



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمارين مع الحل في المتتاليات العددية

6

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 19

نعتبر المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$$

والمتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$s_n = u_{n+1} + u_n$$

1

① بين ان المتتالية (s_n) هندسية مبينا أساسها وحدها الأول.

② استنتج عبارة s_n بدلالة n .

② نضع $v_n = (-1)^n \times u_n$ ، ونعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$t_n = v_{n+1} - v_n$$

① عبر عن t_n بدلالة s_n

② عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

③ احسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n / 8^n]$.

1

① تبين ان المتتالية (s_n) هندسية:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= u_{n+2} + u_{n+1} \\ &= \underbrace{7u_{n+1} + 8u_n}_{u_{n+2}} + u_{n+1} \\ &= 8u_{n+1} + 8u_n \\ &= 8(u_{n+1} + u_n) \\ &= 8s_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$s_0 = u_{0+1} + u_0 = 1 + 0 = 1$$

ومنه (s_n) متتالية هندسية أساسها 8 وحدها الأول 1.

② استنتاج عبارة s_n بدلالة n :

$$s_n = (8)^n$$

2

① التعبير عن t_n بدلالة s_n :

$$\begin{aligned} t_n &= v_{n+1} - v_n \\ &= (-1)^{n+1} \times u_{n+1} - (-1)^n \times u_n \\ &= (-1)^{n+1} \times u_{n+1} + (-1)^{n+1} \times u_n \\ &= (-1)^{n+1} (u_{n+1} + u_n) \\ &= (-1)^{n+1} \times s_n \end{aligned}$$

② التعبير عن v_n و u_n بدلالة n :

لدينا:

$$\begin{aligned} t_0 &= v_1 - v_0 \\ t_1 &= v_2 - v_1 \\ t_2 &= v_3 - v_2 \\ &\vdots \\ t_{n-1} &= v_n - v_{n-1} \end{aligned}$$

بالجمع نجد:

$$t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + \dots + v_n - v_{n-1}$$

ومنه:

$$t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} = -v_0 + v_n$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} t_n &= (-1)^{n+1} \times s_n \Rightarrow t_{n-1} = (-1)^n \times s_{n-1} \\ &\Rightarrow t_{n-1} = (-1)^n \times (8)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow t_{n-1} &= (-1)^n \times \frac{(8)^n}{8} \\ \Rightarrow t_{n-1} &= \frac{(-1 \times 8)^n}{8} \\ \Rightarrow t_{n-1} &= \frac{(-8)^n}{8}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} &= -v_0 + v_n \Rightarrow -1 \left(\frac{1 - (-8)^n}{1 - (-8)} \right) = \underbrace{-0}_{-v_0} + v_n \\ \Rightarrow v_n &= - \left(\frac{1 - (-8)^n}{9} \right) \\ \Rightarrow v_n &= \frac{1}{9} ((-8)^n - 1)\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}v_n &= (-1)^n \times u_n \Rightarrow u_n = \frac{v_n}{(-1)^n} \\ \Rightarrow u_n &= \frac{(-8)^n - 1}{9(-1)^n}\end{aligned}$$

③ حساب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n / 8^n]$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{u_n}{8^n} \right] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{(-8)^n - 1}{9(-1)^n}}{8^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-8)^n - 1}{8^n \times 9(-1)^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-8)^n - 1}{9(-8)^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-8)^n \left(1 - \frac{1}{(-8)^n} \right)}{9(-8)^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - \frac{1}{(-8)^n}}{9} \right] = \boxed{\frac{1}{9}}\end{aligned}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