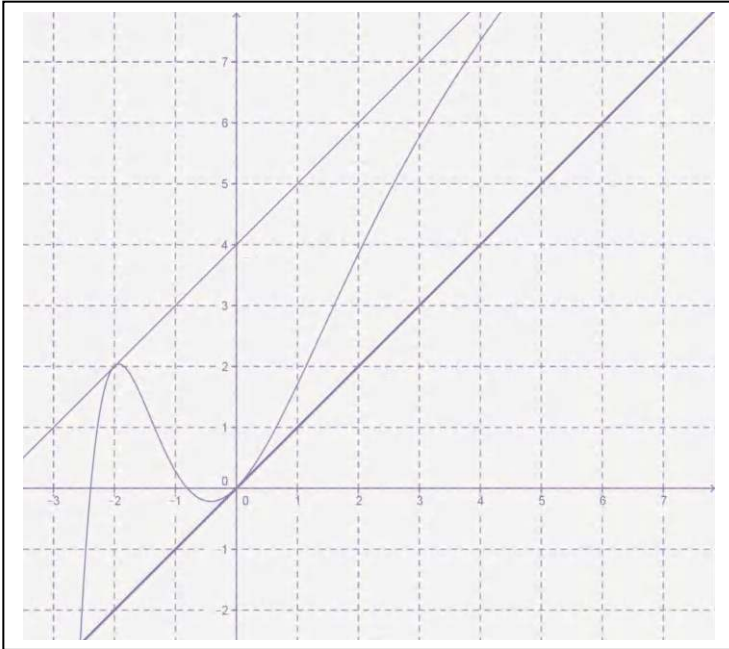
(3) اثبات ان المستقيم (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيينها

معناه $f'(x) = 1$ اي $x^2 + 2x = 0$ اذن : $x = 0$ او $x = -2$

معادلة المماس عند $x = -2$ هي: $y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$ أي $y = x + 4$ وهي معادلة (Δ)

معادلة المماس عند $x = 0$ هي: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي $y = x$ (T)

المناقشة البيانية :



(1) $m < 0$ للمعادلة حلا سالب

(2) $m = 0$ للمعادلة حلين احدهما سالب والاخر معدوم

(3) $0 < m < 4$ للمعادلة ثلاثة حلول احدهم موجب

(4) $m = 4$ للمعادلة حل سالب

(5) $m > 4$ المعادلة لاتقبل حلول

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ* / تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$

ب * / احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج * / أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أ* / بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتهما:

$y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب.

ب * / ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D') .

ج * / بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

(3) أرسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

(4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته: $y = mx - m\left(e + \frac{\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ* / بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب * / ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) والمنحنى (C_f) .

هـ الحل:

(1) أ* / التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$

$$\begin{aligned} f(x) &= x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = x - e + \ln\left(\frac{e^{2(x-e)} + 2}{e^{2(x-e)}}\right) \\ &= x - e + \ln(e^{2(x-e)} + 2) - \ln(e^{2(x-e)}) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)}) \end{aligned}$$

ب * / حساب النهايات $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ج * / دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1 - 2e^{-2(x-e)}}{1 + 2e^{-2(x-e)}}$

$f'(x) = 0$ معناه $1 - 2e^{-2(x-e)} = 0$ معناه $x = e + \ln \sqrt{2}$

x	$-\infty$	$e + \ln \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	○	+

الدالة f متزايدة تماما على $[e + \ln \sqrt{2}; +\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على $] -\infty; e + \ln \sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	$\ln 2/2 + e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$3\ln 2/2 + e$	$+\infty$

(2) * / نبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما: $y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب: بما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - e)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + e + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2] = 0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب / * دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

$$f(x) - (x - e) = \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$$1 + 2e^{-2(x-e)} > 1 \text{ معناه } \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) > \ln 1 = 0 \text{ ومنه: } f(x) - (x - e) > 0 \text{ إذن } (C_f) \text{ يقع فوق م.م } (D)$$

$$f(x) - (-x + e + \ln 2) = \ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2$$

$$2 + e^{2(x-e)} > 2 \text{ معناه } \ln(2 + e^{2(x-e)}) > \ln 2 \text{ ومنه:}$$

$$f(x) - (-x + e + \ln 2) > 0 \text{ إذن } (C_f) \text{ يقع فوق م.م } (D') \text{ من أجل كل عدد حقيقي } x$$

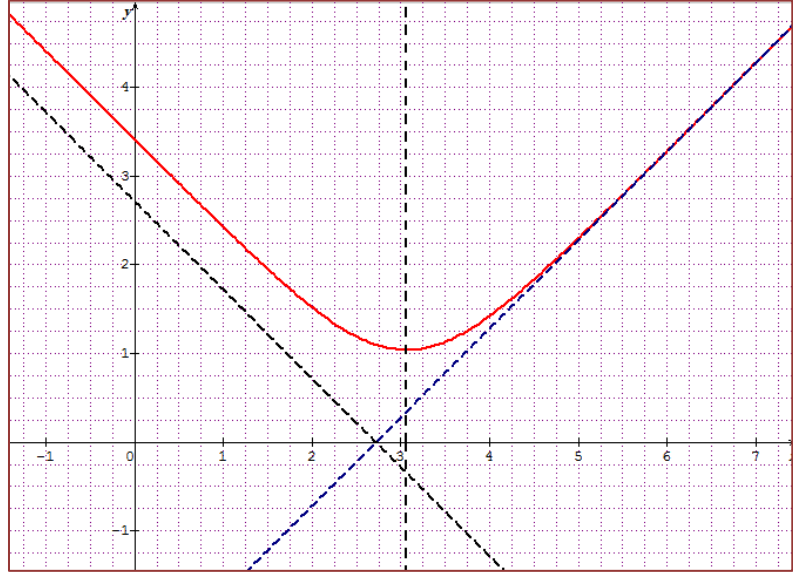
ج / * نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) :

$$\begin{aligned} f\left(2\left(\frac{\ln 2}{2} + e\right) - x\right) &= f(\ln 2 + 2e - x) \\ &= -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)}) = f(x) \end{aligned}$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2\left(\frac{\ln 2}{2} + e\right) - x$ من $\mathbb{R}$ ، لدينا

$$\text{ومنه: } x = \frac{1}{2} \ln 2 + e : (\Delta) \text{ محور تناظر للمنحنى } (C_f)$$

(3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f) .



(4) * / نبين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2}\right)$: $(D_m): y = mx - m\left(e + \frac{\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2}$

حيث m وسيط حقيقي.

$$\text{معناه } y = mx - m\left(e + \frac{\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{معناه } m\left(x - e - \frac{\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2} - y = 0$$

$$\frac{\ln 2}{2} - y = 0 \text{ و } x - e - \frac{\ln 2}{2} = 0 \text{ ومنه: جميع المستقيمات}$$

$$(D_m) \text{ تشمل النقطة الثابتة } A\left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2}\right)$$

ب* / مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) والمنحنى (C_f) :

$$\text{المستقيم } (D_m) \text{ يدور حول النقطة الثابتة } A\left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2}\right)$$

إذا كان $m = 1$ فإن (D_m) هو (D) لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = -1$ فإن (D_m) هو (D') لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = 0$ فإن (D_m) هو $(D_0): y = \ln \sqrt{2}$ لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-1; 1[$ فإنه لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ، (الوحدة 2 cm) .

1 / احسب نهايتي الدالة f عند e وعند $+\infty$ ، ثم فسّر النتائج هندسيا .

2 / بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسّر النتائج هندسيا . (لاحظ أن $x(1-\ln x) = x - x \ln x$) .

3 / بين انه من أجل كل x من $]0; e[\cup]e; +\infty[$: $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

4 / ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II) لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (انظر الشكل)

1 / أ . بقراءة بيانية حدّد عدد حلول المعادلة (E) التالية $g(x) = 0$ في المجال $]0; +\infty[$

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

ب . باستعمال جدول القيم التالي :

بين أن المعادلة (E) تقبل حلاً α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$

2 / أ . تحقق أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

ب . بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين فاصلتهما 1 و α .

ج . حدد انطلاقاً من (C_g) إشارة $g(x)$ على المجال $[1; \alpha]$ وبين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من المجال $[1; \alpha]$.

3 / أنشئ في نفس المعلم $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

كما نلاحظ:

$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$ ، $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$

1 / احسب نهايتي f عند e و $+\infty$ وتفسير النتائج :

$\lim_{x \rightarrow e} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = -\infty$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = e$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) موازٍ لمحور الترتيب .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ومنه محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

2 / تبين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ وتفسير النتيجة هندسيا :

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} x(1-\ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - x \ln x) = 0^+$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ومنه محور الترتيب هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

3 / تبين انه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

$$f'(x) = \frac{-\left((1-\ln x) - \frac{1}{x}x\right)}{(x(1-\ln x))^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2} : \text{حيث } f' \text{ ودالتها المشتقة } D_f \text{ تقبل الاشتقاق على } D_f$$

4 / دراسة اتجاه تغير الدالة f : من أجل كل x من D_f لدينا : $x^2(1-\ln x)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $\ln x$ وهي :

x	0	1	$e + \infty$
$f'(x)$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$	0

(II) لدينا $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$ ، $D_g =]0; +\infty[$.

1 / أ. تحديد عدد حلول المعادلة (E) في المجال $]0; +\infty[$: المنحنى (C_g) يقطع محور الفواصل في نقطتين ومنه المعادلة (E) تقبل حلين متميزين .

ب. تبين أن المعادلة (E) تقبل حلاً α حيث $2,2 < \alpha < 2,3$

الدالة g مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ فهي مستمرة على المجال $]2,2; 2,3[$ و $g(2,2) \approx -0,02$ و $g(2,3) \approx 0,12$ إذن $g(2,2) \times g(2,3) < 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً α حيث $2,2 < \alpha < 2,3$

$$2 / \text{أ. التحقق أنه من أجل كل } x \text{ من } D_f, f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

$$f(x) - x = \frac{1}{x(1-\ln x)} - x = \frac{1 - x^2(1 - \ln x)}{x(1-\ln x)} = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

ب. تبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين فاصلتهما 1 و α .

$$\text{لدينا } f(x) - x = 0 \text{ تكافئ } \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} = 0 \text{ أي أن } g(x) = 0 \text{ ومنه } x = 1 \text{ أو } x = \alpha .$$

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين فاصلتهما 1 و α .

