الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسّية

5

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 19

التمريـــــن

(I) لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق العلاقة:

$$g(x) - 2g(1-x) = e^{x} - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (ارشاد: ضع $t = x$ تارة و $t = 1 - x$ تارة أخرى)

2) نضع: $g(x) = e^{x} - x - 1$ حيث: $D_g = \mathbb{R}$

أ/ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = 1 - g(-x)$$

4) اثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث:

$$-1.15 < \alpha < -1.14 \quad \text{وَ} \quad 1.84 < \beta < 1.85$$

5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ/ اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن:

$$f'(x) = \frac{e^{x}h(x)}{\left(1 + g(x)\right)^{2}}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) مثل بيانيا (C_f) .

◀ حل التمريـــن

(I)

1) ايجاد عبارة $g(x)$ بدلالة x :

نضع: $x = t$ نجد:

$$g(t) - 2g(1-t) = e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3$$
$$\Rightarrow\ -2g(1-t) = -g(t) + e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{2g(1-t) = g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3} \dots (1)$$

نضع : $x = 1 - t$ معناه: $t = 1 - x$ ، نجد:

$$g(1-t) - 2g(1-1+t) = e^{1-t} - 2e^{1-1+t} - 3(1-t) + 3$$
$$\Rightarrow g(1-t) - 2g(t) = e^{1-t} - 2e^t + 3t$$
$$\Rightarrow \boxed{2g(1-t) - 4g(t) = 2e^{1-t} - 4e^t + 6t} \dots (2)$$

نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد:

$$g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3 - 4g(t) = 2e^{1-t} - 4e^t + 6t$$
$$-e^t - 3 = -4e^t$$

$$\Rightarrow -3g(t) = -3e^t + 3t + 3$$
$$\Rightarrow g(t) = e^t - t - 1$$

إذن :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

(2

أ/ حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} [e^x - x - 1] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)\right] = +\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا:

$$g'(x) = e^x - 1$$

ولدينا:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow e^x = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

ومنه جدول التغيرات:

الخليل للرياضيات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - g(-x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: نضع:

$u(x) = -x$ و $v(x) = g\big(u(x)\big) = g(-x)$ أي $v(x) = (g \circ u)(x)$

لدينا الدالة g متناقصة على المجال $\underbrace{]-\infty;0]}_{I\ \text{المجال}}$ والدالة u متناقصة على المجال $\underbrace{[0;+\infty[}_{g(I)\ \text{المجال}}$

كيف وجدنا المجال $g(I)$:
لدينا: $I =]-\infty;0]$ و $u(x) \in I$ معناه $u(x) \leq 0$ أي $-x \leq 0$ ومنه $x \geq 0$ أي $x \in [0;+\infty[$
ومنه: $g(I) = [0;+\infty[$.

وبما أنّ الدالة g متناقصة على $]-\infty;0]$ و الدالة u متناقصة على $[0;+\infty[$

إذن الدالة k متزايدة على المجال $[0;+\infty[$

بنفس الفكرة نجد: الدالة k متناقصة على المجال $]-\infty;0]$

- واضح أن $g(-x) = k(x)$ أي: $-g(-x) = -k(x)$

وعليه:

$-k(x)$ متزايدة على المجال $]-\infty;0]$ و متناقصة على المجال $[0;+\infty[$

ولدينا $h(x)$ و $-k(x)$ لهما نفس اتجاه التغير لأنّ: $h(x) = 1 - k(x)$

اذن:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f(x)$	0 $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$h(0) = 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4) اثبات أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β:

لدينا الدالة h مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

ولدينا: $h(-1.14) = 0.01$ و $h(-1.15) = -0.08$

ولدينا: $h(-1.14) \times h(-1.15) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.15;-1.14[$

ولدينا: $h(1.85) = -0.007$ و $h(1.84) = 0.001$

ولدينا: $h(1.84) \times h(1.85) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]1.84; 1.85[$

اذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β

5) استنتاج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x :

إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات $g(x)$ لدينا:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

إشارة $h(x)$:

من جدول تغيرات $h(x)$ لدينا:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+g(x)}{1+g(x)}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+e^x-x-1}{1+e^x-x-1}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right] = \frac{-1}{+\infty} = 0$$
- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+g(x)}{1+g(x)}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}\right] = 1$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

2) أ/ اثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

لدينا البسط عبارة عن مجموعة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام كذلك

ومنه البسط على المقام قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

اذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- اثبات أن: $f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}$:

لدينا:

$$\boxed{\begin{aligned} h(x) &= 1 - g(-x) \\ &= 1 - e^{-x} - x + 1 \\ &= 2 - x - e^{-x} \end{aligned}}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{e^x[e^x - x - (1 - e^{-x})(e^x - 1)]}{(e^x - x + 1 - 1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x - x - e^x + 1 + 1 - e^{-x})}{\left(1 + g(x)\right)^2} \\ &= \frac{e^x(2 - x - e^{-x})}{\left(1 + g(x)\right)^2} \\ &= \frac{e^x h(x)}{\left(1 + g(x)\right)^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $\left(1 + g(x)\right)^2 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

ولدينا $f(0) = 0$

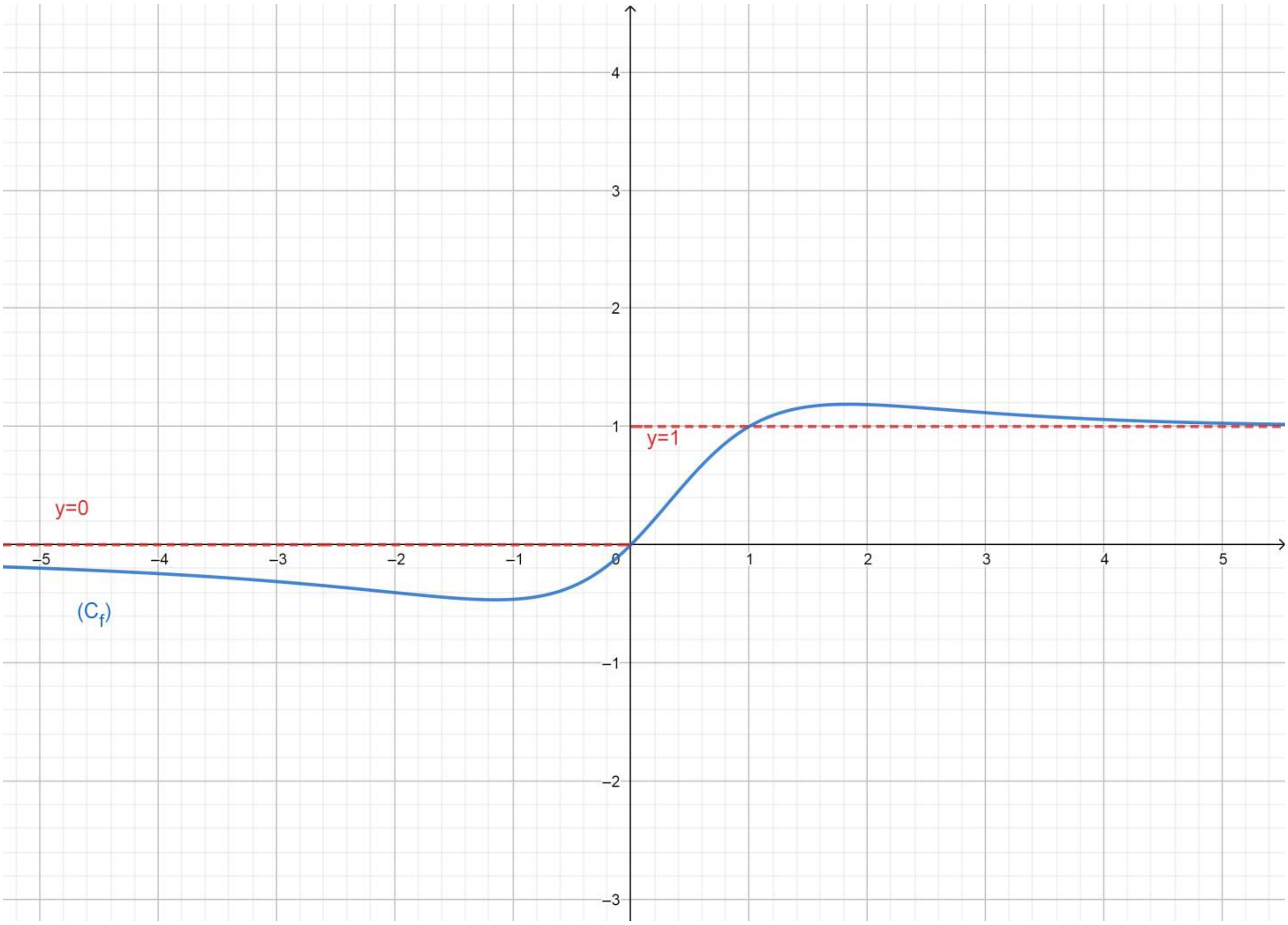
- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