# سلسلة تمارين رقم ①



## التمرين 01:

احسب النهايات التالية:

① $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{1-x}\right)$

② $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2}-x\right)$

③ $\lim_{x\to9}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)$

④ $\lim_{x\to3}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$

## التمرين 02:

برهن أنّ المستقيم $(D)$ مقارب للمنحني $(C_f)$ ، ثم أدرس الوضعية النسبية لـ $(C_f)$ و $(D)$ :

① $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x-2}$ ، $D: y=x+4$

② $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2}$ ، $D: y=x+2$

## التمرين 03:

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3x+b$$

حيث $a$ و $b$ أعداد حقيقية، و$(C_f)$ تمثيلها البياني.

① عين $a$ و $b$ حتى تقبل الدالة $f$ قيمة حدية عند 3 قيمتها $-8$ .

② نفرض أنّ $a=-1$ ، $b=1$ :

أ/ ادرس تغيرات الدالة $f$.

ب/ احسب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$.

ج/ اكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة $A$ التي فاصلتها 1 .

د/ ادرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ والمماس $(\Delta)$.

ه/ مثل بيانيا كل من $(T)$ و $(C_f)$

## التمرين 04:

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث يكون لـ $(C_f)$ مستقيم مقارب معادلته $y=x-3$، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

② ادرس تغيرات الدالة $f$.

③ اثبت أنّ $(C_f)$ يقبل مماسين $(D_1)$ و $(D_2)$ معامل توجيه كل منهما $(-3)$، يطلب إعطاء احداثيات نقطتي التماس $M_1$ و$M_2$ ومعادلتي المماسين $(D_1)$ و $(D_2)$.

④ مثّل بدقة المماسين $(D_1)$ و $(D_2)$ ، ثم المنحنى $(C_f)$ .

⑤ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)+3x-m=0$.

⑥ $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ:

$$g(x)=f(|x|)$$

أ/ بين أنّ الدالة $g$ زوجية.

ب/ بيّن أنه يمكن إنشاء $(C_g)$ منحنى الدالة $g$ انطلاقا من $(C_f)$ ، ثم مثّل بيانيا $(C_g)$ في المعلم السابق.

## التمرين 05:

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$$

و$(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① عين العددين الحقيقين $a$ و $b$ بحيث المنحني $(C_f)$ يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل، ثم بيّن أنّ $f(x)$ تكتب على الشكل:

$$f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

② ادرس تغيرات الدالة $f$، ثم شكل جدول التغيرات.

③ بيّن أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلته.

④ عيّن احداثيات نقط تقاطع $(C_f)$ مع محوري الاحداثيات.

⑤ ادرس وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

⑥ نسمي $\omega$ نقطة تقاطع المنحني $(C_f)$ و $(\Delta)$، برهن أن النقطة $\omega$ مركز تناظر للمنحني $(C_f)$ .

⑦ عين معادلة للمماس $(T)$ عند النقطة $\omega$.

⑧ مثل بيانيا كل من $(T)$، $(\Delta)$ و $(C_f)$ .

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

## ◄ حل التمرين 01:

① $$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-3x+2}{1-x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-2)(x-1)}{1-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}(-(x-2))=-(1-2)$$
$$=\boxed{1}$$

② $$\lim_{x\to9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)=\lim_{x\to9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}\right)$$
$$=\lim_{x\to9}\left(\frac{1}{3+\sqrt{x}}\right)$$
$$=\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

③ $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$$
$$=\boxed{+\infty}$$

④ $$\lim_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$$
$$=\lim_{x\to3}\left(\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\right)$$
$$=\lim_{x\to3}\left(\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\right)$$
$$=\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right)$$
$$=\boxed{\frac{1}{4}}$$

## ◄ حل التمرين 02:

① $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{x-2}-(x+4)\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3-(x+4)(x-2)}{x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{11}{x-2}\right)=0$$

ومنه منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+4$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا: $f(x)-y=0$

$$\Rightarrow\frac{11}{x-2}=0\Rightarrow x-2\neq0\Rightarrow x\neq2$$

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $-$ | $+$ |
| الوضعية | $(C_f)$ تحت $(D)$ | $(C_f)$ فوق $(D)$ |

