طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

سلسلة الخليل

في

الأعداد المركبة

- ملخص شامل
- تمارينات مقترحة
- تمارين البكالوريات السابقة جميع الشعب من 2008 إلى 2020.

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 04 / 02

1

ملخص شامل حول الأعداد المركبة:

[redacted]

تعاريف وخواص هامة في الأعداد المركبة

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ: $\mathbb{C}$
- **الشكل الجبري:** نسمي العبارة $z = x + iy$ بالشكل الجبري للعدد المركب z حيث: x و y عددان حقيقيان و i عنصر غير حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{C}$ يحقق: $i^2 = -1$.
- يسمى x **بالجزء الحقيقي** لـ z ويرمز له بالرمز $Re(z)$.
- يسمى y **بالجزء التخيلي** لـ z ويرمز له بالرمز $Img(z)$.
- يسمى $\overline{z}$ **مرافق** العدد المركب z، حيث: $z = z - i(y)$.
- **بعض العمليات في $\mathbb{C}$:**

ليكن $z_n = x_n + iy_n$ أعداد مركبة، وليكن α عدد حقيقي، لدينا مايلي:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2$
  $= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+uy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2-(iy)^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \quad ; z \neq 0$

- **خواص عدد مركب:**
  - $z\overline{z} = \left(Re(z)\right)^2 + \left(Img(z)\right)^2 = x^2 + y^2$
  - $z - \overline{z} = 2iIm(z) = 2iy$
  - $z + \overline{z} = 2Re(z) = 2x$
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$
  - $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ مع $z \neq 0$
  - $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ مع $w \neq 0$
- **ملاحظات:**
  - اذا كان $y = 0$ نقول أن العدد z حقيقي.
  - اذا كان $x = 0$ نقول أن العد z تخيلي صرف.
  - يكون العدد المركب z معدوما اذا وفقط اذا كان $Re(z) = 0$ و $Im(z) = 0$
- **التفسير الهندسي للعدد المركب:**

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لكل نقطة $M(x; y)$ من المستوي نرفق العدد المركب $z = x + iy$.

- نقول أن النقطة M هي صورة العدد المركب z ، والشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z.

- كل نقطة M هي صورة العدد لعدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، ونقول أن z **لاحقة النقطة** M.
- محور الفواصل يسمى **المحور الحقيقي** ومحور التراتيب يسمى **المحور التخيلي** والمستوي يسمى **المستوي المركب**.

لاحقة شعاع: A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $z_B - z_A$.

طويلة عدد مركب: نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ: $|z|$ حيث:

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

خواص طويلة عدد مركب:

من أجل كل عددين مركبين z و w. A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب: $AB = |z_B - z_A|$

- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $|z| \geq 0$
- $-|z| \leq Re(z) \leq |z|$
- $-|z| \leq Im(z) \leq |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$
- $|z|^n = |z^n|$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ مع $w \neq 0$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $|z - w| \leq |z| - |w|$

التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب:

$$\boxed{\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC}}$$

عمدة عدد مركب:

- نسمي عمدة العدد المركب z كل قيس زاوية بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

  ونرمز لها بالرمز: $\theta = \arg(z)$ حيث: $\tan \theta = \frac{y}{x}$.
- إذا كانت θ عمدة للعدد المركب غير المعدوم z مع $z = x + iy$ و $z \neq 0$ فإن:

$$\boxed{\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases} \quad ; \quad |z| = r}$$

- كل عدد مركب غير معدوم له عدد غير منته من العمد، أي إذا كانت θ عمدة لـ z فإن $\theta + 2k\pi$ عمدة له حيث $k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(0)$ و $\arg(\infty)$ غير معنيين.

- $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم:

- $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(w) + 2k\pi$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$

التفسير الهندسي لعمدة عدد مركب:

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) &= \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) \\ &= -(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) = -[(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AC})] = -(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})\end{aligned}$$

إذن:

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})}$$

الشكل المثلثي لعدد مركب: نسمي الكتابة: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بالشكل المثلثي للعدد المركب z،
حيث: $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$

ترميز أولر: نضع: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ، هذا الترميز يسمى ترميز أولر، حيث $e^\wedge i\theta$ عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له.

الشكل الأسي لعدد مركب: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له، يكتب على الشكل:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z.

دستور موافر:

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \quad ، \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

خواص (دستور موافر):

z و w عددان مركبان، θ و α عمدتاهما على الترتيب، لدينا ما يلي:

- $z \cdot w = |z \cdot w| e^{i(\theta+\alpha)}$
- $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\theta-\alpha)}$ مع $|w| \neq 0$
- $\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|} e^{i(-\alpha)}$ مع $|w| \neq 0$
- $\overline{z} = |z| e^{i(-\theta)}$
- $z^n = |z|^n e^{in\theta}$ حيث $n \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}^*$
- $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$
- $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = i$
- $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = -i$
- $e^{i2k\pi} = 1$
- $e^{i(2k+1)} = -1 = i^2$

توطئة:

ليكن z عدد مركب، θ عمدة له، $r = |z|$ و $k \in \mathbb{Z}$ ، لدينا:

$$\boxed{z = \underbrace{z+iy}_{\text{الشكل الجبري}} = \underbrace{r[\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)]}_{\text{الشكل المثلثي}} = \underbrace{re^{i(\theta+2k\pi)}}_{\text{الشكل الأسي}}}$$

كيفية تعيين قيم العدد الطبيعي n:

- z عدد حقيقي غير معدوم يكافئ $\arg(z) = k\pi$

إذن z^n عدد حقيقي غير معدوم يكافئ $n\cdot\arg(z) = k\pi$

- z عدد حقيقي موجب تماما يكافئ $\arg(z) = 2k\pi$

إذن z^n عدد حقيقي موجب تماما يكافئ $n\cdot\arg(z) = 2k\pi$

- z عدد حقيقي سالب تماما يكافئ $\arg(z) = \pi + 2k\pi$

إذن z^n عدد حقيقي سالب تماما يكافئ $n\cdot\arg(z) = \pi + 2k\pi$

- z تخيلي صرف غير معدوم يكافئ $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

إذن z^n تخيلي صرف غير معدوم يكافئ $n\cdot\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

- z تخيلي صرف موجب تماما يكافئ $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

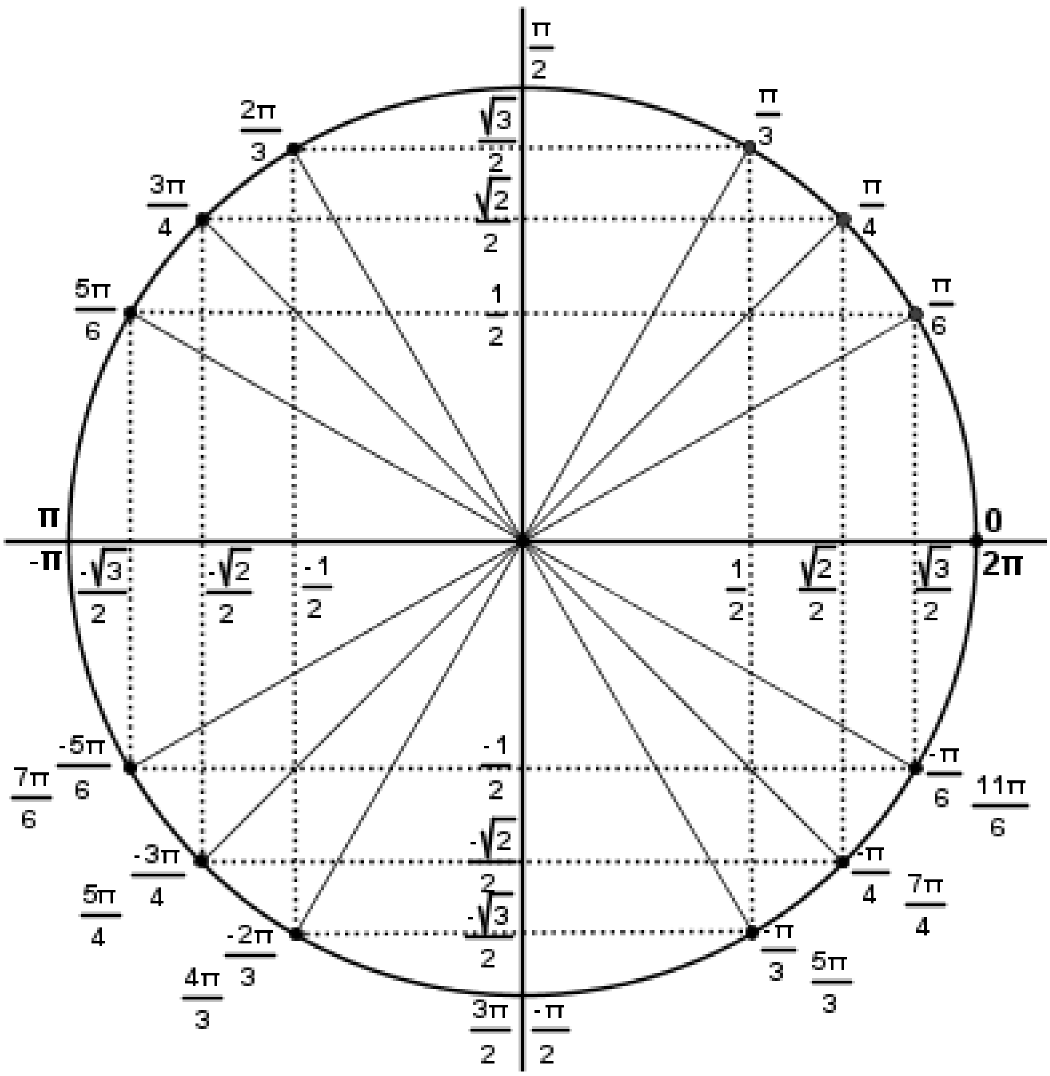
إذن z^n تخيلي صرف موجب تماما يكافئ $n\cdot\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

- z تخيلي صرف سالب تماما يكافئ $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن z^n تخيلي صرف سالب تماما يكافئ $n\cdot\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

- z حقيقي يكافئ $\sin\theta = 0$
- z حقيقي موجب يكافئ $\cos\theta \geq 0$ و $\sin\theta = 0$
- z حقيقي حقيقي سالب يكافئ $\cos\theta \leq 0$ و $\sin\theta = 0$
- z تخيلي $\cos\theta = 0$
- z تخيلي صرف موجب يكافئ $\sin\theta \geq 0$ و $\cos\theta = 0$
- z تخيلي صرف سالب يكافئ $\sin\theta \leq 0$ و $\cos\theta = 0$

الدائرة المثلثية:



🔵 **نتائج (من الدائرة المثلثية):** من أجل كل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$
- $\sin(k\pi) = 0$
- $\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & ; \quad k \text{ زوجي} \\ -1 & ; \quad k \text{ فردي} \end{cases}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} 1 & ; \quad k \text{ زوجي} \\ -1 & ; \quad k \text{ فردي} \end{cases}$
- $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ يكافئ $\cos\theta = \sin\theta$
- $\theta = \frac{\pi}{4} - k\pi$ يكافئ $\cos\theta = -\sin\theta$

🔵 **علاقات مثلثية هامة:**

- $\cos(\theta + \alpha) = \cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha)$
- $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta)\cos(\alpha) + \sin(\theta)\sin(\alpha)$

- $\sin(\theta+\alpha)=\sin(\theta)\cos(\alpha)+\cos(\theta)\sin(\alpha)$
- $\sin(\theta-\alpha)=\sin(\theta)\cos(\alpha)-\cos(\theta)\sin(\alpha)$
- $\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}[\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)]$
- $\sin^2(\theta)=\frac{1}{2}[\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta+\alpha)]$
- $\sin(\theta)\cos(\alpha)=\frac{1}{2}[\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta-\alpha)]$
- $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$
- $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1=1-2\sin^2(\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$
- $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$
- $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$
- $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$
- $\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$
- $\sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$
- $\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(\theta)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\theta)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin(\theta)$
- $\sin(\theta+2k\pi)=\sin(\theta)$
- $\cos(\theta+2k\pi)=\cos(\theta)$
- $\sin(\theta+k\pi)=(-1)^k\sin(\theta)$
- $\cos(\theta+k\pi)=(-1)^k\cos(\theta)$

2 المرجح في المستوي المركب

- المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A ، B و C من المستوي. α ، β و γ أعداد حقيقية.
  - إذا كان: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G من المستوي تحقق العلاقة الشعاعية التالية:
  $$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
  تسمى هذه النقطة مرجح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب، وتسمى أيضا مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$
  - اذا كان: $\alpha+\beta+\gamma=0$ فإن G تكون مركز ثقل الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$
- **خواص المرجح:**
  - إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ فإن النقطة G هي منتصف قطعة المستقيم (AB).

- اذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\alpha)\}$ فإن النقط A، B و G على استقامة واحدة.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\alpha);(C;\alpha)\}$ مع $\alpha \neq 0$ وكانت النقط A، B و C ليست على استقامية فإن: G هي مركز ثقل المثلث ABC.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإن G مرجح الجملة إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;k\alpha),(B;k\beta);(C;k\gamma)\}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ و H مرجح الجملة إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ فإن G مرجح الجملة: $\{(H;\alpha+\beta),(C;\gamma)\}$.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإنه من أجل نقطة M من المستوي يكون:
$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإنه من اجل أي نقطة M من المستوي يكون:
$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$$

لاحقة المرجح:

إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإن لاحقة النقطة G تُعطى بالعبارة:

$$\boxed{z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

3 الدائرة وخصائصها

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما $z_A=a_1+ia_2$ و $z_B=b_1+ib_2$ على الترتيب، لدينا:

- المعادلة الديكارتية للدائرة (C) ذات المركز I ذو اللاحقة $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$ وطول نصف القطر $r=\frac{\sqrt{|z_B-z_A|}}{2}$ تُعطى بالعبارة التالية:
$$x^2+y^2--x(a_1+b_1)-y(a_2+b_2)+a_2+b_2=0$$
- الدائرة المحيطة بالمثلث القائم يكون قطرها هو وتر هذا المثلث.
- الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع يكون مركزها هو ثقل هذا المثلث.
- إذا كان $|z_A-z_w|=|z_B-z_w|=|z_C-z_w|=r$ ، فإن النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز w ونصف القطر r.

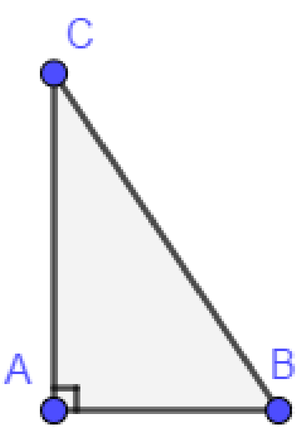
4 المستقيم وخصائصه

لتكن النقطتان $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ ، C و D من المستوي.

المعادلة المختصرة لمستقيم تعطى بـ $y=ax+b$ حيث a هو ميل المستقيم أو معامل توجيهه و b الترتيبة عند المبدأ.

- معامل توجيه مستقيم مار من النقطتين A و B غير المتطابقتين يعطى بالعبارة : $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
- معادلة المستقيم المار بالنقطة A والموازي لمحور الفواصل تعطى بالعبارة التالية: $y=y_A$.
- معادلة المستقيم المار بالنقطة A والموازي لمحور التراتيب تعطى بالعبارة التالية: $x=x_A$.
- يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه.
- يتعامد مستقيمان إذا وفقط إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 .
- يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا كانا عموديان على نفس المستقيم.
- لاثبات أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا، ولأجل ذلك يكفي اثبات أحد العلاقات التالية:
  - $\overrightarrow{CD}=t\overrightarrow{AB}$
  - $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=t$ حيث $t\in\mathbb{R}^*$.
- لاثبات أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدين يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدين، ولأجل ذلك يكفي اثبات أحد العلاقات التالية:
  - $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
  - $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}+k\pi$
  - $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$
  - $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}=ki$ حيث $k\in\mathbb{Z}$
- لاثبات أن النقط $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{C}$ في استقامية، يكفي اثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا

5 التعرف على طبيعة مثلث



- **المثلث القائم:**

إذا كان: $\boxed{\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=iy}$ حيث: $y\in\mathbb{R}^*-\{-1;1\}$

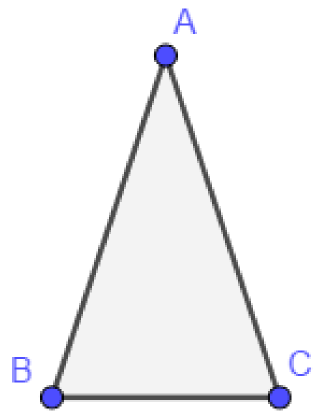
مع $z_A\neq z_C$ و $z_A\neq z_B$

فإن: المثلث ABC قائم في A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\arg(iy)=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad;\quad k\in\mathbb{Z}$$

المثلث متساوي الساقين:



إذا كان: $\boxed{\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1}$ و $\boxed{\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \theta + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$

حيث: $\theta \neq \left\{\pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{\pi}{3}\right\}$

مع $z_A \neq z_C$ و $z_A \neq z_B$

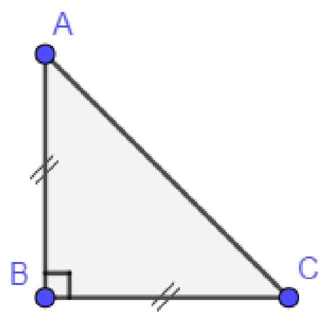
فإن: المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC = AB \Leftarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \theta + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

المثلث القائم ومتساوي الساقين:



إذا كان: $\boxed{\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i}$ مع $z_A \neq z_C$ و $z_A \neq z_B$

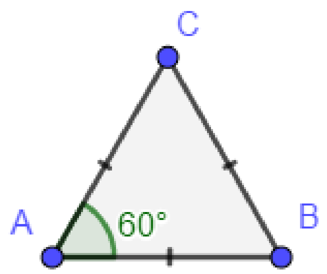
فإن: المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC = AB \Leftarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = |\pm i| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \arg(\pm i) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

المثلث المتقايس الأضلاع:



إذا كان: $\boxed{\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1}$ و $\boxed{\left\{\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}\right\}}$

مع $z_A \neq z_C$ و $z_A \neq z_B$

فإن: المثلث ABC متقايس الأضلاع رأسه A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC = AB \Leftarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$$

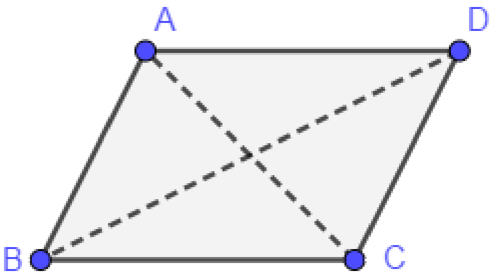
$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

ملاحظات هامة:

- **الارتفاع** هو قطعة مستقيم تكون صادرة من رأس من رؤوس المثلث و تكون عمودية غلى الضلع المقابل و يمثل الارتفاع البعد بين الرأس و الضلع المقابل كما تتقاطع الارتفاعات في نقطة تسمى المركز القائم.
- **المحور** هو مستقيم يمر من أحد أضلاع المثلث في منتصفه و يكون عموديًا عليه و تتلاقى محاور مثلث في نقطة تسمى مركز الدائرة المحيطة بمثلث و يكون لهذه النقطة نفس البعد عن رؤوس المثلث الثلاث و يكون تقاطع محورين فقط كافيا لمعرفة مركز هذه الدائرة.

- **المتوسّط** هو قطعة مستقيم تنطلق من رأس من رؤوس المثلث و تمر من منتصف الضلع المقابل وتتقاطع الموسطات الثلاث في نقطة تسمى مركز ثقل المثلث و يكون تقاطع موسطين فقط كافيا لمعرفة مركز الثقل. كما يكون البعد بين رأس المثلث و مركز الثقل مساويا لـ $2/3$ المتوسط الصادر من ذلك الرأس.
- **المنصف**: هو مستقيم يمرّ من راس من رؤوس المثلث و يقسم الزاوية إلى نصفين و تتقاطع المنصفات الثلاثة في مركز الدائرة المحاطة بالمثلث وهي الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلث الثلاث.

6 التعرف على طبيعة رباعي



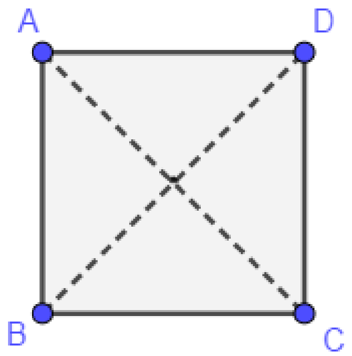
متوازي الأضلاع:

$ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي : $z_B - z_A = z_C - z_D$
- القطران متناصفان أي:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

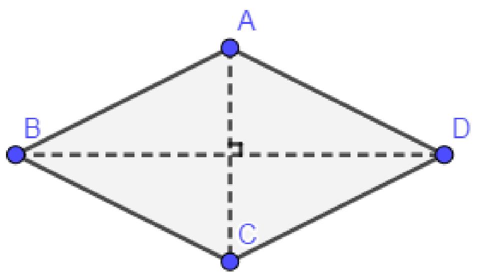
المربع:



$ABCD$ مربع إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- اذا تحققت الشروط الثلاثة معا:
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$
  - $AB = AD$ أي: $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$
  - $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \pm\frac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$
- القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان أي اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:
  - $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$
  - $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$
  - $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

المعين:

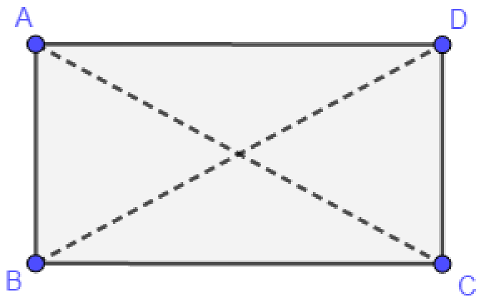


$ABCD$ معين إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- اذا تحقق الشرطين التاليين معا:
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$
  - $AB = AD$ أي: $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

- **القطران متناصفان ومتعامدان أي اذا تحقق الشرطين التاليين معا:**
  - $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$
  - $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$

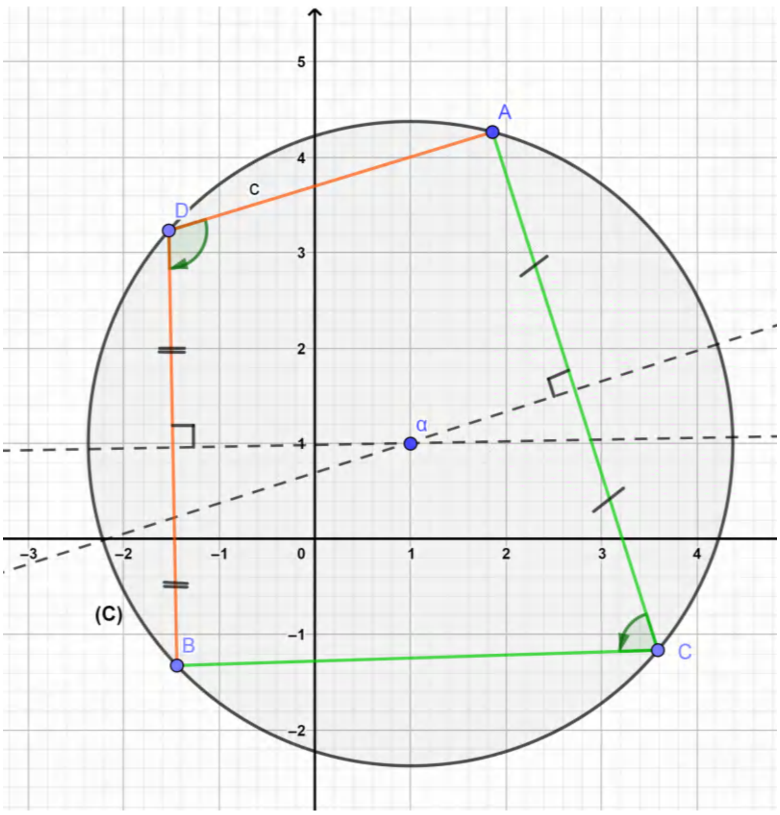
المستطيل:



$ABCD$ مستطيل إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- اذا تحقق الشرطين التاليين معا:
  - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي: $z_B-z_A=z_C-z_D$
  - $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\pm\frac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$
- **القطران متناصفان ومتساويان أي اذا تحقق الشرطين التاليين معا:**
  - $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$
  - $|z_B-z_A|=|z_D-z_A|$

نتيجة:



تكون النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

○ $k \in \mathbb{Z}$; $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}) + k\pi$ أي:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

وهذا معناه أن الزاويتان $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ و $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB})$ متكاملتان.

○ أو:

$$\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \cdot \left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right) = \alpha \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

7 المعادلات في $\mathbb{C}$

● **المعادلة $z^2 = a$:** حيث: $a \in \mathbb{R}^*$

○ إذا كان $a > 0$ فإن للمعادلة حلان هما: $z = \sqrt{a}$ ، $z = -\sqrt{a}$

○ إذا كان $a < 0$ فإن للمعادلة حلان هما: $z = i\sqrt{-a}$ ، $z = -i\sqrt{-a}$

● **المعادلة $az^2 + bz + c = a$:** حيث a، b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى المميز.

○ إذا كان $\Delta > 0$ فإن للمعادلة حلين مختلفين هما:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

○ إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حل حقيقي مضاعف هو:

$$z = -\frac{b}{2a}$$

○ إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين ومختلفين هما:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

● **نتائج:**

○ $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

○ $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$

8 مجموعات النقط في المستوي المركب

لنعتبر في كل ما سيأتي أن A، B و M نقط من المستوي المركب لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z

● $\boxed{|az - z_A| = |z_O|}$: مع $a; z_O \in \mathbb{C}^*$:

○ إذا كان $a = 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = |z_O|$
$\left(AM = r \text{ يكافئ } |z - z_A| = |z_O|\right)$

○ إذا كان $a \neq 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $\frac{z_a}{2}$ ونصف قطرها $r = \left|\frac{z_O}{a}\right|$

● $\boxed{|z - z_A| = |kz_O - z_B|}$: مع $k \in \mathbb{C}$ و $z_A \neq z_B$:

○ إذا كان $k = 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = |z_B|$.

○ إذا كان $k = 1$ فإن مجموعة النقط M هي محور قطعة المستقيم (AB)
$\left(AM = BM \text{ يكافئ } |z - z_A| = |z - z_B|\right)$

○ إذا كان $k = -1$ فإن مجموعة النقط M هي محور قطعة المستقيم (AB') ، حيث B' لاحقتها هي: $z_{B'} = -z_B$
$\left(AM = B'M \text{ يكافئ } |z - z_A| = |-z - z_B| = |-(z - (-z_B))| = |z - z_{B'}|\right)$

○ إذا كان $k \in \mathbb{C}^*$ و $|k| \neq 1$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي دائرة قطرها $[GH]$، حيث G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(E;-k)\}$ و H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(E;k)\}$ مع E نقطة لاحقتها $z_E = \frac{z_B}{k}$.

● $\boxed{(z - z_A)\overline{(z - z_A)} = |z_O|}$: مع $z_O \in \mathbb{C}$:

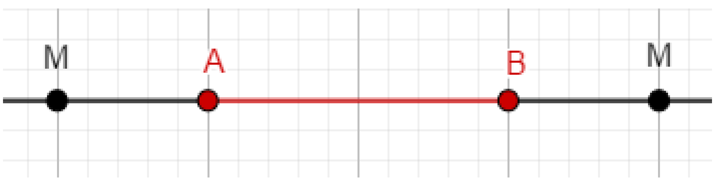
○ إذا كان $z_O \neq 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = \sqrt{|z_O|}$

○ إذا كان $z_O = 0$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة A.

$\left((z - z_A)\overline{(z - z_A)} = 0 \text{ : وعليه } (z - z_A) = 0 \text{ أو } \overline{(z - z_A)} = 0 \text{ هذا يعطينا } z = z_A \text{ أو } \bar{z} = \overline{z_A}\right)$

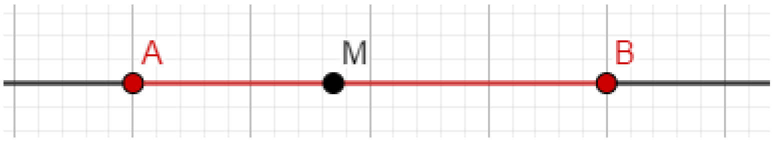
● $\boxed{arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \theta}$: مع $\theta \in \mathbb{R}$ و $z \neq z_A \neq z_B$:

○ إذا كان $\theta = 0 + 2k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $]AB[$.



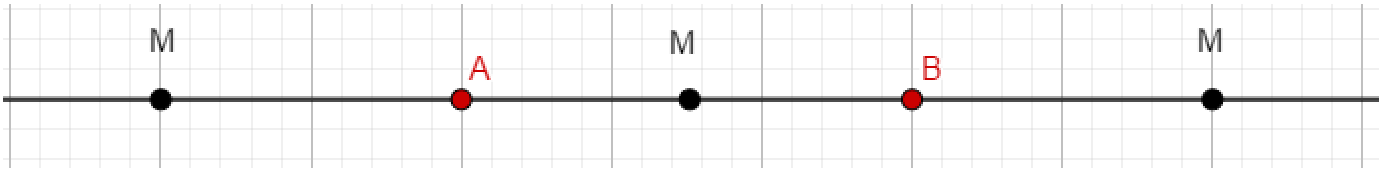
- شكل يوضح مجموعة النقط *M* والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

○ إذا كان $\theta = \pi + 2k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي القطعة المستقيمة $]AB[$ باستثناء النقطتين A و B



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

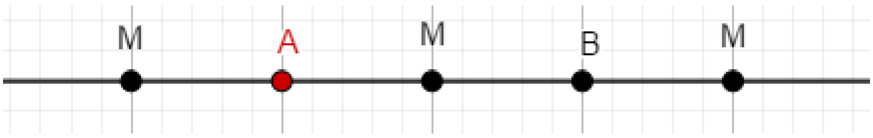
○ إذا كان $\boldsymbol{\theta = 0 + k\pi}$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

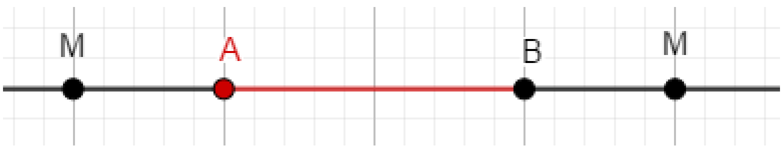
$\boxed{L = \frac{z-z_B}{z-z_A}}$: مع $z \neq z_A$:

○ إذا كان L **حقيقي** فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A ونرمز لها بالرمز $(AB) - \{A\}$.



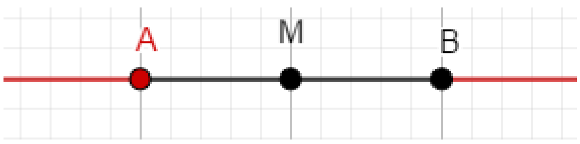
-شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

○ إذا كان L **حقيقي موجب** فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة $]AB[$ ، ونرمز لها بالرمز $(AB) -]AB[$.



-شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

○ إذا كان L **حقيقي سالب** فإن مجموعة النقط M من المستوي هي قطعة المستقيم $[AB]$ باستثناء النقطة A ، ونرمز لها بالرمز $[AB] - \{B\}$.



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

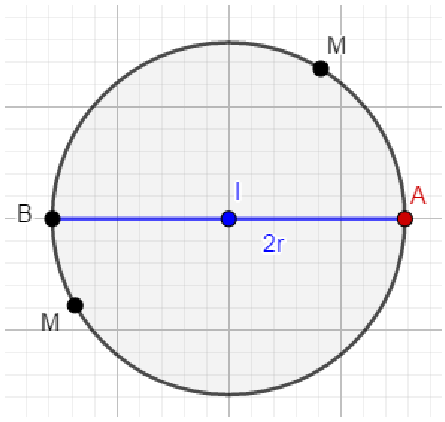
○ إذا كان L **تخيلي صرف**: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي مركزها النقطة I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطة A



-شكل يوضح مجموعة النقط M
والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

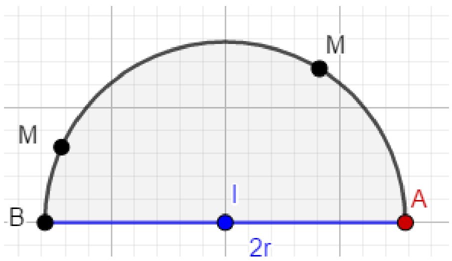
○ إذا كان L **تخيلي موجب**: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع فوق المستقيم (AB) في الاتجاه المباشر) التي مركزها النقطة I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطة A



-شكل يوضح مجموعة النقط M
والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

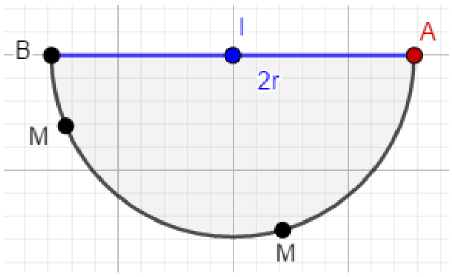
○ إذا كان L **تخيلي سالب**: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع تحت المستقيم (AB) في الاتجاه المباشر) التي مركزها النقطة I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطة A



-شكل يوضح مجموعة النقط M
والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

● $\boxed{arg(z - z_A) = \overline{arg(z - z_A)}}$: مع $z \neq z_A$:

مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AM) الموازي لحامل محور الفواصل باستثناء النقطة A.

الخليل للرياضيات

- $\boxed{z = z_A + qe^{i\theta}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$ (متغير) و $q \in \mathbb{R}^*$ (معلوم):
مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي مركزها النقطة A وطول نصف قطرها r حيث: $r = |q|$
- $\boxed{z = z_A + qe^{i\theta}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$ (معلوم) و $q \in \mathbb{R}^*$ (متغير):
  - إذا كان: $q \in \mathbb{R}$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \theta + k\pi \;; k \in \mathbb{Z}$.
  - إذا كان: $q \in \mathbb{R}_+$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \theta + 2k\pi \;; k \in \mathbb{Z}$.
  - إذا كان: $q \in \mathbb{R}_-$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \theta + (2k+1)\pi \;; k \in \mathbb{Z}$.
- $\boxed{arg(z - z_A) = arg(qz - z_B)}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$ (معلوم) و $q \in \mathbb{R}^*$ (متغير):
  - إذا كان: $q = 1$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B
  - إذا كان: $q = -1$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB') باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$.
  - إذا كان: $q = i$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع **فوق** المستقيم (AB') في الاتجاه المباشر) التي طول نصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB'}{2}$ ومركزها النقطة I ذات اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_{B'}}{2}$ ، باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$
  - إذا كان: $q = -i$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع **تحت** المستقيم (AB') في الاتجاه المباشر) التي طول نصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB'}{2}$ ومركزها النقطة I ذات اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_{B'}}{2}$ ، باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$
- **توجيه :**
إذا صعب عليك تعيين مجموعة النقط فاستعمل الطريقة التحليلة وذلك بوضع $z = x + iy$، وركز جيدا في النشر والتبسيط والحساب.

9 التحويلات النقطية في المستوي المركب

f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$. والمعرف كما يلي:
$$f(z) = az + b$$

M' هي صورة النقطة M : $M' = f(M)$.

- في حالة الشكل المركب: $\boxed{z' = az + b}$:

إذا كان: $a \in \mathbb{R}$ و $a = 1$

فإن f انسحاب:
لاحقة شعاعه $\vec{v}$ هي:
$z_{\vec{v}} = b$

إذا كان: $a \in \mathbb{R}$ و $a \neq 1$

فإن f تحاكي:
نسبته $k = a$
ولاحقة مركزه w هي:
$$z_w = \frac{b}{1-a}$$

إذا كان: $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$

فإن f دوران:
نسبته: $k = 1$
زاويته $\theta = \arg(a)$
ولاحقة مركزه w هي:
$$z_w = \frac{b}{1-a}$$

إذا كان: $a \in \mathbb{C}$ و $|a| \neq 1$

فإن f تشابه مباشر:
نسبته: $k = |a|$
وزاويته $\theta = \arg(a)$
ولاحقة مركزه w هي:
$$z_w = \frac{b}{1-a}$$

- في حالة الشكل المركب: $\boxed{z' - z_w = a(z - z_w)}$:
  - f تحاكي: نسبته k ولاحقة مركزه z_w. عبارته المركبة: $z' - z_w = k(z - z_w)$.
  - f دوران: زاويته θ ولاحقة مركزه z_w. عبارته المركبة: $z' - z_w = e^{i\theta}(z - z_w)$.
  - f تشابه مباشر: نسبته k وزاويته θ ولاحقة مركزه z_w. عبارته المركبة: $z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w)$

- **تعيين تحويل نقطي يحول نقطتين :**

يطلب السؤال بالشكل التالي:

أوجد طبيعة التحويل R الذي يحول النقطة A إلى النقطة B ويحول النقطة C إلى النقطة D مع تعيين عناصره المميزة.

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \dots (1) \\ z_D = az_C + b \dots (2) \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نجد: $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

من a نعين طبيعة التحويل R ، بعد ذلك نعوض قيمة a في (1) أو (2) ثم نجد العناصر المميزة للتحويل R.

الاستنتاج من علاقة أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل:

اذا كان $a=\frac{z_B-z_w}{z_A-z_w}$ فإن: $z_B-z_w=a(z_A-z_w)$ وهذا يعني أن النقطة B هي صورة النقطة A بالتحويل الذي مركزه w، ويتم تحديد طبيعة التحويل من خلال قيمة كما ذكرنا سابقا.

تركيب التحويلات النقطية:

- تركيب عدة انسحابات هو انسحاب، شعاعه هو مجموع أشعتها.
- تركيب عدة تحاكيات لها نفس المركز هو تاحكي، له نفس المركز ونسبته هي جداء النسب.
- تركيب عدة دورنات لها نفس المركز هو دوران، له نفس المركز، وزاويته هي مجموع الزوايا.
- تركيب عدة تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو تشابه مباشر، له نفس المركز ونسبته هي جداء النسب وزاويته هي مجموع الزوايا.
- اذا اختلفت مركز التحويلات النقطية أو كانت من طبائع مختلفة، نتعرف على طبيعة مركباتها باستعمال العبارة المركبة ونستعمل نفس الطريقة المستخدمة في تركيب الدوال العددية.

2

تطبيقات للتمرن

التطبيق 01
تعيين الشكل الجبري

❶ اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية:

① $z_1 = \left(2 + i\sqrt{3}\right)(5 - i) + \left(\frac{1}{2} + 3i\right)^2$

② $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+2i}$

③ $z_3 = \frac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$

التطبيق 02
حساب قوى العدد

❶ احسب: i^3 ، i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8

❷

① اثبت انه اذا كان العدد الطبيعي غير المعدوم n من مضاعفات 4 فإن $i^n = 1$.

② عين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، i^n ، ثم استنتج i^2021..

التطبيق 03
تعيين مجموعة النقط

نعتبر العدد المركب $z = x^2 + y^2 - 4 + i(2x + y + 1)$ ، حيث x و y.

❶ عين ثم أنشئ المجموعة (Γ_1) للنقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث يكون z عدد حقيقي.

❷ عين ثم أنشئ المجموعة (Γ_2) للنقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث يكون z تخيلي صرف.

التطبيق 04
الاثبات دون حساب

ليكن العددان المركبان $z_1 = \frac{3-i}{5+7i}$ ، $z_1 = \frac{3+i}{5-7i}$

❶ تحقق أنَ: $z_2 = \overline{z_1}$.

❷ استنتج دون اجراء حساب أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي وأن $z_1 - z_2$ هو عدد تخيلي صرف.

❸ احسب $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ وتحقق من صحة هذه النتائج.

التطبيق 05
استعمال الخواص والعمليات على المرافق

P هو كثير حدود معرف في $\mathbb{C}$ بـ: $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$

❶ اثبت أنه من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

❷ تحقق أن: $(1+i)$ جذر لكثير الحدود P . ثم استنتج جذرا آخر لـ P.

التطبيق 06
تعيين مجموعة نقط بطريقتين

- عين في المستوي المركب، مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $Z = z^2 + \overline{z}$ حقيقي.

التطبيق 07
قراءة طويلة وعمدة عدد مركب

- مثل في المستوي المركب النقط ذات اللواحق التالية: 3 ، $2i - 4$ ، $-1 + i$ ، $2 - 2i$
ثم بدون حساب، وباعتبارات هندسية، اعطِ الطويلة وعمدة لكل عدد.

التطبيق 08
الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي

❶ عين الطويلة وعمدة العدد المركب $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

❷ استنتج الشكل المثلثي للعدد z

التطبيق 09
التعرف على الشكل المثلثي لعدد مركب

في كل حالة من الحالات التالية، جد الطويلة وعمدة للعدد المركب z :

❶ $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

❷ $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

❸ $z = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

التطبيق 10
حساب قوى عدد مركب

❶ اعطِ الشكل الجبري للعدد المركب $z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^5$

❷ اعطِ الشكل الجبري للعدد المركب $z = \frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}$

التطبيق 11
مقارنة كتابة عددين مركبين واستنتاج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

❶ اكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية $z_1 = \sqrt{3} - i$ ، $z_2 = 1 - i$ ، $Z = \frac{z_1}{z_2}$

❷ اكتب Z على الشكل الجبري واستنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

التطبيق 12
تعيين مجموعة أعداد طبيعية

n عدد طبيعي، نضع $z=\left(\sqrt{3}+i\right)^n$.

❶ عين عمدة للعدد المركب z.

❷ استنتج المجموعة (E) قيم n التي يكون من أجلها z عدد حقيقي موجب تماما.

التطبيق 13
الانتقال من شكل إلى آخر

في كل حالة، اكتب العدد المركب z على الشكل الأسي، ثم استنتج الشكل الجبري لكل من $\bar{z}$ و $\frac{1}{z}$.

❶ $z=\frac{1}{1+i}$.

❷ $z=2ie^{i\frac{2\pi}{3}}$.

❸ $z=-7e^{i\frac{\pi}{6}}$.

التطبيق 14
استعمال الأشكال المختلفة لعدد مركب

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، (وحدة الرسم : $4cm$).

نعتبر النقط A، B، C و D ذات اللواحق على الترتيب: $a=1$ ، $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

❶ اكتب c على الشكل الأسي و d على الشكل الجبري.

❷

① مثل النقط A، B، C و D في المعلم السابق.

② برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين.

التطبيق 15

حل معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول z: $z^2-2(\sin\theta)+1=0$ ، حيث θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0;\pi[$.

❶ تحقق أن $\Delta=-4\cos^2\theta$.

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة المقترحة وتحقق أن حلول هذه المعادلة، تكتب: $z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ و $z_2=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

التطبيق 16

حل معادلة من الدرجة الرابعة بمعاملات حقيقية

نعتبر كثير الحدود: $P(z)=z^4-4z^3+4z^2-4z+3$

❶ اثبت أنه يوجد كثير حدود $Q(x)$ من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية حيث أنه من أجل كل عدد مركب z

$$P(z)=(z^2+1)Q(x)$$

❷ استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $P(z)=0$.

التطبيق 17

حل معادلة باستعمال الشكل الجبري

- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-\overline{z}+\frac{1}{4}=0$

التطبيق 18

استعمال نسبة أعداد مركبة

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $a=-2$ ، $b=2$ ، $c=-1+i$ و $d=1-3i$.

- اثبت أن المثلثين BCD و ACD قائمين.

التطبيق 19
تعيين مجموعة نقط

A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A=1+i$ و $z_B=2i$.

نرفق بكل عدد مركب z ، $z\neq z_A$ العدد المركب

$$z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$$

1. عين المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ ، حيث $|z'|=1$.
2. عين المجموعة (Ω) للنقط $M(z)$ ، حيث z حقيقي .
3. عين المجموعة (Δ) للنقط $M(z)$ ، حيث z تخيلي صرف

التطبيق 20
استعمال العبارة المركبة للتحاكي

h هو التحاكي الذي نسبته 2 ومركزه النقطة I ذو اللاحقة $1+i$. لتكن النقطة A ذات اللاحقة $(-1-2i)$.

1. عين العبارة المركبة للتحاكي h.
2. عين لاحقة النقطة A' صورة A بالتحاكي h .

التطبيق 21
استعمال العبارات المركبة

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A، B، C ، D و الشعاع $\vec{\omega}$ ذات اللواحق:

$z_A=\frac{3}{2}+6i$ ، $z_B=\frac{3}{2}-6i$ ، $z_C=-3-\frac{1}{4}i$ ، $z_D=3+2i$ ، $z_{\vec{\omega}}=-1+\frac{5}{2}i$

h هو التحاكي الذي مركزه C ونسبته $-\frac{1}{3}$ ، t هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{\omega}$ و r هو الدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

❶ احسب لواحق النقط: $E = t(B)$ ، $F = h(D)$ و $G = r(D)$.

❷ اثبت أن المثلث DEF قائم ومتساوي الساقين، واستنتج طبيعة الرباعي $DEFG$.

التطبيق 22

استعمال البرهان هندسيا

في المستوي المركب، ABC هو المثلث بحيث القيس الرئيسي للزاوية $(\overline{AB};\overline{AC})$ ينتمي إلى $]0;\pi[$.

- أنشئ خارج هذا المثلث، المربعين $ACRS$ و $BAMN$ ثم متوازي الأضلاع $MASD$ (وليكن I مركزه)

الهدف من التمرين هو اثبات أن المستقيم (AD) هو ارتفاع للمثلث ABC وأن $AD = BC$

لهذا نستعمل طريقتين:

- **ط1: استعمال الاعداد المركبة:**

a، b و c هي لواحق على الترتيب للنقط A، B و C

❶ احسب لواحق النقطتين S و M بدلالة a، b و c.

❷ احسب لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ولاحقة الشعاع $\overrightarrow{BC}$.

❸ اثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان، وأن $AD = BC$.

- **ط2: طريقة هندسية:**

ليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

❶ ما هي صور النقط M و C بالدوران r ؟

❷ S' هي صورة S بالدوران r ، اثبت أن النقطة A هي منتصف القطعة المستقيمة $[CS']$.

❸ I' هي صورة I بالدوران r ، اثبت أن النقطة I' هي منتصف القطعة المستقيمة $[BS']$.

❹ استنتج ان المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (BC) و أن $AD = BC$.

3

تمارين ومسائل للتعمق:

◄ 17 تمرين ►

التمرين 01

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C ذات اللاحقات على الترتيب: $z_A = 4$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$

1. عين الطويلة وعمدة للعدد z_B واستنتج طويلة وعمدة لـ z_C .
2. نعتبر العدد المركب $(z_B - z_A)$. اكتب هذا العدد على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي.
3. عين طويلة وعمدة للعدد $\frac{z_B}{z_B-z_A}$ ، واستنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_C}{z_C-z_A}$.
4. استنتج أن النقط O، A ، B و C تنتمي إلى دائرة يُطلب تحديدها.

التمرين 02

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $a = 5 - i\sqrt{3}$ و $b = 4 + 2i\sqrt{3}$ ، ولتكن C منتصف $[OB]$.

1. عين d لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
2. اثبت أن: $\frac{d-a}{d}$ تخيلي صرف، ما ذا تستنتج بالنسبة للمثلث ODA ؟
3. لتكن النقطة E ذات اللاحقة $e = \frac{2a}{3}$ ، احسب $\frac{d-b}{d-c}$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقط B ، E و D ؟

التمرين 03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$،

1. نعتبر التحويل النقطي h الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = 3z + 4 - 6i$$

① حدد طبيعة التحويل h وعناصره المميزة.

② اكتب z بدلالة z' ؟

③ (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $|z + 2 - 3i| = 1$. حدد المجموعة (Γ) ثم استنتج أن صورتها بالتحويل h هي دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

❷ A، B، C و D هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$z_A = i$ ، $z_B = 4 - 3i$ ، $z_C = -2 + 3i$ و $z_D = \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}$.

① بين أن النقطة D هي نقطة من حامل محور الفواصل يطلب تعيين فاصلتها.

② ما طبيعة المثلث ABC مع التبرير؟

التمرين 04

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z) = (z + 1 + i)(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64)$

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$ ، ثم اكتب الحلول على الشكل الأسي.

❷ نضع $a = -1 - i$ و $b = 4\sqrt{3} - 4i$

① اكتب $\frac{a}{b}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

② استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$

③ بين أن العدد $\left(\frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{a}{b}\right)^{144}$ حقيقي.

④ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، النقط A و B لواحقها على الترتيب a و b .

- عين لاحقة النقطة C حتى تكون النقطة O مركز ثقل المثلث ABC.

التمرين 05

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D ذات اللواحق بهذا الترتيب:

$z_A = 1 + i$، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_B = 2z_B$ و $z_D = 3$.

- علم هذه النقط في المعلم.

❸ اثبت أن النقط الثلاثة A، B و C تنتمي إلى دائرة مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

❹ احسب $\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC.

❺ نعتبر النقطة C' صورة C بالتحاكي الذي مركزه D ونسبته 2 والنقطة E صورة النقطة F بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- اثبت أن المستقيمين (AC) و (EF) متعامدان.

التمرين 06

نعتبر من أجل كل عدد مركب z:

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$$

❶

① عين العدد الحقيقي b بحيث يكون: $P(z) = (z-2)(z^2 + bz + 4)$

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر الأعداد المركبة:

$z_0 = 2$ ، $z_1 = \sqrt{2}(-1+i)$ ، $z_2 = \sqrt{2}(-1-i)$

① عين الطويلة وعمدة لكل من z_1 و z_2 .

② علم النقط A، B و C ذات اللواحق z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب، ثم النقطة I منتصف $[AB]$.

③ اثبت أن المثلث OAB متساوي الساقين، ثم استنتج قيس للزاوية $(\overline{u}; \overline{OI})$.

④ احسب z_I لاحقة النقطة I، ثم طويلة z_I .

⑤ استنتج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

التمرين 07

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

❶ من أجل كل عدد مركب z، $Re(z^2) = \left(Re(z)\right)^2$.

❷ z عدد مركب غير معدوم، في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A، B و C ذات اللواحق z ، $\overline{z}$ و $\frac{z^2}{\overline{z}}$ على الترتيب من نفس الدائرة ذات المركز O.

❸ من أجل كل عدد مركب z:

إذا كان : $|1+iz| = |1-iz|$ فإن: $Img(z) = 0$

❹ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، z و z' عددان مركبان غير معدومين. M و M' نقطتان لاحقتيهما z و z' على الترتيب.

إذا كان $|z+z'| = |z-z'|$ فإن: المستقيمين (OM) و (OM') متعامدان.

التمرين 08

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

❶

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-3z+3=0$

② نسمي z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

- اكتب العدد المركب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)$ على الشكل الأسي ثم احسب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)^6$

❷ M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' نقطة من المستوي لاحقتها z' حيث: $z'=z^2-4z$

A، B و I ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب هي:

$z_A=2$ ، $z_B=-4$ و $z_I=-3$.

① احسب $(z'+4)$ بدلالة $(z-2)$، ثم استنتج $|z'+4|$ بدلالة $|z-2|$ و $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z+2)$.

② برهن أنه إذا كانت النقطة M من الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 2 فإن النقطة M' هي من دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

③ برهن أنه إذا كان الشعاع $\overrightarrow{AM}$ عموديا على الشعاع $\vec{u}$ فإن الشعاع $\overrightarrow{BM'}$ مواز للشعاع $\vec{u}$.

④ عين قيم العدد المركب z حتى يكون الرباعي $OMIM'$ متوازي الاضلاع.

التمرين 09

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب

$z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$.

❶

① علم النقط A، B و C.

② ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل اجابتك.

③ عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$

❷ عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

الخليل للرياضيات

$$\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=12$$

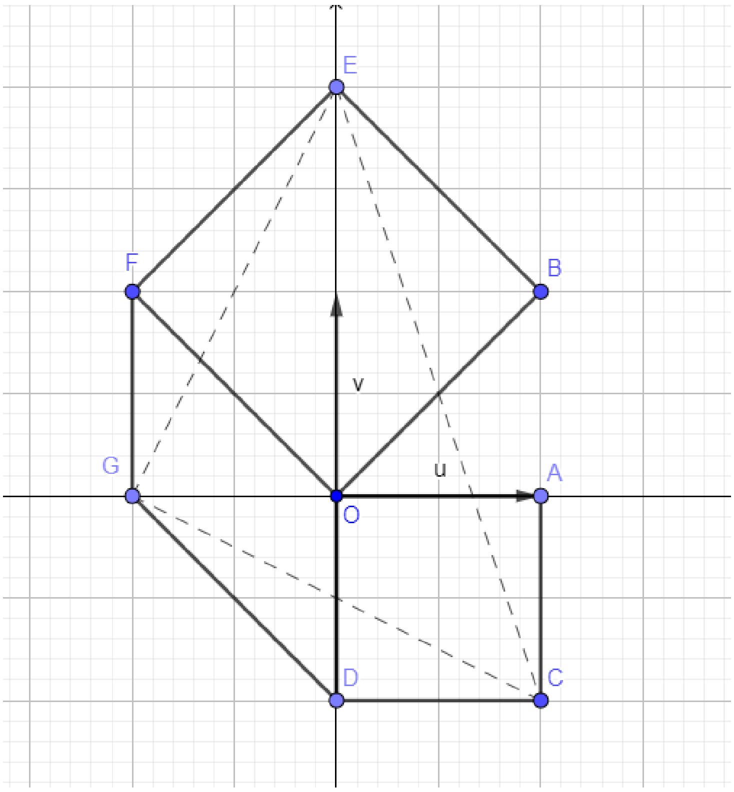
❸

① حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+13=0$ (نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة).

② لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب. عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$|z-z_0|=|z-z_1|$$

التمرين 10



المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر في هذا المستوي النقطة A ذات اللاحقة 1 ، النقطة B ذات اللاحقة b حيث b هو عدد مركب جزؤه التخيلي موجب تماما.

ننشئ خارج المثلث OAB ، المربعان المباشران $ODCA$ و $OBEF$ كما هو موضح في الشكل المقابل:

❶ عيّن الاحقتان c و d للنقطتين C و D على الترتيب.

❷ ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① عين الكتابة المركبة للدوران r

② استنتج أن اللاحقة f للنقطة F تساوي ib.

③ عين اللاحقة e للنقطة E.

❸ نسمي G النقطة التي من أجلها يكون الرباعي $OFGD$ متوازي أضلاع.

- اثبت أن اللاحقة g للنقطة G تساوي $i(b-1)$.

❹ اثبت أن: $\frac{e-g}{c-g}=i$ ، ثم استنتج أن المثلث EGC قائم ومتساوي الساقين.

التمرين 11

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z حيث $z\neq 2-3i$:

$$z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}\dots(E)$$

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

❷ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما على الترتيب: $a=1\sqrt{5}i$ و $b=\overline{a}$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يُطلب تعيين نصف قطرها.

❸ نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث:

$$z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

والنقط C، D و E لواحقها على الترتيب: $c=-2i$ ، $d=2-3i$ و $e=3i$

و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

① عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

② استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، تحقق أن E تنتمي (γ).

التمرين 12

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A، B و C لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1-i$ ، $z_B=-1+i$ و $z_C=\sqrt{3}(1+i)$.

❶ اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة z_A، z_B و z_C.

❷

① احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

② حدد طبيعة المثلث ABC.

❸ عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACDB$ معينا.

❹ T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=(-1+i)z+1-3i$$

① عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

② عين العبارة المركبة للتحويل $T\circ T$ ، ثم استنتج طبيعته وعناصره المميزة.

التمريـن 13

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$

❷ علم النقط A، C ، D و I ذات اللاحقات: $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$

❸ z عدد مركب يُحقق الجملة:

$$\begin{cases} \arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\dfrac{\pi}{2} \\ |z-3+2i|=|z-1| \end{cases}$$

① بين أن الجملة تكافئ:

$$\frac{z-3+2i}{z-1}=i$$

ثم عين العدد المركب z

② B هي النقطة ذات اللاحقة $z_B=3$، تحقق أن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ، ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

③ لتكن E النقطة ذات اللاحقة $z_E=1-2i$.

- اكتب على الشكل الأسي العدد المركب Z حيث:

$$Z=\frac{z_A-z_E}{z_B-z_E}$$

- تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}$. ما طبيعة الرباعي $ABIE$.

التمريـن 14

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

❶ L هو العدد المركب حيث: $L=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$.

① احسب L^2 ، ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب L^2.

② استنتج الطويلة وعمدة للعدد L واكتبه على الشكل المثلثي.

③ عين القيم المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

④ α هو العدد المركب حيث $\alpha=\frac{L}{2+2i}$ ، بين أن $\alpha=e^{i\frac{\pi}{6}}$

❷ T هو التحويل النقطي للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=-2\alpha z$.

① حدد طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

② A و B نقطتان لاحقتيهما على الترتيب $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A)

- عين لاحقتي النقطتين A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتحويل T.

❸ (γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $\left|z - \sqrt{3} + i\right| = 2$.

① بين أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (γ).

② عين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ) صورة المجموعة (γ) بالتحويل T .

التمرين 15

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 + z + 1 = 0$

❷ نعتبر النقط A، B و M ذات اللاحقات: $2z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و z على الترتيب.

① اكتب z_A على الشكل الأسي.

② عين مجموعة النقط من المستوي حيث:

$$\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$$

❸

① التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = z_A z + z_B\sqrt{3}$

- ما طبيعة التحويل r . عين هناصره المميزة.

② التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = -2z + 3i$

- عين نسبة ومركز التحاكي h

③ نضع $S = h \circ r$. عين طبيعة التحويل s مبرزا عناصره المميزة، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي:

$$z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$$

❹ نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C، D و E حيث:

$S(O) = C$ ، $S(C) = D$ و $S(D) = E$

- بين أن النقط O، Ω و E في استقامية.

❺

① عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث:

$$z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

حيث θ عدد حقيقي.

② عين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل (S).

التمرين 16

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$

وأعطِ الحلول على شكلها الجبري والأسي (مع التبرير)

❷ لتكن النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A=1+i$ و $z_B=2i$

نرفق لكل عدد مركب z يختلف عن z_A العدد المركب:

$$z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$$

① لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عدد تخيلي صرف. عين وأنشئ المجموعة (E).

② لتكن (F) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'|=1$. عين وأنشئ المجموعة (F).

❸ ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

① أحسب لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران R ولاحقة النقطة I' صورة النقطة $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ بهذا الدوران.

② ما هي صور كل من المجموعتين (E) و (F) بالدوران R.

التمرين 17

اختر الإجابات الصحيحة في كل ما يأتي مع التعليل:

في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

❶ لتكن المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z=1-2i+e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}^*$

① (E) هي المستقيم الذي يشمل النقطة ذات اللاحقة $1-2i$

② (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1+2i$ ونصف قطرها 1.

③ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-2i$ ونصف قطرها 1.

④ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-2i$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

❷ ليكن f التطبيق الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=-iz-2i$.

① التطبيق f هو تحاكي.

② النقطة ذات اللاحقة $-1-2i$ هي سابقة للنقطة ذات اللاحقة i .

③ التطبيق f هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $1+i$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

④ التطبيق f هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $-1-i$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

❸ لتكن المجموعة (F) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق:

$$|z-1+i| = |z+1+2i|$$

وليكن A، B و C النقط ذات اللواحق $1-i$، $-1+2i$ و $-1-2i$ على الترتيب.

① النقطة C هي نقطة من المجموعة (F).

② (F) هي محور القطعة $[AB]$.

③ (F) هي محور القطعة $[AC]$.

④ (F) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

❹ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z+|z|^2 = 7+i$ ، هذه المعادلة تقبل:

① حلين متمايزين حيث جزؤهما التخيلي يساوي 1.

② حلا حقيقيا.

③ حلين متمايزين حيث الجزء التخيلي لأحدهما فقط يساوي 1.

④ حلا حيث جزؤه التخيلي يساوي 2.

4

تمارين بكالوريات سابقة:

شعبة علوم تجريبية

◄ 28 تمرين ►

التمرين 01

4.5ن

بكالوريا 2008

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❺

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث: $|z_1|<|z_2|$

② بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

❻ المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن A، B و C نقط من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1، z_1 وz_2 .

وليكن Z العدد المركب حيث: $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

① انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ومن الخاصية: $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن: $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث: θ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

② اكتب Z على الشكل الأسي.

③ أكتب Z على الشكل المثلثي واستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A، يُطلب تعيين زاويته ونسبته.

التمرين 02

5ن

بكالوريا 2008

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+iz-2-6i=0$$

❷ نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقطتين A وB التين لاحقتاهما z_A وz_B على الترتيب. حيث:

$$z_A=2+i \qquad \text{و} \qquad z_B=-2-2i$$

- عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

❸ لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث: $z_C = \frac{4-i}{1+i}$.

- اكتب z_C على الشكل الجبري، ثم اثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

❹

① برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k $(k > 0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

② تطبيق: عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ:

$$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$$

التمرين 03

5ن

بكالوريا 2009

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$ و z عدد مركب.

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

❷ نضع: $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

① أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

② اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

③ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

❸

① n عدد طبيعي، عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

② احسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

التمرين 04

4ن

بكالوريا 2009

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

❶ حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$.

❷ نسمي z_1 و z_2 حلي هاته المعادلة

① اكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

② A، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_A = \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{3})$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2 = -1$)

- احسب الأطوال AB، AC و BC، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

③ جد طويلة وعمدة العدد المركب Z حيث:

$$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$$

④ احسب Z^3 و Z^6، ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين 05

5ن

بكالوريا 2010

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A = 1 + i$ و $z_B = 3i$.

❶ اكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B.

❷ ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

① عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

② عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

③ استنتج طبيعة المثلث ABC .

❸ لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$

① عين z_D لاحقة النقطة D.

② عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

❹ لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z، ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

① تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ).

② اعطا تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ)

التمرين 06

4ن

بكالوريا 2010

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسي.

❷ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3+3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ ، $z_D = -z_B$.

① بين أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرى ذات المركز O مبدأ المعلم.

② عين زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B.

③ بين أن النقط A، O و C في استقامية وكذلك النقط B، O و D.

④ استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين 07

5ن

بكالوريا 2011

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = -i$ ، $z_B = 2+3i$ ، $z_C = -4+i$.

❶

① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

② عين طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدته، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق لكل نقطة M ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = iz - 1 - i$.

① عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

② ما هي صورة النقطة B بالتحويل T.

❸ لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6+2i$.

① بين أن النقط A، C و D في استقامية.

② عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحول النقطة C إلى النقطة D.

③ عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D.

ن4

التمرين 08

بكالوريا 2011

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B وC التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 3-2i$ ، $z_B = 3+2i$ ، $z_C = 4i$

❶

① علم النقط A، B وC.

② ما طبيعة الرباعي $OABC$؟ علل إجابتك.

③ عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

❷ عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$.

❸

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-6z+13=0$

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة.

② لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z.

- عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|z-z_0|=|z-z_1|$.

ن4

التمرين 09

بكالوريا 2012

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❶ نعتبر مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث: $z\neq 2-3i$)

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

❷ ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A وB نقطتان لاحقتاهما على الترتيب: z_A و z_B حيث: $z_A=1+i\sqrt{5}$ و $z_B=1-i\sqrt{5}$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

❸ نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C، D، E لواحقها على الترتيب: $z_B=-2i$، $z_D=2-3i$ و$z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

① عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

② استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ).

التمرين 10
4.5ن

بكالوريا 2012

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

❶ $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$.

① تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

② جد العددين الحقيقين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$

③ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب: $z_A = 6$ ،$z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$.

① اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

② اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

③ استنتج طبيعة المثلث ABC.

❸ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① جد الكتابة المركبة للتشابه S.

② عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S.

③ بيّن أن النقط A ، B و A' في استقامية.

التمرين 11
5ن

بكالوريا 2013

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❶ حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \ldots (1)$ حيث α وسيط حقيقي.

❷ من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$، نرمز إلى حلي المعادلة (1) بِـ z_1 و z_2

- بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$.

❸ نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B وC التي لواحقها:
$z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = 4 + i\sqrt{3}$ على الترتيب.

① أنشئ النقط A، B و C.

② اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب نعيين نسبته وزاويته.

③ عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ G.

④ احسب z_D لاحقة النقطة D، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين 12

4.5ن

بكالوريا 2013

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2 + 4z + 13 = 0 \ldots (E)$$

❶ تحقق أنالعدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر.

❷ A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب، S التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى نقطة $M'(z')$.

① بين أن $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$

② احسب z_C لاحقة النقطة C، علما أن C هي صورة B بالتشابه S.

❸ لتكن النقطة D، حيث: $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

① بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقين بمعاملين حقيقين يطلب تعيينهما.

② احسب z_D لاحقة النقطة D .

③ بين أن: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD.

التمرين 13

5ن

بكالوريا 2014

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.

2 المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A، B، C و D التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$.

① اكتب z_A، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي.

② احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

③ بين أن النقط O، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D، يطلب تعيين نصف قطرها.

④ احسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $(\overline{CA};\overline{CB})$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$؟

3 ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① اكتب العبارة المركبة للدوران R.

② عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط C، A و C' في استقامية.

③ عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R.