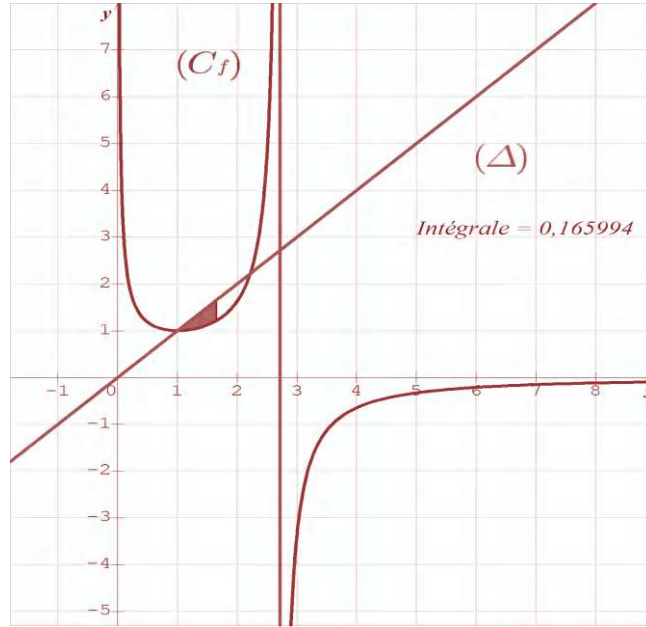
ج. تحديد انطلاقاً من (C_g) إشارة $g(x)$ على المجال $[1; \alpha]$

المنحنى (C_g) يقع تحت محور الفواصل على المجال $[1; \alpha]$ ومنه الدالة g سالبة تماماً على المجال $[1; \alpha]$ و تنعدم من أجل القيمتين 1 و α للمتغير x .

* تبين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من المجال $[1; \alpha]$:

لدينا $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ و من أجل كل x من $[1; \alpha]$ ، $x(1-\ln x) > 0$ و $g(x) \leq 0$ ومنه $f(x) - x \leq 0$ لكل x من المجال $[1; \alpha]$.

3 / إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :



5

I. الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$.

1.أ- أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

ب- احسب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس اتجاه تغيرها. 2.أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; +\infty[$ ثم أعط حصر α سعته 10^{-2} .

ب- عين إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:
$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{-7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \end{cases}$$

1.أ- أدرس استمرارية واشتقاقية الدالة g عند 0.

ب- عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

2. لتكن g' الدالة المشتقة للدالة g . من أجل كل x من $]0; +\infty[$. أحسب $g'(x)$ ثم تحقق أن: $g'(x) = x.f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3.أ- استنتج إشارة $g'(x)$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

ب- شكل جدول التغيرات للدالة g .

الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$.

1.أ- أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ وبالتالي: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \ln(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ وبالتالي: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \ln(x) = +\infty \end{cases}$$

ب- احسب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس اتجاه تغيرها.

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{2x+1}{2x}$$

لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $2x > 0$ و $2x+1 > 0$ وبالتالي: $f'(x) > 0$. إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

زمنه يكون جدول التغيرات كالتالي:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2.أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; +\infty[$ ثم أعط حصر α سعته 10^{-2} .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α

حيث: $1.72 < \alpha < 1.73$. لا حظ أن $f(1) < 0$ و $f(2) > 0$ إذن

ب- عين إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{-7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \end{cases}$$

1. أ-دراسة استمرارية الدالة g عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \right) = 0 = g(0) \text{ وبالتالي: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-7}{8}x^2 + x \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4}x^2 \ln x \right) = 0 \end{cases}$$

اذن الدالة مستمرة عند 0. (لا تنسى: $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$ نهاية شهيرة).

دراسة اشتقاقية الدالة g عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-7}{8}x + 1 - \frac{1}{4}x \ln x \right) = 1$$

وبالتالي الدالة قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = 1$.

ب-عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ وبالتالي: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-7}{8}x^2 + x \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}x^2 \ln x \right) = 0 \end{cases}$$

2. لتكن g' الدالة المشتقة للدالة g . من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

أحسب $g'(x)$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث:

$$g'(x) = \frac{-7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{4} = -2x - \frac{1}{2}x \ln x + 1$$

$$g'(x) = x \left(-2 - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2} \ln x$$

لدينا:

$$g'(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$g'(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ثم تحقق أن:

3.أ- استنتج إشارة $g'(x)$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$

$$g'(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

لدينا:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)$$

نعلم أن: $x > 0$ فان: $g'(x)$ من إشارة $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

من جدول إشارة الدالة f نجد:

$$g'(x) < 0$$

و بالتالي: $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ يصبح لدينا: $x > \frac{1}{\alpha}$ يعني: $\frac{1}{x} < \alpha$ اذا كان

$$g'(x) = 0$$

و بالتالي: $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ يصبح لدينا: $x = \frac{1}{\alpha}$ يعني: $\frac{1}{x} = \alpha$ اذا كان

$$g'(x) > 0$$

و بالتالي: $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ يصبح لدينا: $x < \frac{1}{\alpha}$ يعني: $\frac{1}{x} > \alpha$ اذا كان

ب- شكل جدول التغيرات للدالة g .

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$g(\alpha)$	$-\infty$

لتكن الدالة f_k المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$ ، حيث k عدد حقيقي موجب تماما.

و (C_k) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الرسم: $\|\vec{i}\| = 5cm, \|\vec{j}\| = 10cm$.

الجزء (أ):

1. الدالة f_1 معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$.

احسب $f_1'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f_1 واستنتج اتجاه تغيرها.

2. بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$ ، ثم استنتج نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$.

3. شكل جدول تغيرات الدالة f_1 .

الجزء (ب):

احسب $f_k'(x)$ من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f_k .

2. من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f_k(x) = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$ ، ثم استنتج نهاية الدالة f_k عند $+\infty$.

3. أ- شكل جدول تغيرات الدالة f_k ..

ب- بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$.

4. عين معادلة المماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند النقطة O .

5. ليكن p و m عدنان حقيقيان موجبان تماما حيث $p < m$. أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_p) و (C_m) .

6. ارسم المماسين (T_1) ، (T_2) والمنحنيين (C_1) و (C_2) على الترتيب.

التمرين:

الجزء (أ):

الدالة f_k المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$ ، حيث k عدد حقيقي موجب تماما.

الجزء (أ):

1. الدالة f_1 معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$.

حساب $f_1'(x)$: الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ،

$$f_1'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} - 1 = \frac{e^x + 1 - e^x + x}{e^x + x} = \frac{1 - x}{e^x + x}$$

واستنتج اتجاه تغيرها:

لدينا: $f_1'(x) = \frac{1 - x}{e^x + x}$ ، بما أن: $x \geq 0$ فإن إشارة $f_1'(x)$ من إشارة البسط أي: $1 - x$

x	0	1	$+\infty$
$1 - x$	+	0	-

وبالتالي: f_1 متزايدة على المجال $[0; 1]$ ومتناقصة على المجال $[1; +\infty[$

2. بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \ln(e^x + x) - x = \ln\left(e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) - x \\ &= x + \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) - x = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) \end{aligned}$$

استنتج نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{e^x}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$$

3. شكل جدول تغيرات الدالة f_1 :

x	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	0	$f_1(1)$	0

حيث: $f_1(0) = 0, f_1(1) = \ln(e + 1) - 1$

الجزء (ب):

حساب $f_k'(x)$ من أجل كل x من $[0; +\infty[$:

الدالة f_k قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ،

$$f'_k(x) = \frac{e^x + k}{e^x + kx} - 1 = \frac{e^x + k - e^x + kx}{e^x + kx} = \frac{k(1-x)}{e^x + kx}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f_k :

لدينا: $x \geq 0$ و $k > 0$ وبالتالي $f'_k(x)$ من نفس إشارة $1-x$:

مما سبق نجد أن: f_k متزايدة على المجال $]0; 1[$ و متناقصة على المجال $]1; +\infty[$

2. بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f_k(x) = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \ln(e^x + kx) - x = \ln\left(e^x \left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right) - x \\ &= x + \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right) - x = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right) \end{aligned}$$

استنتاج نهاية الدالة f_k عند $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(k \frac{x}{e^x}\right) = 0, k > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$$

3. أ- شكل جدول تغيرات الدالة f_k .

x	0	1	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-
$f_k(x)$	0	$f_k(1)$	0

حيث: $f_k(0) = 0, f_k(1) = \ln(e+k) - 1$

ب- اثبات أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$

$$f_k(x) \leq f_k(1)$$

من جدول التغيرات نلاحظ أن: $f_k(1) = \ln(e+k) - 1 = \ln(e+k) - \ln e = \ln\left(\frac{e+k}{e}\right)$

$$\begin{aligned} f_k(x) &\leq \ln\left(\frac{e+k}{e}\right) \leq \frac{k}{e} \text{ أي:} \\ f_k(x) &\leq \frac{k}{e} \end{aligned}$$

اذن: $f_k(x) \leq \ln\left(\frac{e+k}{e}\right)$ ، نعلم أنه من أجل $x > 0$ لدينا: $\ln(x) \leq x$ وبالتالي:

4. تعيين معادلة المماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند النقطة O .

$$(T_k): y = f_k'(0)x + f_k(0) \quad \text{معادلة المماس } (T_k):$$

$$(T_k): y = kx$$

5. ليكن $0 < p < m$. دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_p) و (C_m) .

ندرس إشارة الفرق: $f_p(x) - f_m(x)$ ، نجد:

$$f_p(x) - f_m(x) = \ln(e^x + px) - x - \ln(e^x + mx) + x$$

$$= \ln(e^x + px) - \ln(e^x + mx) = \ln\left(\frac{e^x + px}{e^x + mx}\right)$$

$$e^x + px < e^x + mx$$

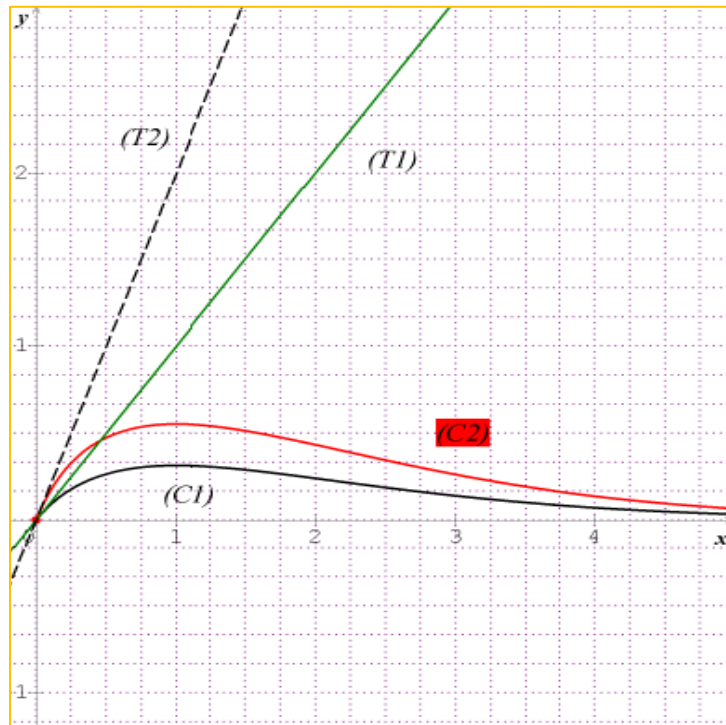
$$\frac{e^x + px}{e^x + mx} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{e^x + px}{e^x + mx}\right) < 0 \quad \text{نستنتج أن:} \quad \begin{array}{l} e^x + px > 0 \\ e^x + mx > 0 \end{array} \quad \text{بما أن: } 0 < p < m \text{ فإن:}$$

وبالتالي: $f_p(x) - f_m(x) < 0$ اذن المنحنى (C_p) يقع تحت (C_m) من أجل $0 < p < m$.