② $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-1}{x^2}-(x+2)\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-1-x^2(x+2)}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-1}{x^2}\right)=0$$

ومنه منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:

$$f(x)-y=0\Rightarrow\frac{-1}{x^2}=0\Rightarrow x\neq0$$

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $-$ | $-$ |
| الوضعية | $(C_f)$ تحت $(D)$ | $(C_f)$ تحت $(D)$ |

## ◄ حل التمرين 03:

① تعيين العددين $a$ و $b$ :

الدالة $f$ تقبل قيمة حدية عند 3 قيمتها $-8$ معناه:

$$f(3)=-8 \text{ و } f'(3)=0$$

لدينا: $f'(x)=x^2+2ax-3$

ومنه: $f'(3)=0\Rightarrow3^2+2a(3)-3=0$

$$\Rightarrow6a=-6\Rightarrow\boxed{a=-1}$$

و لدينا:

$$f(3)=-8\Rightarrow\frac{1}{3}(3)^3+a(3)^2-3(3)+b=-8$$
$$\Rightarrow9-9+9+b=-8\Rightarrow\boxed{b=1}$$

② نفرض أنّ $a=-1$ ، $b=1$ :

أ/ دراسة تغيرات الدالة $f$:

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3\right)=-\infty$ • $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x)=x^2-2x-3$$

نحل المعادلة $x^2-2x-3=0$ باستعمال $\Delta$: $\quad\Delta=16$

ومنه: $x_1=3$ و $x_2=-1$

- جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(-1)$ | ↘ | $-8$ | ↗ | $+\infty$ |

ب/ حساب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$:

- $f(5)=\frac{1}{3}(5)^3-(5)^2-3(5)+1=\frac{8}{3}$
- $f(0)=\frac{1}{3}(0)^3-(0)^2-3(0)+1=1$

- $f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+1=\frac{8}{3}$
- $f(-2)=\frac{1}{3}(-2)^3-(-2)^2-3(-2)+1=\frac{1}{3}$

ج/ كتابة معادلة المماس $(\Delta)$ :

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=(1^2-2(1)-3)(x-1)-\frac{8}{3}$$
$$=\boxed{-4x+\frac{4}{3}}$$

د/ دراسة الوضع النسبي لـ $(C_f)$ والمماس $(\Delta)$:

$$f(x)-y_{(\Delta)}=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1+4x-\frac{4}{3}$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة ومنه:

$$\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}=(x-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$
$$=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x-\alpha x^2-\beta x-\gamma$$
$$=\alpha x^3+(\beta-\alpha)x^2+(\gamma-\beta)x-\gamma$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\\ \beta-\alpha=-1\\ \gamma-\beta=1\\ -\gamma=-\frac{1}{3}\end{cases}$

إذن: $\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\\ \beta=-\frac{2}{3}\\ \gamma=\frac{1}{3}\end{cases}$

ومنه:

$$\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}=(x-1)\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)(x^2-2x+1)$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)(x-1)^2$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)^3$$

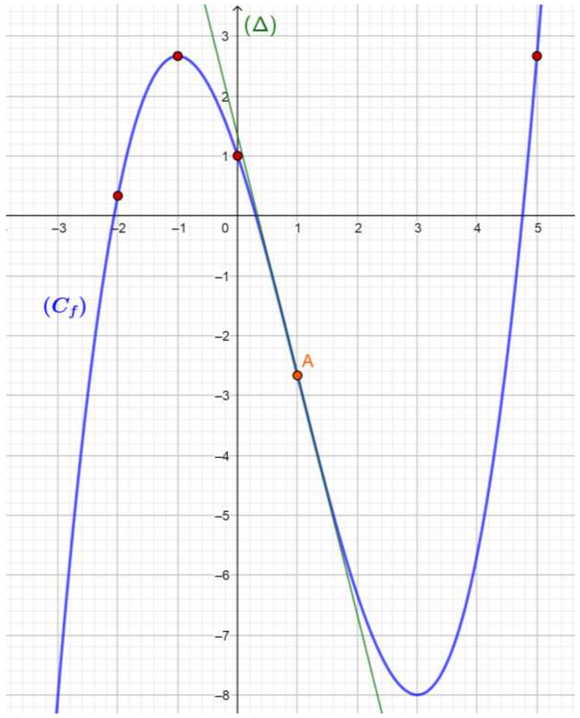
لدينا: $f(x)-y_{(\Delta)}=0$

ومنه: $\frac{1}{3}(x-1)^3=0$

إذن: $x=1$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y_{(\Delta)}$ | $-$ | $0$ | $+$ |