التمرين 14

4ن

بكالوريا 2014

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث:

$$(z-i)(z^2-2z+5)=0$$

2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، تعطى النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A = i$ ، $z_B = 1+2i$ و $z_C = 1-2i$ على الترتيب.

① أنشئ النقط A ، B و C.

② جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

③ احسب مساحة المثلث ABC.

3 ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① عين الكتابة المركبة للتشابه S.

② بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

4 M نقطة لاحقتها z، عين مجموعة النقط M حيث: $|z| = |iz+1+2i|$.

التمرين 15

4.5ن

بكالوريا 2015

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

I) عين العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β.

II) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_A = z_C \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

❶

① اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي، ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

② تحقق أن العدد المركب $\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} - \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} + \left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} 2$ حقيقي.

❷ D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1 + i$.

① حدد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A.

② اكتب z_A/z_D على الشكل الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

❸ عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z = k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^*$.

التمرين 16

5ن

بكالوريا 2015

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_C حيث: $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = -\overline{z_A}$ و $z_C = -(z_A + z_B)$ ، ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A).

❶

① اكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسي.

② استنتج أن النقط A، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

③ أنشئ الدائرة (γ) والنقط A، B و C.

❷

① تحقق أن $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

② استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع، وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

③ عين وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z| = \left|z - \sqrt{3} - i\right|$.

❸

① عين زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A.

② اثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين 17 — 4.5ن

بكالوريا 2016 – الدورة الأولى

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث:

$$z' = \frac{z-2}{z-1}$$

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z' = z$.

❷ النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث: $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = \overline{z_1}$.

① اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي.

② بين أن النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O، يُطلب تعيين زاوية له.

❸ نضع $z' \neq z$، نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

- عين (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب، ثم أنشئ (Γ).

❹ h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

① عين طبيعة التحويل $S = h \circ R$ وعناصره المميزة.

② اكتب العبارة المركبة للتحويل S.

③ عين ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S.

التمرين 18 — 4.5ن

بكالوريا 2016 – الدورة الأولى

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة:

$$\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$$

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A، B و C نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$

① اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

② بين أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

❸

① عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، ثم حدد بدقة طبيعته.

② عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z.

③ عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$.

التمرين 19

4ن

بكالوريا 2016 – الدورة الثانية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❹ نضع من أجل كل عدد مركب z: $p(z)=z^3-24\sqrt{3}$.

① تحقق أن: $p(2\sqrt{3})=0$.

② جد العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z: $p(z)=\left(z-2\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

③ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

❺ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=-\sqrt{3}+3i$، $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$.

① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

② بين أنه يوجد دوران r مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C، يطلب تعيين زاويته.

③ استنتج طبيعة المثلث ABC.

④ عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

❻ عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث: $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث: $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين 20

4.5ن

بكالوريا 2016 – الدورة الثانية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $2\overline{z}^3 + 3\overline{z}^2 - 3\overline{z} + 5 = 0 \dots (E)$

يشير الرمز $\overline{z}$ إلى مرافق العدد المركب z.

❶

① اثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(2\overline{z} + 5)(\overline{z}^2 - \overline{z} + 1) = 0$.

② حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

❷ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط A ، B، C و D من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -1$ و $z_D = -\frac{5}{2}$.

① اكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي.

② أنشئ النقط A، B، C و D.

③ اثبت أن: $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$

④ استنتج طبيعة المثلث ABC.

❸ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ولتكن F صورة A بالتحويل S. أنشئ النقطة F ثم حدد طبيعة المثلث AFC.

❹ عين طبيعة المجموعة (Γ) لنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z + 1 = kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

التمرين 21

5ن

بكالوريا 2017

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A = 2 - 2i$، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$.

① اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

② عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD.

③ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث: $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$.

- تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ)، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

④ ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h.

- عين طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

التمرين 22

5ن

بكالوريا 2017

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

❸ مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي: $S=\left\{-\frac{1}{2};i\right\}$

❹ من أجل كل عدد مركب z، $(z+2)\times(\overline{z}+2)=|z+2|^2$.

❺ من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$.

❻ S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $(\omega'-2;-3)$ ونصف القطر 9.

❼ من أجل كل عدد حقيقي α: إذا كان: $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

فإن: $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

التمرين 23

5ن

بكالوريا 2017 – الدورة الاستثنائية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، حيث: $\|\vec{u}\|=2cm$ ، لتكن النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A=2$، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$ ($\overline{z_B}$ هو مرافق z_B).

❶

الخليل للرياضيات

① اكتب العدد z_B على الشكل الأسي، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد المركب z_C.

② عين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC، ثم أنشئ النقط A، B و C.

❷ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

① اكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتشابه S ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C'.

② احسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين 24

5ن

بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$.

❶ عين النسبة وزاوية للتشابه المباشر S ذي المركز A والذي يحول النقطة B إلى النقطة C.

❷ اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❸ نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC وبـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

- عين كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I، ثم بين أن النقط B ، G و I في استقامية.

❹ نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة I ، حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

❺ نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$

① تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ).

② عين طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها.

التمرين 25

5ن

بكالوريا 2018

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2-\sqrt{3}\,z+1=0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_C حيث:

$z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$، $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ و $z_C=\overline{z_B}$ (يرمز لـ $\overline{z_B}$ لمرافق z_B).

- اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي، ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

❸

① تحقق أن: $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة الملث OBC.

② استنتج أن: B هي صورة C بدوران r يُطلب تعيين عناصره المميزة.

❹ نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $|z|=\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

- عين طبيعة المجموعة (γ) ثم عين صورتها بالدوران r.

التمرين 26

5ن

بكالوريا 2018

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(\overline{z}-4+i)(z^2-4z+5)=0$،

(يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z).

❷ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z_A}$.

① تحقق أن $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

② D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث: $\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A|\\ \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

- بين أن المثلث ABD متقايس الأضلاع واحسب z_D.

③ احسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD، ثم عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D.

④ عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث:

$$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\pi+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

الخليل للرياضيات

التمرين 27

5ن

بكالوريا 2019

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$.

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C والتي لاحقاتها i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

❶ اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ من أجل كل عد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

① عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)|=\frac{1}{2}$.

② بين أن العدد $\left(f(i)\right)^{1440}$ حقيقي موجب.

❸ نعتبر الدوران r الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r ، وبين أن النقط D، A و C في استقامية.

② استنتج أن D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره.

التمرين 28

5ن

بكالوريا 2019

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

❶

① اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسي.

② احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

❷

① T الانسحاب الذي يحول A إلى C، عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T.

② استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

❸ اكتب العدد المركب z_C-z_A على الشكل الأسي.

❹ جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها العدد المركب $\left(-\frac{6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

❺ لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C.

- عين (E) مجموعة النقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A-z}{z_C-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

5

تمارين بكالوريات سابقة:

شعبة تقني رياضي

◄ 26 تمرين ►

التمرين 01

4ن

بكالوريا 2008

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ المعرفة كما يلي:

$$z^3 + (2-4i)z^2 - (6+9i)z + 9(-1+i) = 0 \dots (*)$$

❶ بين أن $z_0 = 3i$ هو حل للمعادلة $(*)$.

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ ، ثم اكتب حلولها z_0، z_1 و z_2 على الشكل الأسي حيث: $|z_1| < |z_2|$.

❸ لتكن A، B و C صور الحلول z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

- عين النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

❹

① عين المجموعة (E) للنقط M حيث: $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$

② بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم أنشئ (E).

❺ تحقق أن النقط O، B و G في استقامية ، ثم عين صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ويحول B إلى G محددا عناصره المميزة.

التمرين 02

4ن

بكالوريا 2008

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي.

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$z^2 - 2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z - r^2 = 0$$

- اكتب الحلين على الشكل الأسي.

❷ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين.

- عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع.

التمرين 03

4ن

بكالوريا 2009

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

❶

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$ حيث z هو المجهول.

② استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول $(\overline{z}+3)^2-2(\overline{z}+3)+2=0$ حيث $\overline{z}$ مرافق z.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$،

النقط A، B و M لواحقها $(1-i)$ ، $(1+i)$ و z على الترتيب.

① عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}_+$.

② عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $|z-1+i|=|z-1-i|$

التمرين 04

4ن

بكالوريا 2009

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❸ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+18=0\,...(1)$

❹ ليكن العدد المركب z_1 حيث: $z_1=3-3i$ (i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

① اكتب z_1 على الشكل الأسي.

② احسب طويلة العدد z_3 وعمدة له حيث: $z_1\times z_3=6\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

③ استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

❺ نعتبر في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C ذات اللاحقات $3+3i$ ، $3-3i$ $\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ على الترتيب.

① عين قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بالرمز G_α.

② عين مجموعة النقط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}_+$.

التمرين 05

5ن

بكالوريا 2010

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمده له).

❷ علم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، C ، D و I ذات اللاحقات: $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب.

❸ z عد مركب يحقق الجملة: $\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\frac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$

① بين أن الجملة تكافئ: $\frac{z-3+2i}{z-1}$ ثم عين قيمة z.

② B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$، تحقق أن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

❹ لتكن J النقطة التي لاحقتها z_J حيث: $z_J=1-2i$.

① اكتب على الشكل الأسي العدد المركب Z حيث : $Z=\frac{z_A-z_I}{z_B-z_J}$.

② تحقق أن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$. ما طبيعة الرباعي $ABIJ$؟

التمرين 06

5ن

بكالوريا 2010

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❶

① اكتب على الشكل الأسي العدد المركب α حيث: $\alpha=-2+2i\sqrt{3}$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمده له).

② حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2=-2+2i\sqrt{3}$

❷ ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A=-2$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$ و $z_C=1+\sqrt{3}i$ على الترتيب.

① احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له.

② استنتج طبيعة المثلث ABC.

❸ لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(\bar{z}+2)=\frac{\pi}{3}$.

① تحقق أن B تنتمي إلى (E).

② عين المجموعة (E).

التمرين 07

4ن

بكالوريا 2011

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\quad zz^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)، ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي.

❷ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A، B و C التي لاحقتها على الترتيب: $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{3} - i$، نضع: $\quad L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

① اكتب L على الشكل الأسي.

② أثبت أن: $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$، ثم استنتج أن A هي صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتحديد عناصره المميزة.

③ استنتج نوع المثلث ABC ثم احسب مساحته.

التمرين 08

4ن

بكالوريا 2011

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

L العدد المركب المعرف كما يلي: $\quad L = -\frac{4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$

❶

① اكتب L على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

② بين أن: $L^{12} + 1 = 0$، ثم احسب: $\quad \left(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^{12} + (5+3i)^{12}$

③ n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي، اثبت أن: $\quad L^{4n} + L^{4p} = 0$.

❷

① النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 5 + 3i$ و $z_B = 5 - 3i$ ، عين اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

② عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA'.

التمرين 09

6ن

بكالوريا 2012

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

❶ عين العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث: $\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - z_2 = 8 + 8i \end{cases}$

❷ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، النقط A، B و Ω التي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_Ω حيث: $z_A = 3 + 2i$ ، $z_B = -3$ و $z_\Omega = 1 - 2i$.

① اثبت أن $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$.

② عين طبيعة المثلث ΩAB.

❸ h هو التحكاي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2.

① عين الكتابة المباشرة للتحكالي h.

② عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h.

③ عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$.

④ بين أن $ABCD$ مربع.

❹ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$.

① تحقق أن النقطة B تنتكي إلى المجموعة (E)، ثم عين طبيعة (E) وعناصرها المميزة.

② أنشئ المجموعة (E).

التمرين 10

5ن

بكالوريا 2012

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z:

$$(z^2 + 2z + 4)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = 0$$

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A، B، C وD نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ ، $z_C = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_D = -1 + i\sqrt{3}$

① اكتب كلا من z_A ، z_B، z_C وz_D على الشكل الأسي.

② تحقق أن: $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

3 z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}$ عمدة له، حيث n عدد طبيعي

L_n العدد المركب المعرف بـ: $L_n = z_D \times z_n$

① اكتب كلا من L_0، L_1 على الشكل الجبري.

② (u_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = |L_n|$

- اثبت ان المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- M_0، M_1، ...، M_n صور الأعداد المركبة L_0، L_1، ...، L_n على الترتيب

- احسب بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \|\overrightarrow{OM_1}\| + \cdots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$

- جد نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين 11

5ن

بكالوريا 2013

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $2z^2+6z+17=0$.

2 في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A، B و C لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=-4$ ، $z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$.

- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3

① عين z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A.

② عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\| = 10\sqrt{2}$

4 (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z+4)=\frac{\pi}{4}$.

- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2)، ثم عين المجموعة (Γ_2)

التمرين 12

4.5ن

بكالوريا 2013

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.

❷ المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1+\sqrt{3}i$ و $z_C=-5+i\sqrt{3}$.

S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O إلى B.

- جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S، ثم عين العناصر المميزة له.

❸

① عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة: $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$.

② اكتب العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABD.

③ عين المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث: $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|$.

التمرين 13

5.5ن

بكالوريا 2014

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z-i)(z^2+2\sqrt{3}z+4)=0$.

❷ المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نسمي A، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب: $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$.

① اكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

② هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا؟ برر اجابتك.

❸

① عين العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى C، محددا نسبته وزاويته.