6. رسم المماسين (T_1) ، (T_2) والمنحنيين (C_1) و (C_2) على الترتيب.

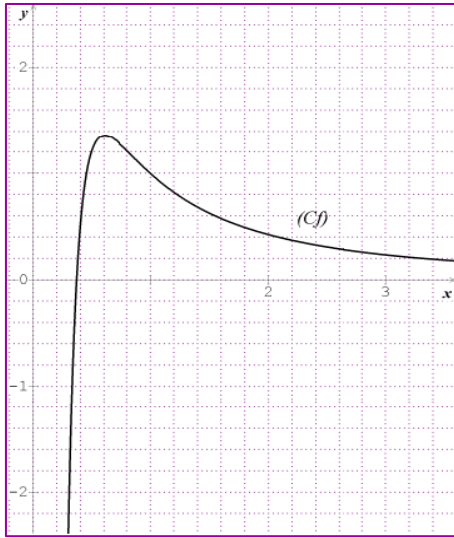
$$(T_1): y = x$$

$$(T_2): y = 2x$$



١. لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ ، وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$. (أنظر الشكل المقابل)



١.أ- أحسب نهاية الدالة f عند 0 على اليمين، فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا..

٢.أ- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$.

ب- حل في $]0; +\infty[$ المتراجحة: $1 - 2 \ln x > 0$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

٣.أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة يطلب تعيين احداثياتها.

ب- استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

٢. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بالعدد I_n مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين

الذين معادلتهما: $x = \frac{1}{e}$ و $x = n$.

١. بين أن: $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$

٢. بين أن $F: x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

٣. أحسب بدلالة n .

٤. أحسب نهاية (I_n) عند $+\infty$.

كالحل:

١. لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$.

١.أ- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} (1 + \ln x) = -\infty$

التفسير: $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

التفسير: $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

أ.2- أثبات أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$.

اذن: $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$.

ب- حل في $]0; +\infty[$ المتراجحة: $1 - 2 \ln x > 0$

$$-1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow -2 \ln x > 1$$

أي: $S = \left] 0; e^{\frac{-1}{2}} \right[$ وبالتالي: $2 \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x < e^{\frac{-1}{2}}$$

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ من إشارة البسط أي: $1 - 2 \ln x$ أي:

x	0	$e^{\frac{-1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$e^{\frac{-1}{2}}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{e}{2}$	0

أ.3- أثبات أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة.

نقوم بحل المعادلة: $f(x) = 0$ أي:

$$\frac{1 + \ln x}{x^2} =$$

$$1 + \ln x = 0, [x^2 \neq 0, x \in]0; +\infty[$$

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

وبالتالي احداثيا النقطة هي: $\left(\frac{1}{e}; 0\right)$.

استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ ، نلخصها في الجدول التالي:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بالعدد I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتهما: $x = \frac{1}{e}$ و $x = n$.

1. اثبات أن: $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$ على المجال $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$ لدينا: $0 \leq f(x) \leq \frac{e}{2}$ وبالتالي

$$0 \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{e}{2} dx$$

$$0 \leq I_2 \leq \frac{e}{2} \int_{\frac{1}{e}}^2 1 dx$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx \quad \text{لأن:} \quad 0 \leq I_2 \leq \frac{e}{2} [x]_{\frac{1}{e}}^2 \quad \text{أي:}$$

$$0 \leq I_2 \leq \frac{e}{2} \left[2 - \frac{1}{e} \right]$$

$$0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$$

2. تبين أن $F: x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا الدالة $F: x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، حيث:

$$F'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - (-2 - \ln x)}{x^2} = \frac{-1 + 2 + \ln x}{x^2} = \frac{1 + \ln x}{x^2} = f(x).$$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x).$$

3.- حساب I_n بدلالة n .

على المجال $\left[\frac{1}{e}; n\right]$ لدينا:

$$I_n = \int_{\frac{1}{e}}^n f(x) dx = \left[\frac{-2 - \ln x}{x} \right]_{\frac{1}{e}}^n = \left(\frac{-2 - \ln(n)}{n} \right) - \left(\frac{-2 - \ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} \right)$$

$$= \left(\frac{-2 - \ln(n)}{n} \right) - (-e)$$

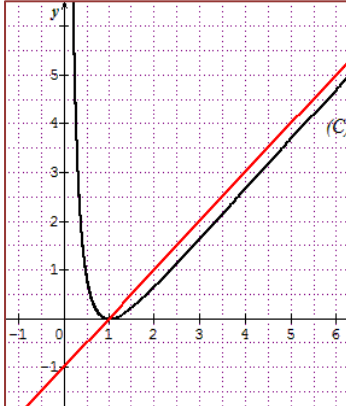
$$I_n = e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n}$$

4.- حساب نهاية (I_n) عند $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n} \right], \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e$$

لدينا :

f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = ax - 1 - \frac{b \ln x}{x}$ ، حيث a, b عدنان حقيقيان وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (أنظر الشكل).



الجزء الأول:

بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

1. عين $f(1)$ و $f'(1)$.

2. عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم على يمين العدد 0.

3. عين حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

الجزء الثاني:

1. أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

2. أثبت أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم أدرس وضعيته بالنسبة الى (C) .

3. أ- ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda \geq 1$.

احسب $A(\lambda)$ مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتها $x=1$ و $x=\lambda$.

ب- عين قيم العدد الحقيقي λ حتى تكون $A(\lambda) > \frac{1}{2}$.

الجزء الثالث: نعتبر F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = -\frac{1}{2}$. وليكن (C_F) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

بدون حساب عبارة $F(x)$ أجب عما يلي:

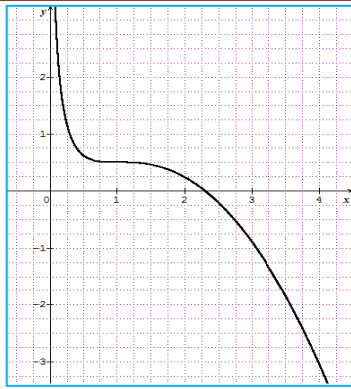
1. حدد اتجاه تغير الدالة F .

2. يبين أن (C_F) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

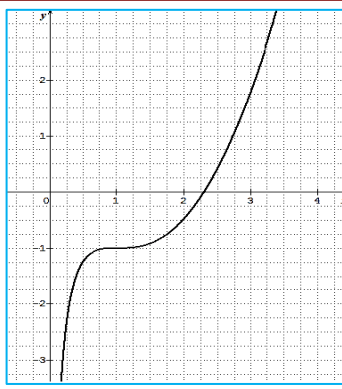
3. أ- بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_F) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = \frac{-1}{2}$.

ب- استنتج وضعية (C_F) بالنسبة الى المماس (T) .

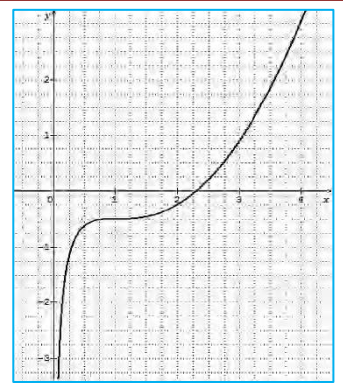
4. من بين المنحنيات الثلاثة التالية عين المنحنى (C_F) مع التبرير.



(3)



(2)



(1)

كوالحل:

ا بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

1. تعين $f(1)$ و $f'(1)$:

لدينا: $f(1) = 0$ و $f'(1) \neq 0$ (لأن المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 موازي لمحور الفواصل)

2. نهاية الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. تعين حسب قيم x إشارة $f'(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

II. 1. أثبات أن من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

لدينا: $f(1) = 0$ و $f'(1) \neq 0$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a - 1 - \frac{b \ln 1}{1} = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{b - b \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow b = 1$$

وبالتالي: $a = b = 1$ اذن: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

2. أثبات أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x} - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

اذن: $y = x - 1$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C).

دراسة الوضعية بالنسبة الى (C):

$$f(x) - y = \frac{-\ln x}{x} \quad \text{ندرس اشارة الفرق: } f(x) - y \quad \text{نجد:}$$

نعلم أن: $x > 0$ وبالتالي حسب اشارة $-\ln x$ أي:

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	--

اذن:

من أجل $0 < x < 1$ المنحنى (C) فوق المستقيم (Δ).

من أجل $x > 1$ المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ).

لما $x = 1$ المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $A(1; 0)$.

3. أ- ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda \geq 1$.

احسب $A(\lambda)$ مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتهما $x = 1$ و $x = \lambda$.

على المجال $[1; \lambda]$ المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ) وبالتالي:

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda y - f(x) dx = \int_1^\lambda x - 1 - x + 1 + \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^\lambda = \frac{1}{2} (\ln \lambda)^2$$

$$(u^2)' = 2.u'.u \Rightarrow \int u'.u = \frac{u^2}{2} + c \quad \text{نذكر أن:}$$

ب- تعين قيم العدد الحقيقي λ حتى تكون $A(\lambda) > \frac{1}{2}$.

معناه: $\frac{1}{2}(\ln \lambda)^2 > \frac{1}{2}$ وبالتالي: $(\ln \lambda)^2 > 1 \Rightarrow (\ln \lambda)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (\ln \lambda - 1)(\ln \lambda + 1) > 0$ ومنه: $\lambda \in]e; +\infty[$

III. 1. تحدد اتجاه تغير الدالة F .

لدينا: $F'(x) = f(x)$ من جدول التغيرات لدينا: $f(x) \geq 0$ أي: $F'(x) \geq 0$ ومنه الدالة F متزايدة على $]0; +\infty[$.

2. تبين أن (C_F) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

نعلم أن: $F''(x) = f'(x)$ أي: إشارة $F''(x)$ من إشارة $f'(x)$ التي تنعدم عند 1 وتغير إشارتها.

اذن (C_F) يقبل نقطة انعطاف $B(1; F(1))$ أي: $B\left(1; \frac{1}{2}\right)$

3. أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_F) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(T): y = F'(1)(x-1) + F(1)$$

$$(T): y = f(1)(x-1) + F(1)$$

$$(T): y = -\frac{1}{2}$$

ب- استنتاج وضعية (C_F) بالنسبة إلى المماس (T) .

على المجال $]0; 1[$ المنحنى (C_F) يقع تحت المماس (T)

على المجال $]1; +\infty[$ المنحنى (C_F) يقع تحت المماس (T)

المنحنى (C_F) يقطع المماس (T) في النقطة $B\left(1; \frac{1}{2}\right)$

4. المنحنى الممثل للدالة F هو الشكل الأول (1) لأنه يحقق: $F(1) = -\frac{1}{2}$ والدالة متزايدة والمنحنى (C_F) يقبل نقطة انعطاف $B(1; F(1))$.

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ ، ثم حدد مجموعة تعريف الدالة f .

2. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$ ، ثم بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ يطلب إيجاد معادلته.

5. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$ ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

6. شكل جدول تغيرات الدالة f .

7. بين أن: $f''(x) = \frac{-\sqrt{e^x}((\sqrt{e^x} - 1)^2 - 2)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

8. ارسم (C_f) .

9. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x - e^m = 2(-1 + \sqrt{e^x})$.

كما نحل:

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$

1. التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$

لدينا: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$

$$\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1>0$$

و عليه: $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1>0\right\}$ ، دائما محقق من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$D_f = \mathbb{R}$$

2. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \ln 2$$

نستنتج أن: $y = \ln 2$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ موازي لمحور الفواصل.

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1 = +\infty$$

3. التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \ln\left[e^x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right] \\ &= \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \\ &= x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \\ \Rightarrow f(x) &= x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) - x\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = \ln(1) = 0$$

و بالتالي: المستقيم $y = x$ المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

5. الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)\right]', \\ &= \frac{\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)'}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} = \frac{e^x - 2\left(\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}\right)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} = \frac{e^x - \frac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \text{ أي:} \\ &= \frac{e^x - \sqrt{e^x}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \end{aligned}$$

اشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$: من اشارة: $\sqrt{e^x}-1$ ومنه: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x}-1=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	

6. جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$\ln 2$	0	$+\infty$

7. اثبات أن: $f''(x) = \frac{-\sqrt{e^x} \left((\sqrt{e^x} - 1)^2 - 2 \right)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}$

لدينا: $f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ الدالة f' قابلة للاشتقاق:

و عليه:

$$f''(x) = \left[\frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \right]' = \frac{\left(e^x - \frac{\sqrt{e^x}}{2} \right) (e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) - (e^x - \sqrt{e^x}) \cdot (e^x - \sqrt{e^x})}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}$$

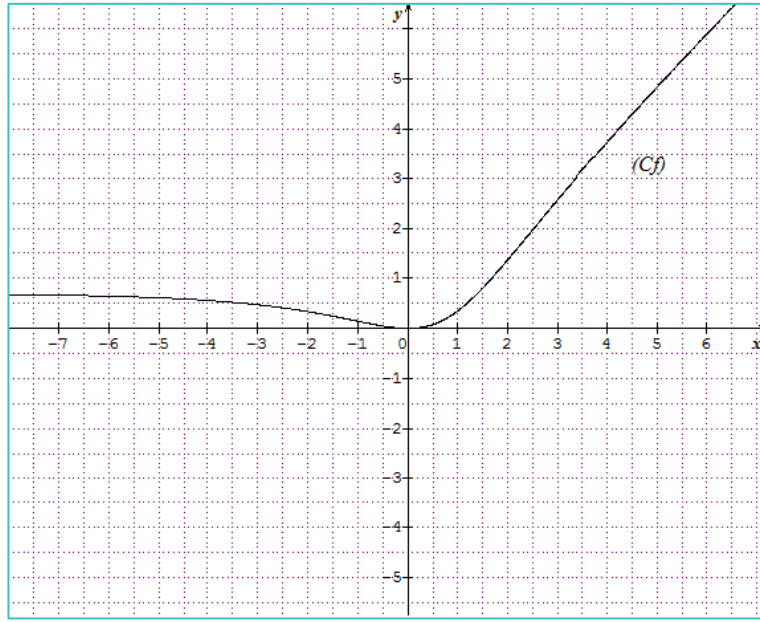
$$= \frac{2e^x - \frac{e^x \sqrt{e^x}}{2} - \sqrt{e^x}}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} = \frac{-\sqrt{e^x}}{2} \frac{(-4\sqrt{e^x} + e^x + 2)}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} = \frac{-\sqrt{e^x} \left((\sqrt{e^x} - 1)^2 - 2 \right)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}$$

اشارة $f''(x)$ من اشارة $\left((\sqrt{e^x} - 2)^2 - 2 \right)$ أي:

x	$-\infty$	$2 \ln(2 - \sqrt{2})$	$2 \ln(2 + \sqrt{2})$	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	0 -	

نلاحظ أن: f'' (المشتقة الثانية الدالة f) تنعدم وتغير من اشارتها فان النقطة $\left(2(\ln 2 - \sqrt{2}), f(2(\ln 2 - \sqrt{2})) \right)$ هي نقطة انعطاف.

8. ارسم (C_f) .



9. المناقشة:

لدينا:

$$e^x - 2(-1 + \sqrt{e^x}) = e^m$$

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^m \Leftrightarrow \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = \ln e^m$$

$$f(x) = m$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذا المعادلة: $y = m$.

إذا كان: $m < 0$ المعادلة لا تقبل حلول

إذا كان $m = 0$ المعادلة لها حل وحيد

إذا كان $0 < m < \ln 2$ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m \geq \ln 2$ المعادلة لها حل وحيد.

انعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \ln(1+x)$ وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (D) المستقيم ذا المعادلة: $y = x$.

1.أ- احسب نهايتي الدالة f .

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f .

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 - f(x)$.

1.أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. نذكر أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

ج- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha \leq 0$ و $2 \leq \beta \leq 3$.

3. عين حسب قيم x إشارة $g(x)$.

4. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) .

5. أرسم (D) و (C_f) .

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $2 \leq u_n \leq \beta$.

2. هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل جوابك.

كما نحل:

I. الدالة f معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \ln(1+x)$.

1.أ- حساب نهايتي الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 + \ln(1+x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(1+x) = +\infty$$

ب- اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ حيث

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \text{ بما أن } x > -1 \text{ فإن } \frac{1}{x+1} > 0 \text{ وبالتالي } f'(x) > 0 \text{ اذن الدالة } f \text{ متزايدة تماما على }]-1; +\infty[.$$

1.1.1. حساب

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) - x = 1 + \ln(x+1) - x = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(x+1) - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x+1) \left[\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1} \right] \quad \text{ب-} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ج- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ حيث

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - 1 = \frac{1}{x+1} - 1 \\ &= \frac{-x}{x+1} \end{aligned}$$

بما أن $x > -1$ فإن $\frac{1}{x+1} > 0$ وبالتالي اشارة $g'(x)$ من اشارة $(-x)$

x	-1	0	$+\infty$
$-x$		0	$-$

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

2. اثبات أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha \leq 0$ و $2 \leq \beta \leq 3$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1; 0]$ ولدينا $g(0) = 1 > 0$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حل α حيث $\alpha \leq 0$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ولدينا $g(0)=1>0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

وعليه لدينا $g(2) \times g(3) < 0$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حل β حيث $2 \leq \beta \leq 3$.

3. اشارة $g(x)$.

x	-1	α	β	$+\infty$	
$g(x)$	-	0	+	0	-

4. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) :

يعني ندرس اشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = 1 + \ln(x+1) - x$$

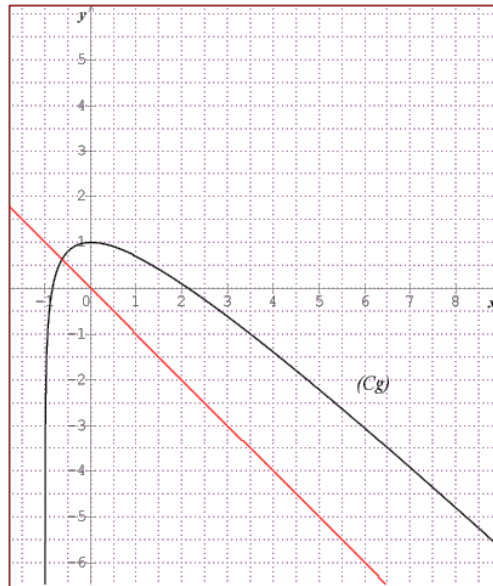
وعليه :

$$= g(x)$$

وبالتالي اشارة الفرق من اشارة $g(x)$ أي:

x	-1	α	β	$+\infty$	
$f(x)-y$	-	0	+	0	-
الوضعية	(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)	(C_f) تحت (D)		

5. الرسم:



III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n \leq \beta$.

نضع $2 \leq u_n \leq \beta$ $P(n)$

من اجل $n = 0$ لدينا $2 \leq 2 \leq \beta$ أي $2 \leq u_0 \leq \beta$ وبالتالي: $P(0)$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2 \leq u_{n+1} \leq \beta$.

$$\begin{array}{lcl} 2 \leq u_n \leq \beta & & \\ \text{لدينا:} & f(2) \leq f(u_n) \leq f(\beta) & \\ \Leftrightarrow f(\beta) = \beta & \Leftrightarrow f(\beta) - \beta = 0 & \\ \Leftrightarrow f(\beta) = \beta & \Leftrightarrow f(\beta) - \beta = 0 & \end{array}$$

و $2 \leq 1 + \ln 3$ لأن:

$$\begin{array}{l} 1 + \ln 3 \leq u_{n+1} \leq \beta \\ 2 \leq u_{n+1} \leq \beta \end{array}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ محققة.

وعليه حسب مبدأ البرهان بالتراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n \leq \beta$.

2. المتتالية (u_n) متقاربة:

على المجال $[\alpha; \beta]$ ، $g(x) \geq 0$ أي: $f(x) - x \geq 0$ وبما أن $2 \leq u_n \leq \beta$

اذن $f(u_n) - u_n \geq 0$ يعني $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ينتج عليه أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد β فإن (u_n) متتالية متقاربة.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}, x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2cm)

1.- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2.أ-أدرس استمرارية الدالة f على يمين العدد 0.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ ، هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

3.أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4.بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها.

5.أرسم المنحنى (C_f) .

$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{1 - \ln x}, x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

1.بين أن $D_f = D_h$ و من أجل كل x من D_h ، $h(x) = f(x) + 1$.

2.استنتج جدول تغيرات الدالة h .

3.أرسم (C_h) منحنى الدالة h في المعلم السابق.

4.أحسب بالسنتيمتر المربع (cm^2) وبدلالة λ مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_h) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 0$

، $x = \lambda$ حيث: $0 \leq \lambda \leq e$

5.أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow e} A(\lambda)$.

كامل:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}, x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1.- تعين D_f :

لدينا: $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$ الدالة f معرفة من أجل $x > 0$ و $1 - \ln x \neq 0$ أي: $x \neq e$

اذن: $D_f = [0; e[\cup]e; +\infty[$

2.أ-دراسة استمرارية الدالة f على يمين العدد 0:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = -1 \\ &= f(0) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= f(0) = -1\end{aligned}$$

ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0.

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln x}{1 - \ln x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - x \ln x} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

و عليه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0

3. اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $D_f = [0; e[\cup]e; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x) - \ln x \cdot \left(\frac{1}{x} \right)}{(1 - \ln x)^2} = \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$$

من أجل كل x من $D_f = [0; e[\cup]e; +\infty[$ لدينا: $f'(x) > 0$ لأن $x \geq 0$ و $(1 - \ln x)^2 > 0$

اذن الدالة f متزايدة تماما على $[0; e[\cup]e; +\infty[$.

نحسب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{\ln x}{1 - \ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln x}{1 - \ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = -1$$

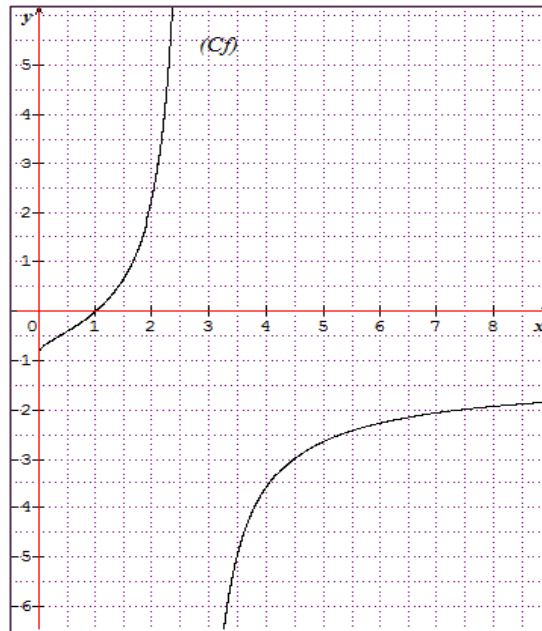
جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

4. لدينا: الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]0; e[\cup]e; +\infty[$ حيث: $f''(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2 (1 - \ln x)^3}$.

نلاحظ أن الدالة f'' تنعدم عند $\frac{1}{e}$ وتغير من إشارتها اذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أي $I\left(\frac{1}{e}; \frac{-1}{2}\right)$ أي $I\left(\frac{1}{e}; f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$

5. رسم المنحنى (C_f) :



$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{1 - \ln x}, x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

1. الدالة h معرفة من أجل $1 - \ln x \neq 0$ أي: $x \neq e$ وبالتالي: $D_f = D_h = [0; e[\cup]e; +\infty[$:

ومن أجل كل x من D_h لدينا:

$$f(x) + 1 = \frac{\ln x}{1 - \ln x} + 1 = \frac{1}{1 - \ln x} = h(x)$$

$$f(0) + 1 = -1 + 1 = 0 = h(0) \text{ ولدينا:}$$

اذن من أجل كل x من $[0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $h(x) = f(x) + 1$

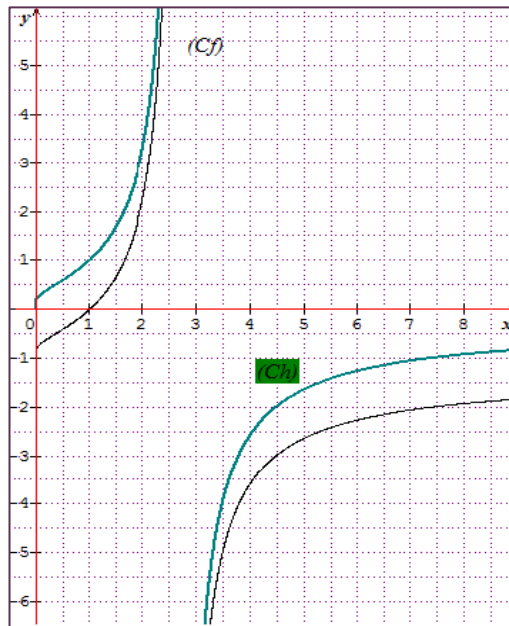
2. جدول تغيرات الدالة h :

من أجل كل x من $[0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $h'(x) = f'(x)$:

x	0	e	$+\infty$
$h'(x)$			
$h(x)$	0	$+\infty$ $-\infty$	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 1 = -1 + 1 = 0 \text{ لأن:}$$

3. رسم (C_h) :



4. أحسب بالسنتيمتر المربع (cm^2) وبدلالة λ مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنين (C_f) و (C_h) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 0$ ، $x = \lambda$ حيث: $0 \leq \lambda \leq e$.

لدينا: على المجال $[0; \lambda]$ ، (C_h) يقع فوق المنحنى (C_f) وبالتالي:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \left(\int_0^\lambda h(x) - f(x) dx \right) \times 4cm^2 = \left(\int_0^\lambda 1 dx \right) \times 4cm^2 \\ &= \left([x]_0^\lambda \right) \times 4cm^2 = 4\lambda cm^2 \end{aligned}$$

5. حساب

$$\lim_{\lambda \rightarrow e} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow e} 4\lambda = 4e.cm^2$$

1. g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$.

أ- أدرس تغيرات الدالة g .

ب- احسب $g\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

2. f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و

متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (نأخذ: $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 1cm$)

أ- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب- عين نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) .

4. أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

5. لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x[(\ln x)^2 + a \ln x + b]$ حيث a و b عددا حقيقيان.

أ- عين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $(\ln x)^2$.

ب- احسب بالسنتيمتر المربع $(cm)^2$ المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = \frac{1}{e}$ ، $x = 1$ و

$$y = ex - e.$$

6. لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $k(x) = -\frac{1}{2}(\ln|x|)^2 - e|x| + e$

أ- أثبت أن k دالة زوجية

ب- اشرح كيف يمكن استنتاج منحنى الدالة k انطلاقا من منحنى الدالة f ثم ارسمه في نفس المعلم.

7. ليكن m وسيطا حقيقيا.

أ- بين أن كل المستقيمات (Δ_m) حيث: $y = mx - m$ تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx - m$.

1. g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$.

أ-دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + e = e \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{نهاية شبيهة:} \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} + e \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \end{array} \right.$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{1}{x} \cdot x - \ln x = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

من اجل أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، اشارة $g'(x)$ من اشارة $1 - \ln x$ أي:

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$	+	0	-

و بالتالي جدول تغيراتها كالاتي:

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e} + e$	e

ب-لدينا:

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{e}\right)} + e = \frac{-\ln e}{\left(\frac{1}{e}\right)} + e = 0$$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = 0$$

وعليه اشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

2. f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$

أ- من أجل كل x من $]0; +\infty[$ الدالة f قابلة للاشتقاق:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ln x + e \quad \text{تذكر أن: } (f^n)' = n f' f^{n-1}$$

$$= g(x)$$

وبالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

ب- نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e = +\infty \quad \text{ولدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{3}{2} - e \quad \text{حيث:}$$

3. أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = e \end{cases} \Rightarrow (T): y = ex - e \quad \text{ومنه:}$$

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) :

نقوم بحساب إشارة الفرق: $f(x) - y$:

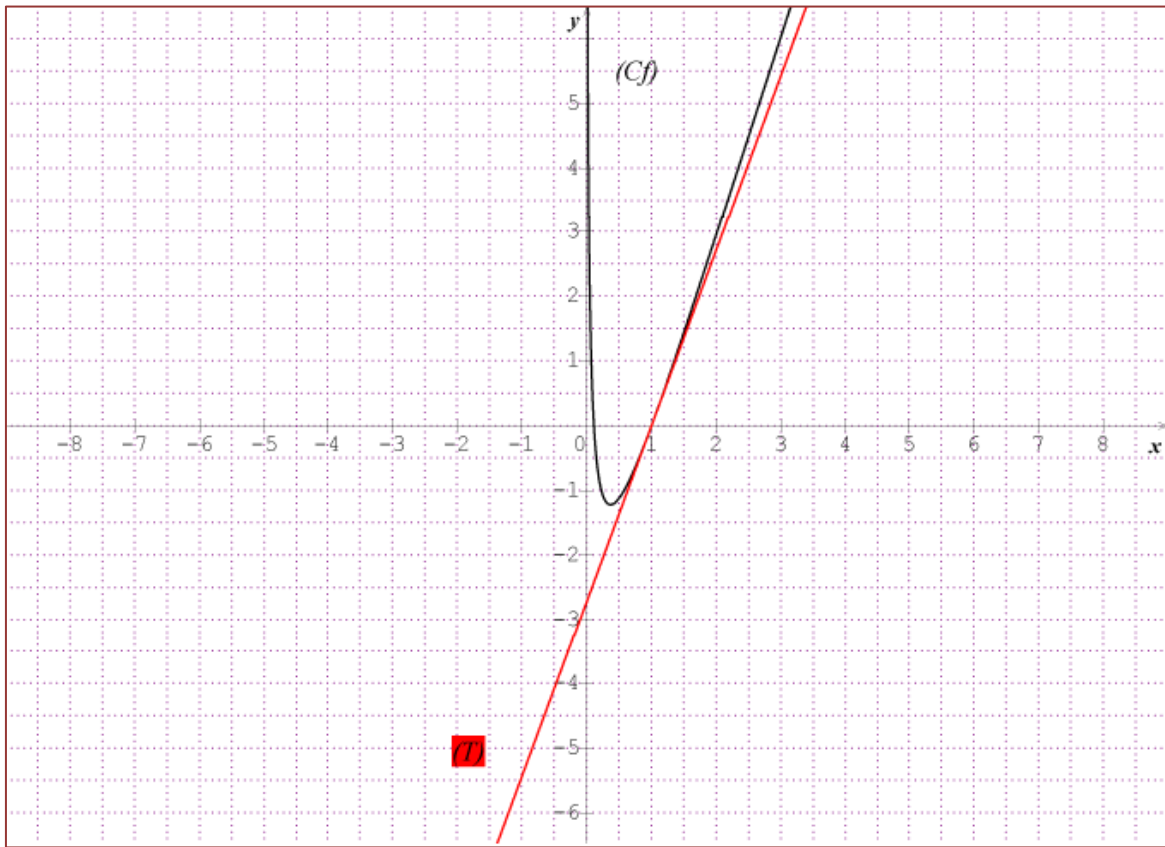
$$f(x) - y = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e - (ex - e) \\ = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $\frac{1}{2}(\ln x)^2 \geq 0$.