ه/ التمثيل البياني:




## ◄ حل التمرين 04:

① تعيين الاعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{x-2}-(x-3)\right)=0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a-1)x^2+(b+5)x+c-6}{x-2}\right)=0$$

هذه النهاية لا تتحقق إلا إذا كان: $(a-1=0)$

ومنه $\boxed{a=1}$

وعليه:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+5)x+c-6}{x-2}\right)=0\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+5)x}{x}\right)=0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(b+5)=0\Rightarrow b+5=0$$
$$\Rightarrow \boxed{b=-5}$$

ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-2)-ax^2-bx-c}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{ax^2-4ax-2b-c}{(x-2)^2}$$

ومنه:

$$f'(3)=0\Rightarrow \frac{a(3)^2-4a(3)-2b-c}{((3)-2)^2}=0$$
$$\Rightarrow -3a-2b-c=0$$
$$\Rightarrow -3(1)-2(-5)-c=0$$
$$\Rightarrow \boxed{c=7}$$

إذن:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$$

② دراسة تغيرات الدالة $f$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to2}}\left(\dfrac{6}{0^-}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to2}}\left(\dfrac{6}{0^+}\right) = +\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{(1)x^2 - 4(1)x - 2(-5) - (7)}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

لدينا:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

لدينا: $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$

ومنه: $x_1 = 3$ و $x_1 = 1$

- جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | | $2$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $0$ | | ‖ | | $0$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $-3$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $1$ | ↗ $+\infty$ |

③ اثبات أنّ $(C_f)$ يقبل مماسين $(D_1)$ و $(D_2)$ :

$(C_f)$ يقبل مماسين $(D_1)$ و $(D_2)$ معامل توجيه كل منهما $(-3)$

معناه أنّ المعادلة $f'(x) = -3$ تقبل حلان:

$$f'(x) = -3 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = -3$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -3(x-2)^2 \Rightarrow 4x^2 - 16x + 15 = 0$$

لدينا: $\Delta = 16$

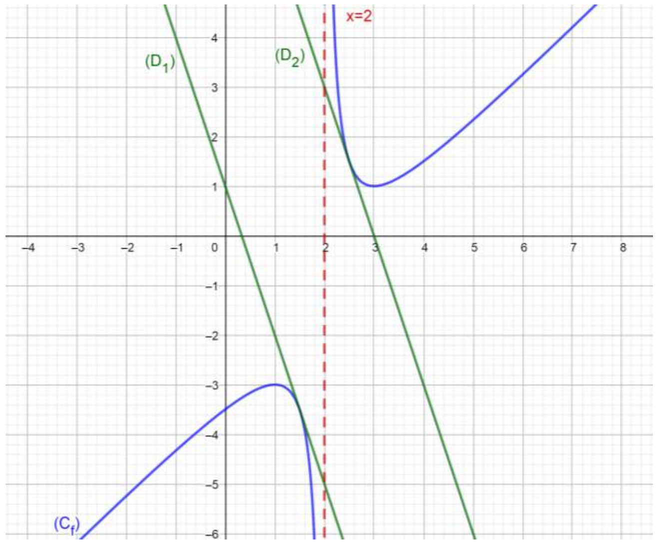
ومنه: $x_1 = \frac{3}{2}$ ; $x_2 = \frac{5}{2}$

إذن $M_1\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$ ; $M_2\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

ولدينا:

$$(D_1): y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \boxed{-3x+1}$$
$$(D_2): y = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \left(\frac{5}{2}\right)\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$= \boxed{-3x+9}$$

④ التمثيل البياني:




⑤ المناقشة البيانية:

$$f(x) + 3x - m = 0 \Rightarrow f(x) = -3x + m$$

حلول المعادلة السابقة هي فواصل نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -3x + m$، وهي:

لما $m < 1$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر موجب

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا

لما $1 < m < 9$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m = 9$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا

لما $m > 9$ المعادلة تقبل حلان موجبان

⑥

أ/ تبيين أنّ الدالة $g$ زوجية:

لدينا:

$$g(-x) = f(|-x|)$$
$$= f(|x|)$$
$$= g(x)$$

ومنه الدالة $g$ زوجية.