② استنتج طبيعة المثلث ABC .

❹

① عين العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$$|z-z_1|^2=|z-z_3|^2=5$$

② عين (E') مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث: $|z-z_1|=|z-z_3|$

التمرين 14
4.5ن
بكالوريا 2014
شعبة تقني رياضي
الموضوع الثاني

❶ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة

$$z_0 = 1+i$$

① عين ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}_+$.

② عين ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + ke^{i\frac{3\pi}{4}}$ و k يمسح $\mathbb{R}_+$.

③ عين احداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ').

❷ نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث: $z_1 = z_0 + 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

① عين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

② عين z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

③ عين العددين الحقيقين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A;\alpha),(C;\beta)\}$ و $\alpha+\beta=\sqrt{2}$

④ عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

التمرين 15
4ن
بكالوريا 2015
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب z_A و z_B حيث: $z_A = 1-i$ و $z_B = 3+3i$.

❶

① اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

② n عدد طبيعي، عيم قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

③ z عدد مركب حيث: $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$، احسب طويلة العدد z وعمدة له، ثم اكتب z/z_A على الشكل الجبري.

④ استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

❷

① احسب اللاحقة z_C للنقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$، واستنتج طبيعة المثلث ABC.

② احسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;1),(C;1)\}$، ثم بين أن $ABCD$ مربع.

التمرين 16

5ن

بكالوريا 2015

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $\quad z^2-4(\sin\theta)z+4=0 \ldots (*)$

حيث θ وسيط حقيقي.

❷ من أجل $\theta=\frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة $(*)$ بـ z_1 و z_2، اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

❸ نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $\quad z_A=\sqrt{3}+i \quad$ ، $\quad z_B=\sqrt{3}-i \quad$ و $\quad z_C=3\sqrt{3}+i$.

① اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي. واستنتج طبيعة المثلث ABC.

② استنتج أن النقطة C هي صوة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويُطلب تعيين نسبته وزاويه له.

③ عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$، ثم حدد طبيعة الرباعي $ABCD$.

❹

① عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\quad \frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف مع $z\neq z_B$.

② عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\quad \frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقيا مع $z\neq z_B$.6

التمرين 17

4ن

بكالوريا 2016

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $\quad 9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$.

❷ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $\quad z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i \quad$ ، $\quad z_B=\overline{z_A}$.

① اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

② بين أن $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$.

③ عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{n}$ عددا حقيقيا.

❸ f التحويل الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$.

① عين طبيعة التحويل النقطي f وعناصره المميزة.

② احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f.

③ عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

التمرين 18

4.5ن

بكالوريا 2016

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❶

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)\left(2z-\sqrt{2}\right)=0$$

② اكتب الحلول على الشكل الأسي.

❷ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C من المستوي التي لواحقها على الترتيب: $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $c=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

① علم النقط A، B و C في المعلم السابق.

② نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي مركزه A ونسبته 3 وزاويته π والنقطة E صورة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

- احسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب.

❸ نضع: $z=\frac{d-b}{e-b}$.

① اكتب العدد المركب z على الشكل المثلثي.

② نعتبر النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة I

- ما طبيعة الرباعي $BDFE$؟

التمرين 19
5ن
بكالوريا 2017
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها:

$$z_A = -1 \quad ، \quad z_B = 2+i \quad ، \quad z_C = -i$$

❶ اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C ويحول B إلى A.

❸ نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى C والنقطة E صورة D بالتشابه S.

① عين z_D لاحقة النقطة D ، ثم تحقق أن: $z_E = 1-2i$ حيث: z_E لاحقة النقطة E.

② حدد طبيعة الرباعي $ADEB$.

❹ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث:

$$\arg(z-z_A) - \arg(z-z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ)، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

التمرين 20
5ن
بكالوريا 2017
شعبة تقني رياضي
الموضوع الثاني

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها:

$$z_A = 1+i \quad ، \quad z_B = \overline{z_A} \quad ، \quad z_C = \frac{1}{2}(1-i) \quad \text{و} \quad z_D = \overline{z_C}$$

❶

① اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي، ثم استنتج الشكل الأسي للعددين z_B و z_D.

② عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$

❷

① أوجد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A ويحول C إلى B.

② احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

❸ جد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;2),(C;-1),(D;-1)\}$.

❹ لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|=\sqrt{5}$

- بين أن A من(Γ) ، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

التمرين 21

5ن

بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z-4)(z^2-2z+4)=0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها

$$z_A=4 \quad ، \quad z_B=1+i\sqrt{3} \quad و \quad z_C=1-i\sqrt{3}$$

❶ اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❷

① عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

② عين طبيعة الرباعي $ABDC$.

❸ من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $z_n=(z_B)^n+(z_C)^n$.

① بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $z_n=2^{n+1}\times\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

② نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $t_n=z_{6n}$.

- عبر عن t_n بدلالة n ثم احسب P_n حيث: $P_n=t_0\times t_1\times t_2\times\ldots\times t_n$

التمرين 22

5ن

بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$\left(z+1-\sqrt{3}\right)(z^2+2z+4)=0$$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها

$$z_A=-1+\sqrt{3} \quad ، \quad z_B=-1+i\sqrt{3} \quad و \quad z_C=\overline{z_B}$$

❶ بين أن $(z_C-z_A)=z_B-z_A$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته.

❷

① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث: $L=\frac{z_C-z_A}{z_C}$.

② بين أن: $L=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ: $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

❸ نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' والمعرفة بـ:

$$z'=(z-z_B)L+z_B$$

- بين أن S تشابه مباشر يُطلب تعيين عناصره المميزة.

❹ لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتحويل $S\circ S$.

- احسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين 23

5ن

بكالوريا 2018

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$z^2-2\sqrt{2}z+4=0$$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما:

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_B=\overline{z_A}$ ($\overline{z_A}$ يرمز إلى مرافق z_A).

❶ اكتب على الشكل الأسي كلا من العددين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ، ثم بين أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف.

❷ لتكن C صورة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3).

- بين أن لاحقة النقطة C هي $z_C=-\sqrt{2}+i3\sqrt{2}$.

❸ احسب z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

❹

① بين أن: $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=-i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

② اوجد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا.

التمرين 24

5ن

بكالوريا 2018

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

I)

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $4z^2-2z+1=0$

❷ اكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي حيث: z_1 و z_2 حلا المعادلة (E).

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها

$z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

❶

① احسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC.

② استنتج أن B هي صورة النقطة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته.

❷ أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

❸ حدد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق ما يلي:

$$\left|iz + \sqrt{3} - i\right| = \left|z - 1 + i\sqrt{3}\right|$$

❹ بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

التمرين 25

5ن

بكالوريا 2019

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها

$z_A = 1 + i$ ، $z_B = 2 + i$ و $z_C = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(Γ) الدائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها 1.

❶

① تحقق أن النقطة C من الدائرة (Γ).

② عين قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ ، ثم استنتج أن C صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.

❷ S التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

① حدد العناصر المميزة للتشابه S.

② عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالتشابه S.

❸ ما هي نسبة التحاكي h الذي مركزه A حيث: $S = h \circ r$ ؟ استنتج أن النقط A، C و D في استقامية.

❹ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث: $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$

- تحقق أن النقطة C من المجموعة (E)، ثم حدد طبيعة (E).

التمرين 26

5ن

بكالوريا 2019

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

I)

❶ تحقق أن: $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2 = 16-8\sqrt{3}$

❷ عين على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركب Z حيث: $Z=-16\sqrt{3}-16i$.

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}+4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_B=\frac{1}{2}iz_A$ و $z_C=-\frac{1}{4}z_A$.

❶ اكتب z_A على الشكل الجبري، ثم بين أن: $z_A=4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

❷ استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

❸ S التشابه المباشر الذي يحول A إلى B ويحول B إلى C.

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S.

① بين أن: $z'=\frac{1}{2}iz$.

② حدد العناصر المميزة للتشابه S.

❹ G النقطة ذات اللاحقة z_G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;4)\}$.

① بين أن: $z_G=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

② (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث:

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{2}$$

- حدد طبيعة المجموعة (E) وعناصرها المميزة، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S.

6

تمارين بكالوريات سابقة:

شعبة رياضيات

◄ 25 تمرين ►

التمرين 01

5ن

بكالوريا 2008

شعبة رياضيــــات

الموضوع الثاني

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما:

$\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

❶ اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول A إلى B، ثم عين زاويته ونسبته.

❷ نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي: $A_0 = A$ و من اجل كل عدد طبيعي n:

$A_{n+1} = S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n.

① أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 ، A_1 و A_2.

② برهن أن: $z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{npi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$.

③ عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1).

❸ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = A_0A_1$ و $u_n = A_nA_{n+1}$. من أجل كل عدد طبيعي n.

① بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 وأساسها q.

② استنتج عبارة u_n بدلالة n.

③ احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين 02

5ن

بكالوريا 2008

شعبة رياضيــــات

الموضوع الأول

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي:

$$P(z) = 2z^2 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

❶ بين أنه إذا كان α جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ جذر له أيضا.

❷ تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

❸ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

❹ اكتب الحلول على الشكل الأسي.

❺ لتكن النقط A ، B ، C و D النقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب: $1+i$ ، $-1+i$ ، $-\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$

حيث m عدد حقيقي، عين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.

التمرين 03

4ن

بكالوريا 2009

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث: $f(z)=\frac{z-i}{z-i}$

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

❷ لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

① عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

② احسب العدد المركب z_0 بحيث: $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$.

❸ في المستوي المركب نعتبر النقط A، B و C صور الأعداد المركبة 1، i و z_0 على الترتيب.

① ما نوع المثلث ABC؟

② عين النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

التمرين 04

4.5ن

بكالوريا 2010

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3-3z^2+3z-9=0 \dots (E)$.

❶

① تحقق أن 3 حلض للمعادلة (E)، ثم عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z فإن:

$$z^3-3z^2+3z-9=(z-3)(az^2+bz+c)$$

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

❷ المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C صور الأعداد المركبة

$z_A=3$ ، $z_B=i\sqrt{3}$ ، $z_C=-i\sqrt{3}$

- بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

❸ D النقطة التي لاحقتها $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بدالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

- عين z_E لاحقة النقطة E.

❹ F النقطة التي لاحقتها $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

① احسب $\frac{z_F}{z_E}$ ، واستنتج ان المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.

② عين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا.

التمرين 05

5ن

بكالوريا 2010

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

❶ نسمي A ، B و I التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = 1 - 4i$ ، $z_B = -1 - 2i$ و $z_I = 1 - 2i$.

① علم النقط A، B و C.

② اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.

③ ما هو نوع المثلث IAB؟

④ C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. احسب اللاحقة z_C للنقطة C.

⑤ D مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$. احسب اللاحقة z_D للنقطة D.

⑥ بين أن $ABCD$ مربع.

❷ عين وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$.

❸ عين وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$.

التمرين 06

4.5ن

بكالوريا 2011

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 1 - i$ ، $z_B = -1 + i$ و $z_C = \sqrt{3}(1 + i)$.

❶ اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و z_C.

❷

① احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$، ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

② حدد طبيعة المثلث ABC.

❸ عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معينا.

❹ T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (-1+i)z + 1 - 3i$$

① عين طبيعة التحول T وعناصره المميزة.

② استنتج طبيعة التحول $T \circ T$ وعناصره المميزة.

التمرين 07

4ن

بكالوريا 2011

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحلات الآتية:

❶

① الشكل المثلثي للعدد المركب $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

② $a^{2011} + \overline{a} = 0$ حيث: $\overline{a}$ مرافق a.

❷ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

① التحويل T الذي كتاباته المركبة: $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم.

② مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z-i) = -\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه $\vec{u}$ لاحقته $1+i$.

❸ (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$.

① $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$.

② (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

③ (u_n) متباعدة.

التمرين 08

4ن

بكالوريا 2012

شعبة رياضيـــــات

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

❷ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=z_A+z_B$.

① اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A، z_B و z_A/z_B.

② عين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

③ بين أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

❸ نسمي (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z-z_A|=|z-z_B|$.

① بين أن (Δ) هو محور الفواصل.

② بين أن حلي المعادلة $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان. (لا يُطلب حساب الحلين).

التمرين 09

4ن

بكالوريا 2012

شعبة رياضيـــــات

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

❷ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A ، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ و $z_D=\overline{z_C}$.

- بين أن النقط A، B C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A، B C و D.

❸ نرمز بـ z_E إلى لاحقة النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O.

① بين أن: $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

② بين أن النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C يطلب تعيين زاويته.

③ استنتج طبيعة المثلث AEC.

④ H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

- عين طبيعة التحويل $R \circ H$ وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل $R \circ H$.

التمرين 10

06ن

بكالوريا 2013

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

I) a و b عددان حقيقيان موجبان تماما. نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط A ، B، C و E التي لاحقاتها $z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B = -a\sqrt{2}$ ، $z_C = \overline{z_A}$ و $z_E = be^{i\frac{3\pi}{4}}$ على الترتيب.

❶

① اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_a}$، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

② حدد طبيعة الرباعي $OABC$، ثم استنتج مساحته.

❷ التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$، يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

① اكتب العبارة المركبة للتشابه S، ثم تحقق أن $S(A) = E$.

② بين أن مساحة الرباعي $OEFG$ هي b^2 (مقدرة بوحدة المساحة) حيث: $S(B) = F$ و $S(C) = G$.

❸

① احسب بدلالة a و b العبارة:

$$|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E| \cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right]$$

② استنتج قيمة CE^2 بدلالة a و b.

II) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن O، لاحقتها z_n.

نضع $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $M_{n+1} = S(M_n)$.

نعتبر المتتالتين (u_n) و (v_n) المعرفتين، من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $u_n = |z_n|$ و $v_n = \arg(z_n)$.

❶ اكتب العدد المركب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسي بدلالة a و b.

❷ نفرض أن: $a < b$ و $\arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) \in]-\pi;\pi]$

- بين أن المتتالية (u_n) هندسية، والمتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.

❸ احسب، بدلالة a ، b و n المجموع T_n حيث: $T_n = a + a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \cdots + \frac{b_n}{a^{n-1}}$، ثم $\lim_{n\to+\infty} T_n$.

❹ عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها تكون النقط O، A و M_n في استقامية.

التمرين 11 — 5ن
بكالوريا 2013
شعبة رياضيـــات
الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 + z + 1 = 0$

❷ نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A ، B و M ذات اللاحقات:
$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و z على الترتيب. (يرمز $\overline{z_A}$ إلى مرافق z_A).

① اكتب z_A على الشكل الأسي.

② عين مجموعة النقط M من المستوي ، حيث: $\arg[(z-z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$.

❸

① التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z' = z_A \cdot z + z_B\sqrt{3}$

- ما طبيعة التحويل r؟ عين عناصره المميزة.

② التحاكي h، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z' = -2z + 3i$

- عين نسبة ومركز التحاكي h.

③ نضع: $S = h \circ r$. (يركز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).

- عين طبيعة التحويل S، مبررا عناصره المميزة، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي:
$z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

❹ نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C، D و E، حيث: $S(O) = C$ ، $S(c) = D$ و $S(D) = E$.

- بين أن النقط O ، Ω و E في استقامية.

❺

① عين (Γ_1) مجموعة النقط $M(z)$ المستوي، حيث: $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

② عين (Γ_2) صورة (Γ_1) بالتحويل S.

التمرين 12 — 5ن
بكالوريا 2014
شعبة رياضيـــات
الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$$

❷ A، B، C و D نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$.

① بين أن: $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC).

② تحقق أن: $\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

❸

① بين أن: $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$. ثم استنتج أن D صورة A بتشابه مباشره مركزه B يطلب تعيين مسبته وزاويته.

② بين أن المثلث ADB قائم وأن النقط A، B C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

③ استنتج انشاء للرباعي $ABCD$.

التمرين 13

5ن

بكالوريا 2014

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A و B النقطتان اللتان لاحقاتهما على الترتيب: $a=-2+6i$ و $b=-1+2i$.

❶ اكتب العدد المركب $1+i$ على شكل أسي.

❷ S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}+2$

① D النقطة ذات اللاحقة d حيث: $d=2i$ ، جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل s. ماذا تستنتج؟

② بين أن: $z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ واستنتج طبيعة وعناصر التحويل S.

❸ (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $3x+5y=11$

① تحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين النقط (Δ) التي احداثياتها أعداد صحيحة.

② M'_0 صورة M_0 بالتحويل S. بين أن المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان.

③ x و y عددان صحيحان من المجال $[-5;5]$. عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدان، حيث M' هي صورة M بالتحويل S.

التمرين 14

5ن

بكالوريا 2015

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

ينسب المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C، H و I لاحقاتها على الترتيب: $z_A = i$ ، $z_B = -2+i$ ، $z_C = -3$ ، $z_H = -3+4i$ و $z_I = -1-i$.

❶

① مثل النقط A، B ، C، H و I في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

② عين النسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول النقطة A إلى النقطة C.

❷ عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

❸

① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$.

② استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

③ بين أن النقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

❹ بين أن النقط G، H و I في استقامية.

❺ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

① بين أن النقطة A تنتمي إلى (Γ).

② عين طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة.

③ أنشئ المجموعة (Γ).

④ تحقق أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ).

التمرين 15

5ن

بكالوريا 2015

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$$

(لاحظ أن: $(1+\sqrt{3})^2 = 4+2\sqrt{3}$)

❷ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A و B نقطتان من المستوي، لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$ و $z_B=\overline{z_A}$.

① بين أن: $\frac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.

② استنتج عمدة للعدد المركب z_A.

③ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

❸

① حل، في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة ذات المجهولين $(x;y)$ التالية: $7x-2y=1$.

② بين أنه إذا كان الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة، حلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12.

③ استنتج كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة، حلا للمعادلة $7x-24y=12$.

④ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

التمرين 16

4.5ن

بكالوريا 2016

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

❶

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-4z+5=0$

② استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية:

$$\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2-4z+1-4i(1-\sqrt{3})=0$$

❷ θ عدد حقيقي حيث: $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له.

① اكتب العدد المركب $(1+\sqrt{3})$ على الشكل الأسي.

② عين θ علما أن: $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد z_0).

③ n عدد طبيعي. من أجل قيمة θ المتحصل عليها. اكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي.

④ عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

❸ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=2-i$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$.

① عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.

② استنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

③ E النقطة من المستوي ذات اللاحقة z_E حيث: $\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$.

- بين أن: $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$.
- بين أن النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

❹ M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

① عين z_I لاحقة النقطة I.

② α عدد حقيقي، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تحقق: $z - z_I = e^\wedge i\alpha$.

- تحقق أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ) .
- عين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة عندما يتغير α في $\mathbb{R}$.

التمرين 17

ن4

بكالوريا 2016

شعبة رياضيـــــات

الموضوع الثاني

I)

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

❷ جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث: $\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases}$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، النقط A، B، C ، D و H لاحقاتها على الترتيب: $z_A = i\sqrt{2}$ ، $z_B = -i\sqrt{2}$ ، $z_C = 1 + i$ ، $z_D = 1 - i$ و $z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ حيث E النقطة التي تحقق: $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DO}$.

❶ اكتب z_H على الشكل الأسي واستنتج نوع المثلث BEC.

❷ S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = z_A z + z_B$

① ما هي طبيعة التحويل S ؟ وماهي عناصره المميزة ؟

② احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C ونصف قطرها CD .

③ عين (γ') صورة (γ) بالتحويل S واستنتج مساحتها.

❸ عين (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M تختلف عن B و C) ذات اللاحقات z التي من أجلها يكون العدد $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما.

5ن

التمرين 18

بكالوريا 2017

شعبة رياضيـــــات

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها:

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2(1-i)$.

① اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم استنتج أن النقط A، B و C تنتمي إلى دائرة (Ω) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

② عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا.

③ نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ مع k يمسح $\mathbb{R}_+$.

ثم تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ)، ثم عين وأنشئ (Γ).

❸ r الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$، h التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته -2.

- عين طبيعة التحويل $h\circ r$ وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h\circ r$.

5ن

التمرين 19

بكالوريا 2017

شعبة رياضيـــــات

الموضوع الثاني

I) اكتب العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعين للعدد المركب: $\frac{21}{4}+5i$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B، C و $\div$ ذات اللواحق: $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z_A}$ و $z_I=i$

❶ اكتب z_A و z_C على الشكل الجبري.

❷ اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي مستنتجا طبيعة المثلث ABC .

❸ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A إلى I.

① اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S، ثم عين نسبته وزاويته.

② نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $n\geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي: $T_n=\underbrace{S\circ S\circ\ldots\circ S}_{n\text{ مرة}}$

- عين قيم n حتى يكون T_n تحاكيا، عين عندئذ عناصره المميزة.

التمرين 20

5ن

بكالوريا 2017 – الدورة الاستثنائية

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $2z^2 - 10z + \frac{29}{2} = 0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها: $z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C = -\overline{z_A}$ و $z_D = i$.

❶

① اكتب العددين z_A و z_B على الشكل الجبري، ثم علم النقط A، B، C و D في المعلم السابق.

② اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الاسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ جد لاحقة النقطة E نظيرة B بالنسبة إلى D ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCE$.

❸ اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول A إلى D ، ثم حدد نسبته وزاويته.

❹ نعرف متتالية النقط $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي: $A_0 = A$ و $A_{n+1} = S(A_n)$. (z_n هل لاحقة A_n).

① برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n، $z_n - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$.

② عين قيم n الطبيعية حتى تنتمي النقط A_n إلى المستقيم (AB).

التمرين 21

4ن

بكالوريا 2017 – الدورة الاستثنائية

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

❶ نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2 - 2(1-\sin\alpha)z + 2(1-\sin\alpha) = 0 \ldots (E)$

حيث α عدد حقيقي. (نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلي المعادلة (E)).

① عين الحلين z_1 و z_2 بدلالة α .

② نضع $\alpha = \frac{\pi}{6}$. بين أن $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 1$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها

$z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2z_A$.

① عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

② ليكن S التحويل النقطي الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z = (1 + z_A)z + 2z_B$$

- عين طبيعة التحويل S ثم حدد عناصره المميزة.

③ (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقات z حيث: $\arg(\overline{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$.

- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدد طبيعة (Γ) وأنشئها.

التمرين 22

5ن

بكالوريا 2018

شعبة رياضيـــــات

الموضوع الأول

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi; \pi[$.

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2(\sin\theta)z + 1) = 0$$

❷ A، B ، C و D نقط من المستوي لاحقتها على الترتيب:

$$z_A = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad ، \quad z_B = 1 - i \quad ، \quad z_C = \sin\theta + i\sin\theta \quad و \quad z_D = \overline{z_C}$$

($\overline{z_C}$ يرمز إلى مرافق z_C).

① اكتب z_A، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي.

② E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث: $z_E = \frac{z_A}{z_B}$.

- بين أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

③ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2} - 2)$.

- عين قيمة θ حتى تكون النقطة B هي صورة النقطة C بالتشابه المباشر S.

④ نضع $\theta = -\frac{3\pi}{4}$. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

التمرين 23

5ن

بكالوريا 2018

شعبة رياضيـــــات

الموضوع الثاني

❶ m عدد حقيقي، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + (m + 1)z + (2m - 1) = 0 \ldots (E).$$

- عين قيم العدد الطبيعي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقين.

❷ نضع $m=3$ ، حل المعادلة (E).

❸ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها:

$z_A=-2+i$ ، $z_B=-2-i$ ، $z_C=\alpha$ و $z_E=\sqrt{3}$.

حيث α عدد حقيقي و $\alpha>-2$.

- بين أن قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع $(-2+\sqrt{3})$.

- نضع في كل ما يأتي $z_C=-2+\sqrt{3}$:

❹ اكتب العدد المركب: $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن:

① المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

② النقط A ، B ، C و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

❺ ليكن r الدوران الذي يحول النقطة B إلى C ويحول C إلى A، عبارته المركبة هي:

$$z=az+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

حيث α عدد مركب.

① احسب العدد المركب α ثم استنتج زاوية الدوران r.

② تحقق أن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r.

التمرين 24

5ن

بكالوريا 2019

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث:

$z_A=1+i\sqrt{2}$ ، $z_B=i$ ، $z_C=\overline{z_A}$ و $z_D=1$.

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$

❷

① احسب كلا من $|z_A-1|$ ، $|z_B-1|$ و $|z_C-z_E|$ ثم تحقق أن النقط الأربعة A ، B C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

② بين أن: $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ ، ثم استنتج أن B هي صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة.

- ما طبيعة المثلث ABE ؟

❸ عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$ محددا طبيعة الرباعي $ABDE$.

❹ $\overrightarrow{w_2}$ و $\overrightarrow{w_1}$ شعاعان من المستوي لاحقتهما على الترتيب z_1 و z_2.

① برهن أن: ($\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان) يكافئ ($z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 0$).

② عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$(z - z_A)(\overline{z} - z_D) + (z - z_B)(\overline{z} - z_C) = 0$$

التمرين 25

5ن

بكالوريا 2019

شعبة رياضيـــــات

الموضوع الثاني

❶ نضع من أجل كل عدد مركب z، $P(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100$

① بين أنه من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ ، ثم استنتج أنه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن: $\overline{z}$ حل لها.

② حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$ علما أنها تقبل حلا تخيليا صرفا.

❷ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، النقط A ، B ، M و M' التي لاحقاتها على الترتيب: $2i$ ، $3 - 4i$ ، z و z' حيث: $z = \frac{-iz+4+3i}{z-2i}$ مع $z \neq 2i$

ولتكن I مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; 1)\}$.

① عين اللاحقتين z_I و z_J للنقطتين I و J على الترتيب.

② لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $|z'| = 2$.

- بين أن (النقطة M من (E)) يكافئ $\left(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{JM} = 0\right)$ ، ثم عين (E) وأنشئها.

③ لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $\arg(z') = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

- تحقق أن النقطة D ذات اللاحقة $\frac{9}{2} - \frac{5}{2}i$ تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين وأنشئ (Γ).

❸ عين الشكل الجبري للاحقة النقطة G تقاطع المجموعتين (E) و (Γ) .

الخليل للرياضيات