وبالتالي: لما $x=1$ المنحنى (C_f) يقطع المماس (T) في النقطة $w(1;0)$.

من أجل $x \in]0;1[\cup]1; +\infty[$ المنحنى (C_f) يقع فوق المماس (T) .

4. رسم المماس (T) والمنحنى (C_f) :



5. لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x[(\ln x)^2 + a \ln x + b]$ حيث a و b عددا حقيقيان.

أ- تعين a و b :

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$: $h'(x) = (\ln x)^2 + (a+2)\ln x + b + a$

$$\begin{cases} a+2=0 \\ b+a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد: } h'(x) = (\ln x)^2 \quad x \mapsto (\ln x)^2 \text{ تكافئ } h'(x) = (\ln x)^2$$

أي: $h(x) = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2]$.

ب- حساب المساحة A :

$$A = \left(\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) - y dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$A = \left(\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{2} (\ln x)^2 dx \right) \times 1 \times 2$$

$$A = \left(\int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln x)^2 dx \right)$$

أي نجد:

$$A = \left[h(x) \right]_{\frac{1}{e}}^1$$

$$= h(1) - h\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$= \left(2 - \frac{5}{e} \right) cm^2$$

6. لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $k(x) = -\frac{1}{2}(\ln|x|)^2 - e|x| + e$

أ- لدينا من أجل كل x و $-x$ من $\mathbb{R}^*$ ،

$$k(-x) = -\frac{1}{2}(\ln|-x|)^2 - e|-x| + e$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln|x|)^2 - e|x| + e \quad \text{وبالتالي:}$$

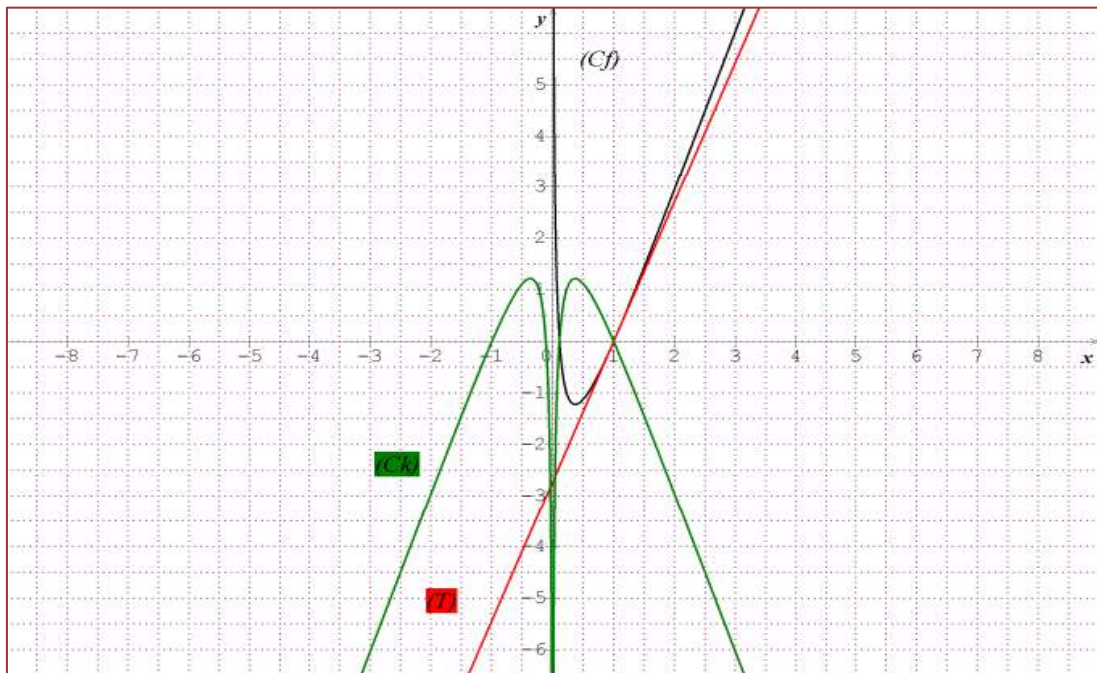
$$= k(x)$$

اذن: k دالة زوجية.

ب- الشرح:

لما $x > 0$ فان المنحنى (C_k) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

ولما $x < 0$ نقوم برسم نظير (C_k) المرسوم على المجال $]0; +\infty[$ بالنسبة لمحور الترتيب لأن: k دالة زوجية.



7.أ-بين أن كل المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها:

$y = mx - m$ تكافئ $mx - m - y = 0$ أي $m(x-1) - y = 0$ (1) ... و عليه من أجل كل الوسيط الحقيقي m

المعادلة (1) محققة من أجل $\begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \end{cases}$ أي: $x=1$ و $y=0$.

و بالتالي: النقطة $B(1;0)$ هي النقطة التي تنتمي لكل المنحنيات (Δ_m) .

ب- المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = mx - m$ بيانيا هي تعيين مجموعة نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y = mx - m$

لما $m \in [e; +\infty[$ للمعادلة حلا وحيدا.

ولما $m \in]-\infty; e]$ للمعادلة حلين متمايزين.

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = -x - \ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. يبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$ ثم تحقق أن: $0.56 < \alpha < 0.57$.

3. إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]0; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x}$.

II. نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

2. يبين أن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. (أ) يبين أن : $f(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

I. لدينا : $g(x) = -x - \ln x$ و $D_g =]0; +\infty[$.

ب) (γ) هو المنحني الممثل للدالة $\ln$ في المعلم السابق . أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ، فسّر النتيجة بيانيا ثم أدرس الوضع النسبي

للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (γ) .

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

د) أحسب $f(2)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (T) ، (γ) و $(\mathcal{C}_f)$.

4. A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x = \alpha$ و $x = e$.

أحسب بـ cm^2 المساحة A وبدلالة α ثم تحقق أن : $A = \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ ثم عيّن حصراً للمساحة A .

كما نلاحظ :

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x - \ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-1 - \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

- حساب المشتقة :

$$g'(x) = -1 - \frac{1}{x} = \frac{-x-1}{x} = -\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

- دراسة إشارة المشتقة :

$$\text{من أجل } x \in]0; +\infty[\text{ لدينا : } -\left(\frac{x+1}{x}\right) < 0$$

ومنه $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

- جدول تغيرات الدالة g :

$x \in$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$:

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وصورة المجال $]0; +\infty[$ بالدالة g هو المجال $]-\infty; +\infty[$ و 0 موجود في المجال $]-\infty; +\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$.
التحقق أن $0.56 < \alpha < 0.57$:

$$\begin{aligned} g(0.56) &= -0.56 - \ln 0.56 = 0.02 \\ g(0.57) &= -0.57 - \ln 0.57 = -0.01 \end{aligned}$$

لدينا : أي $g(0.56) \times g(0.57) < 0$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.56 < \alpha < 0.57$

(3) إستنتاج إشارة $g(x)$:

$x \in$	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

II. لدينا : $f(x) = \frac{-1+(x-1)\ln x}{x}$ معرفة على $D_f =]0; +\infty[$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [-1+(x-1)\ln x] = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1+(x-1)\ln x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1+(x-1)\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} + \left(\frac{x-1}{x} \right) \times \ln x \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) \times \ln x = +\infty \text{ لأن}$$

$$(2) \text{ تبين أن } f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2} : \text{ لدينا :}$$

$$f'(x) = \frac{\left[\ln x + (x-1) \times \frac{1}{x} \right] \times x - (-1 + (x-1)\ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \ln x + x - 1 + 1 - x \ln x + \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2} \text{ أي } f'(x) = \frac{x + \ln x}{x^2} \text{ ومنه}$$

جدول تغيرات الدالة f :

$x \in$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$(3) \text{ ا } \text{تبين أن } f(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} :$$

$$\text{لدينا : } f(\alpha) = \frac{-1+(\alpha-1)\ln \alpha}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{(\alpha-1)\ln \alpha}{\alpha}$$

$$\text{ولدينا : } g(\alpha) = 0 \text{ ومنه } -\alpha - \ln \alpha = 0 \text{ أي } \ln \alpha = -\alpha$$

$$\text{وبالتالي : } f(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{(\alpha-1)(-\alpha)}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} + (\alpha-1)(-1) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \text{ أي}$$

حصر $f(\alpha)$:

$$\text{لدينا: } 0.56 < \alpha < 0.57 \text{ ومنه } \frac{1}{0.57} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0.56} \text{ أي } 1.75 < \frac{1}{\alpha} < 1.78$$

$$\text{ومنه } -1.78 < -\frac{1}{\alpha} < -1.75 \text{ و } -0.57 < -\alpha < -0.56$$

$$\text{إذن } 1 - 0.57 - 1.78 < 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} < 1 - 0.56 - 1.75 \text{ ومنه}$$

$$-1.35 < f(\alpha) < -1.31 \text{ وبالتالي } 1 - 0.57 - 1.78 < 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} < 1 - 0.56 - 1.75$$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$:

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1 + (x-1)\ln x}{x} - \ln x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + x\ln x - \ln x - x\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ أي}$$

التفسير الهندسي:

المنحني (γ) منحنى مقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (γ) :

$$\text{ندرس إشارة الفرق } f(x) - \ln x = \frac{-1 - \ln x}{x}$$

$x \in$	0	α	$+\infty$
$f(x) - \ln x$	+	0	-
الوضع النسبي	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (γ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (γ)	$(\mathcal{C}_f)$ تحت (γ)

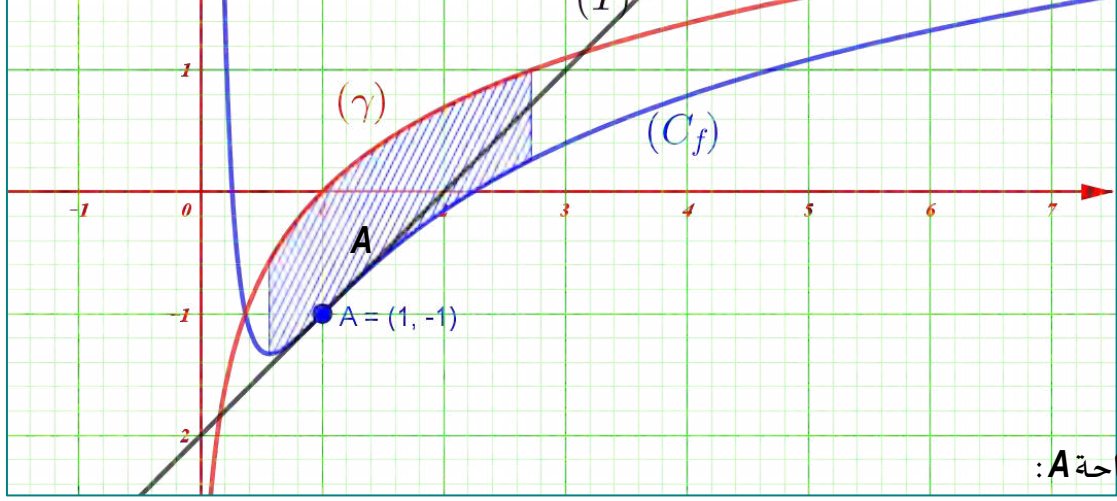
ج) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$$(T): y = 1 \times (x-1) - 1 = x - 2 \quad (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\text{إذن } (T): y = x - 2$$

د) حساب $f(2)$ ، $f(e)$ والرسم:

$$f(e) = 0.26 \text{ ، } f(2) = -0.15$$



(5) حساب المساحة A :

$$A = \int_{\alpha}^e [\ln x - f(x)] dx = \int_{\alpha}^e \left[\ln x - \frac{-1 + x \ln x - \ln x}{x} \right] dx = \int_{\alpha}^e \left[\frac{x \ln x + 1 - x \ln x + \ln x}{x} \right] dx$$

$$A = \int_{\alpha}^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_{\alpha}^e \quad \text{أي}$$

ومنه :

$$A = \int_{\alpha}^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \left[\ln e + \frac{1}{2} (\ln e)^2 \right] - \left[\ln \alpha + \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 \right] = \left(\frac{3}{2} - \ln \alpha - \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 \right) \text{us}$$

$$A = \frac{1}{2} (3 - 2 \ln \alpha - (\ln \alpha)^2) \text{cm}^2 \quad \text{وبالتالي}$$

$$A = \frac{(1 + \alpha)(3 - \alpha)}{2} \quad \text{التحقق أن:}$$

$$\ln \alpha = -\alpha \quad \text{و} \quad A = \frac{3 - 2 \ln \alpha - (\ln \alpha)^2}{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$A = \frac{3 - 2(-\alpha) - (-\alpha)^2}{2} = \frac{3 + 2\alpha - \alpha^2}{2} = \frac{(1 + \alpha)(3 - \alpha)}{2} \quad \text{ومنه}$$

$$A = \frac{(1 + \alpha)(3 - \alpha)}{2} \quad \text{وبالتالي}$$

تعيين حصر لـ A :

$$0.56 < \alpha < 0.57 \quad \text{لدينا:} \quad \text{ومنه} \quad 1.56 < 1 + \alpha < 1.57$$

$$-0.57 < -\alpha < -0.56 \quad \text{و} \quad 2.43 < 3 - \alpha < 2.44 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{1.56 \times 2.43}{2} < \frac{(1 + \alpha)(3 - \alpha)}{2} < \frac{1.57 \times 2.44}{2} \quad \text{إذن}$$

$$1.90 < A < 1.92 \quad \text{وبالتالي}$$

1. لتكن u الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1.أ- احسب نهايتي الدالة عند 0 و $+\infty$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة u .

2. بين أن المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; +\infty[$ يطلب تعيين حصر له سعتة 10^{-2} .

3. عين حسب قيم x إشارة $u(x)$.

4. بين أن: $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

II. نعتبر الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$

1. احسب من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$.

2. استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$.

III. ليكن في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Γ المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية و M نقطة من Γ .

1. نعتبر النقطة $A(0; 2)$ ، بين ان المسافة AM تعطي بالعبارة: $AM = \sqrt{f(x)}$.

2. لتكن g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- بين أن الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$.

ب- بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P التي يطلب تعيين احداثياتها.

ج- بين أن: $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.

3. هل المستقيم (AP) ومماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان؟

كما حل:

1. u الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ، $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1.أ- النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2 + \ln x) = -\infty$$

وكذلك

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 + \ln x) = +\infty$$

ب- اتجاه تغير الدالة u على $]0; +\infty[$:

الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، $u'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ، وعلية على المجال $]0; +\infty[$ ، $u'(x) > 0$

اذن الدالة u متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

2. الدالة u مستمرة ومتزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

و لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty$

لدينا $u(1) = -1$ اذن نأخذ قيم حقيقية أكبر تماما من 1. بالآلة الحاسبة نتحصل :

$u(1,31) = -0,01 < 0$ و $u(1,32) > 0$ ومنه $u(1,31) < u(\alpha) < u(1,32)$ أي $1,31 < \alpha < 1,32$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; +\infty[$ حيث $1,31 < \alpha < 1,32$

3. اشارة $u(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

4. لدينا:

$$u(\alpha) = 0$$

$$\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

اذن : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

II. نعتبر الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$

1. احسب من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln x) \\ &= \frac{2(x^2 - 2 \ln x)}{x} \\ &= \frac{2u(x)}{x} \end{aligned}$$

2. استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$.

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ اشارة $f'(x)$ من اشارة $u(x)$ أي:

x	0	α	$+\infty$
-----	---	----------	-----------

$f'(x)$	-	0	+
---------	---	---	---

اذن الدالة f متناقصة على المجال $]0; \alpha[$ ومتزايدة على المجال $[\alpha; +\infty[$.

III. 1. نعتبر النقطة $A(0; 2)$ ، بين ان المسافة AM تعطي بالعلاقة: $AM = \sqrt{f(x)}$.

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $AM = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{f(x)}$ ،

2. لتكن g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ ،

وعليه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} > 0$ ، اذن اشارة $g'(x)$ من اشارة $f'(x)$

وهكذا الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$.

ب-بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P .

من السؤال. (II. 2.) الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0; +\infty[$ تبلغها عند α وبما ان الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير

على المجال $]0; +\infty[$ المسافة AM أصغرية من أجل $x = \alpha$ وعليه $P(\alpha; \ln \alpha)$.

ج-لدينا

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - 2 - \alpha^2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + (\alpha^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 (1 + \alpha^2)} \\ &= \alpha \sqrt{1 + \alpha^2} \end{aligned}$$

و عليه : $AP = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}$.

3. معامل توجيه المستقيم (AP) هو: $a = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha}$

و معامل توجيه مماس المنحنى Γ عند النقطة P هو: $a' = \frac{1}{\alpha}$

$$\begin{aligned} a \times a' &= \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha^2} = -1 \\ \ln \alpha &= 2 - \alpha^2 \end{aligned}$$

اذن المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان.

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 2 - \ln(x + 2)$

1. احسب نهاية الدالة f عند -2 .

2. بملاحظة أن $f(x) = (x + 2) \left(1 - \frac{\ln(x + 2)}{x + 2} \right)$ ، وباستعمال النتيجة $\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ ، عين نهاية

الدالة f عند $+\infty$.

3. احسب مشتقة الدالة f ، ثم شكل جدول تغيرات f .

4. أ- بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا واحدا α محصوراً بين 2 و 3 .

ب- باستعمال الحاسبة ، عين حصراً سعته 10^{-2} للعدد α .

5. نرمز بـ (C) إلى منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس. وحدة الأطوال 1cm .

أ- عين معامل توجيه المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 2.

ب- ارسم T ، ثم المنحني (C) .

كواليت:

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$3. \text{ من أجل كل } x \text{ من }]-2; +\infty[\quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$$

جدول التغيرات:

x	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

4. أ- حسب جدول التغيرات ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على

$[2; 3]$. بما أن $f(2) \approx 2,6$ و $f(3) \approx 3,4$ و $f(x)$ تأخذ القيمة

3 في المجال $[2; 3]$ فإن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلاً واحداً α

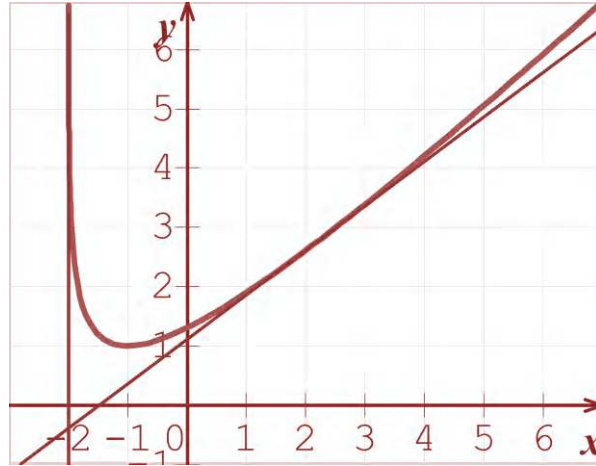
محصوراً بين 2 و 3 .

ب- باستعمال الحاسبة نلاحظ أن $f(2,50) \approx 2,99 < 3$

و $f(2,51) \approx 3,003 > 3$

1.5- معامل توجيه المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 2

هو $f'(2) = \frac{3}{4}$



تمارين مقترحة

1.

عين مجموعة تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{و} \quad g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

2.

اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

$$\ln 14 - \ln 7 \quad (1) \quad \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} \quad (2)$$

3.

اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

$$A = \ln a - \ln b + 2 \ln c \quad \bullet$$

$$B = \frac{1}{2} \ln a - \frac{3}{2} \ln b + \ln \frac{a}{b} \quad \bullet$$

$$C = \ln(a+1) - \frac{1}{2} \ln b + \frac{3}{2} \ln(a+b) \quad \bullet$$

4.

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\ln(x) = \ln(2x-3) \quad (1)$$

$$\ln(x^2-1) = \ln(x+5) \quad (2)$$

$$\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = 0 \quad (3)$$

$$2 \ln x = \ln(x+4) + \ln(2x) \quad (4)$$

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \quad (5)$$

$$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1) \quad (6)$$

5.

حل المتراجحات التالية:

$$\ln(3x) < \ln(4x+8) \quad (1)$$

$$\ln(x^2) < \ln(3x-2) \quad (2)$$

$$\ln(2x^2) > \ln(6-4x) \quad (3)$$

$$\ln(x^2+x-2) > 0 \quad (4)$$

$$\ln(x-1) + \ln(x-2) > 2 \ln(5-x) \quad (5)$$

6.

نعتبر كثير الحدود p للمتغير الحقيقي x حيث:

$$p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$$

$$(1) \quad \text{حل } \mathbb{R} \text{ المعادلة } p(x) = 0$$

$$(2) \quad \text{استنتج حل المعادلة:}$$

$$(\ln x)^4 - 25(\ln x)^2 + 144 = 0$$

7.

(1) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية:

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln \frac{x}{y} = -\ln 3 \end{cases}$$

$$(2) \quad \text{أ- حل في } \mathbb{R}^2 \text{ الجملة التالية:} \quad \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 8x - 4y = 4 \end{cases}$$

ب- استنتج حل الجملة التالية في $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \ln x^4 y^7 - 2 \ln y^3 = 5 \\ \ln \frac{x^6}{y^4} + \ln x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(x+1)^4 + \ln y = 0 \\ \ln x^2 + \ln \frac{1}{y} = \ln x \end{cases} \quad (3)$$

7.

ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0; +\infty[$:

$$(\ln x + 1)(\ln x - 1) \quad (2) \quad \ln x - \ln 3 \quad (1)$$

$$2x \ln(1-x) \quad (4) \quad \ln x(\ln x - 1) \quad (3)$$

$$-x^2 \ln(x+1) \quad (5)$$

8.

احسب النهايات في كل حالة من الحالات المقترحة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2 \ln x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + \ln x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 5 - \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) \ln(-x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x) \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 4 + \ln x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$$

$$, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (3(\ln x)^2 - \ln x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 4 + \ln x \quad ,$$

$$, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2 \ln x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - (\ln x)^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + \ln x - 1$$

9.

تحقق من أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال المعطى ثم

احسب دالتها المشتقة

$$D =]0; +\infty[\quad , \quad f(x) = (\ln x)^2 + \ln x \quad (1)$$

$$D =]0; +\infty[\quad , \quad f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \quad (2)$$

$$D =]-\infty; 0[, f(x) = x \ln |x| - 2x + 3 \quad (3)$$

10.

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; 2]$ بـ

$$f(x) = 2x^2 - 3 - \ln x$$

(©) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 5cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$

1. ادرس نهاية الدالة f عند 0 ، فسر النتيجة هندسيا.

2. شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. عين معادلة المماس T للمنحنى (©) عند النقطة التي فاصلتها

1.

4. ارسم T و (©).

11.

لتكن الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = x + 1 + 2[\ln x - \ln(x-1)]$$

نسمي (©) إلى التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب إلى

معلم متعامد ومتجانس الوحدة $1cm$

1. بين أنه من أجل كل $x \in]1; +\infty[$:

$$f(x) = x + 1 + 2 \ln \frac{x}{x-1}$$

2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$. استنتج أن المنحنى (©) يقبل

مستقيما مقاربا مائلا Δ يطلب تعيين معادلة له .

ادرس وضعية المنحنى (©) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

5. ارسم بعناية المنحنى (©).

12.

1. الدالة g معرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = -x^2 + 2x + 4 \ln(x-1)$$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

(الشكل المقابل

1. بقراءة بيانية حدد عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$.

2. احسب $g(2)$.

3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2,87; 2,88[$

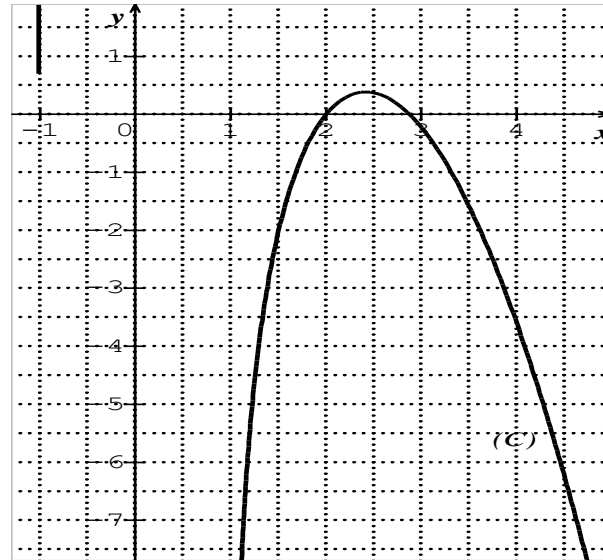
($2,87 < \alpha < 2,88$) .

4. استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على المجال

$]1; +\infty[$.

11.

نعتبر f الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ



$$f(x) = x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

$(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. أ) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-3)]$ واستنتج أن

المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$.

د) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (Γ) بالنسبة إلى المستقيم

(Δ) .

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1; +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

(f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (Γ) . (نأخذ $f(\alpha) = 3.9$)

(.

13.

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال

$] -1; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و

متجانس $(O ; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

(2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$. ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

(4) ادرس تغيرات الدالة f . وشكل جدول تغيراتها .

(5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

(6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.

(7) أرسم المنحنى (C_f) والمستقيمان (T) و (Δ) ؟

(8) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول

$$f(x) = \frac{3}{2}x + m$$

14. جزء من بكالوريا 2015- الموضوع 2- شعبة: تسيير واقتصاد

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) دالة معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب : $f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$ حيث a و b عدنان حقيقيان . (Γ) التمثيل البياني للدالة f ، المعطى في الشكل المقابل ، يقبل في النقطة

$A(2; -1 + 3\ln 3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .

(1) بقراءة بيانية :

أ - ضع تخميننا حول $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب - شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) باستعمال المعطيات المتوفرة ، جد قيمة كل من a و b .

(II) نعتبر في هذا الجزء : $f(x) = -x + 1 + 3\ln(x+1)$.

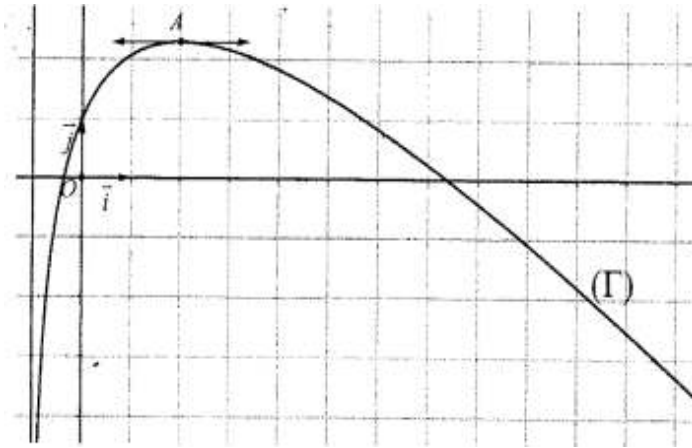
(1) أحسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر .

(2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. (يعطى :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$$

(3) أ - عيّن النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس

(T) للمنحنى (Γ) موازيا للمستقيم الذي معادلته $y = x$ ، ثم



أكتب معادلة للمماس (T) .

ب - استنتج بيانها ، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من

أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تماما .

(4) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب :

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

أ - أحسب $g'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f

على المجال $]-1; +\infty[$.

ب - لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع

حامل محور الفواصل ،

بين أن : $\alpha \in]7,37; 7,38[$ و

$$\beta \in]-0,37; -0,36[$$

15. جزء من بكالوريا 2018- الموضوع 1- شعبة: تسيير واقتصاد

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2; 8[$ ب :

$$f(x) = \ln(x+2) + \ln(-x+8) - \ln 16$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نأخذ الوحدة البيانية : $2cm$.

(1) أحسب نهايتي الدالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2; 8[$

و فسّر النتيجةين بيانها .

(2) تحقق أنه من أجل كل x من $]-2; 8[$:

$$f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$$

(المشتقة للدالة f)

(3) أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2; 8[$ وشكل جدول

تغيرات الدالة f .

(4) عيّن نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات .

(5) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-2; 8[$: $(6-x)$ ينتهي

إلى $]-2; 8[$ و $f(6-x) = f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة

بيانها .

(6) أرسم المنحنى (C_f) .

16.

(I) - لتكن u دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على

$]0; +\infty[$ كمايلي : $u(x) = \ln x - 2$ ، (C_u) المنحنى الممثل

للدالة u في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس
($O; \vec{i}; \vec{j}$).

1. استنتج طريقة لانشاء (C_u) انطلاقا من منحنى دالة مرجعية يطلب تعيينها.

2. أنشئ (C_u).

(II)- لتكن g دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = \ln x + x - 3$.

1. أدرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيين حصرا له سعته 10^{-1} .

3. استنتج اشارة $g(x)$.

(III)- لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على

$]0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ ، (C_f)

المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم السابق.
1. أدرس تغيرات الدالة f .

2. برهن أن $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا ل $f(\alpha)$.

3. أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_u) و (C_f).

4. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - u(x)]$ ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

5. عين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

6. أنشئ (C_f) في المعلم السابق.

17

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $] -\infty; 0[$ كما يلي :

$f(x) = x + 5 + 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$.

(C_f) التمثيل البياني في المستوي المنسوب الى معلم المتعامد و

المتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$).

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $] -\infty; 0[$ ،

$f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x + 5$ هو

مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4. بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث

$-3, 4 < \alpha < -3, 5$ و $-1, 1 < \beta < -1$.

5. أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

6. أ- نعتبر النقطتين $A \left(-1; 3 + 6 \ln \left(\frac{3}{4} \right) \right)$ و

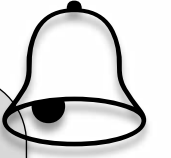
$B \left(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln \left(\frac{3}{4} \right) \right)$.

بين ان $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم

(AB).

ب- بين ان المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة

M_0 يطلب تعيين احداثيتها.



هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ
و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

**تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي
للصفحة**

5min  Maths 