ب/ تبيين أنه يمكن إنشاء $(C_g)$ $g$ انطلاقا من $(C_f)$ :

$$g(x) = f(|x|)$$
$$= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه:

لما $x \geq 0$: $(C_f)$ ينطبق على $(C_g)$

ولما: $x \leq 0$ : $(C_g)$ متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

## ◄ حل التمرين 05:

① تعيين العددين الحقيقين $a$ و $b$:

لدينا: $f(0) = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{7}{2}$ ومنه: $\boxed{b=7}$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2+2x+2) - (2x+2)(x^2+ax+7)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{(2-a)(0)^2 - 10(0) + 2a - 14}{((0)^2 + 2(0) + 2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2a - 14 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{a = 7}$$

- التبيين:

$$f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{x^2+2x+2+5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}$$

② دراسة تغيرات الدالة $f$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2+2x+2)-(2x+2)(x^2+ax+7)}{(x^2+2x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-5x^2-10x}{(x^2+2x+2)^2}$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -5x^2 - 10x = 0$$
$$\Rightarrow -5x(x+2) = 0$$

ومنه: $x+2=0$ أو $-5x=0$

إذن: $x=0$ أو $x=-2$

تشكيل جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $f(-2)$ | $\nearrow$ | $f(0)$ | $\searrow$ | $1$ |

③ تبيين أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب $(\Delta)$ :

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$.

④ تعيين احداثيات نقط تقاطع $(C_f)$ مع محوري الاحداثيات:

- تقاطع $(C_f)$ مع $(xx')$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2} = 0$$
$$\Rightarrow x^2+7x+7 = 0$$

لدينا: $\Delta = 21$

ومنه: $x \approx -1.21$ أو $x_{=} - 5.79$

- تقاطع $(C_f)$ مع $(yy')$:

لدينا $f(0) = \frac{7}{2}$ ومنه: $(C_f) \cap (yy') = \left\{\left(0;\frac{7}{2}\right)\right\}$

⑤ دراسة وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2} - 1$$
$$= \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

لدينا: $(x^2+2x+2) > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

ومنه:

$$5x+5 = 0 \Rightarrow x = -1$$

إذن:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) - y_{(\Delta)}$ | $-$ | $0$ | $+$ |

⑥ برهان أن $\omega$ مركز تناظر $(C_f)$:

لدينا: $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-2-x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

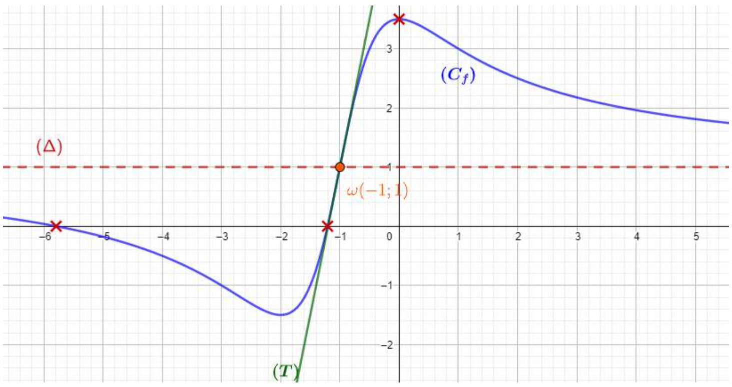
$$f(2\alpha - x) + f(x) = f(-2-x) + f(x)$$
$$= 1 + \frac{5(-2-x)+5}{(2+x)^2+2(-2-x)+1} + 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= 2 - \frac{(5x+5)}{x^2+2x+2} + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= 2$$
$$= 2(1)$$

ومنه النقطة $\omega(-1;1)$ مركز تناظر للمنحني $(C_f)$ .

⑦ تعيين معادلة للمماس $(T)$ عند النقطة $\omega$:

$$(T): y = f'(-1)\big(x-(-1)\big) + f(-1)$$
$$= \boxed{5x+6}$$

⑧ التمثيل البياني:




• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •