تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

الشعبة: تسيير و إقتصاد

التمرين [1] [باك 2008][م1] [4 ن]

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R})$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{8}{9}$.

1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha=-\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) في كل مايلي : $\alpha=2$ ، و نعرّف المتتالية العددية (v_n) كمايلي : $v_n=u_n+\frac{8}{3}$

أ- أحسب u_1 و u_2 .

ب- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول v_0 .

جـ- أكتب عبارة u_n بدلالة n . و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين [2] [باك 2008][م2] [5 ن]

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$.

1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3.

2) أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq -2$.

ب- جد إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج ؟

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n=u_n+2$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية .

ب- عبّر بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n .

جـ - أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

د- أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

التمرين [3] [باك 2009][م1] [4 ن]

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $3u_{n+1}=u_n+4$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n\leq 2$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة .

جـ- إستنتج مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-2$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها.

ب- أكتب الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

د- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين [4] [باك 2009][م2] [4 ن]

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n-2$.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n=u_n-1$.

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول v_0.

ب- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

3) بيّن أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=(-4)\times 3^n$ ، ثم إستنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

4) عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون : $u_0+u_1+...+u_n=n-79$.

التمرين [5] [باك 2010][م1] [4 ن]

1) n عدد طبيعي ، أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=1+e+e^2+e^3+...+e^n$

(S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e و حدّها الأول 1 ، و e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري).

2) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=2n+4+e^n$.

بيّن أن: $w_n=u_n+v_n$ ، حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول و الأساس لكل منهما.

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$4+6+8+...+(2n+4)=(n+1)(n+4)$$

4) إستنتج المجموع S'_n بدلالة n حيث : $S'_n=w_0+w_1+...+w_n$

التمرين [6] [باك 2010][م2] [6 ن]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{4}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n<2$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ- إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n-2$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

جـ- ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، و استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_0+u_1+...+u_n=3\left(\frac{3}{4}\right)^n+2n-2$$

التمرين [7] [باك 2011][م2] [5,5 ن]

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0=\dfrac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{2}{5}u_n+\dfrac{1}{5}$.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\dfrac{1}{3}$.

3) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

4) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-\dfrac{1}{3}$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

جـ- أحسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين [8] [باك 2012][م1] [5 ن]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+4}{9}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>\dfrac{2}{3}$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$.

جـ- ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

3) أحسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين [9] [باك 2012] [م2] [5 ن]

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره $50000DA$ في صندوق التوفير والإحتياط .
يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.
يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $5000DA$ (بعد حساب الفوائد).
يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$.

1) أ- أحسب كلا من u_0, u_1 و u_2.

ب- هل المتتالية (u_n) هندسية ؟ هل هي حسابية ؟ برّر إجابتك .

جـ- بيّن لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا ، $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 100000$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية ،حدّد أساسها وحدّها الأول .

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$.

3) أ- ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

ب- ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

التمرين [10] [باك 2013] [م1] [5 ن]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$ ، حيث a وسيط حقيقي.

1) عيّن قيمة a من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ، ثم أحسب عندئذ u_n و مجموع n حدا الأولى من المتتالية .

3) عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية ، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} و مجموع 50 حدا الأولى منها.

4) نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن : $u_n = 3^n + 2$ ، ثم بيّن أن :

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + 4n + 3\right)$$

التمرين [11] [باك 2013] [م2] [4 ن]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6$.

1) أ- أحسب الحدود : u_1, u_2, u_3 و u_4.

ب- هل المتتالية (u_n) رتيبة على $\mathbb{N}$ ؟ برّر إجابتك .

2) أ- بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$.

ب- استنتج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 4$ هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

جـ- أكتب v_n ، ثم u_n بدلالة n .

د- بيّن أن (u_n) متقاربة .

3) باستعمال عبارة u_n ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال 1)ب- .

التمرين [12] [باك 2014] [م2] [4,5 ن]

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -3$

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2) لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim_{n\to\infty}(v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n) = 18$

أ- بيّن أن : $\lim_{n\to\infty}(v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$.

ب- أحسب الأساس q ثم عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

جـ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - 3$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n.

التمرين [13] [باك 2015] [م2] [6 ن]

بيّنت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا و بالمقابل يُوظف 3000 عامل سنويا .
علما أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000 .

نعتبر الألف هو الوحدة و نرمز بـ: u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي $u_0 = 50$.

1) أحسب u_1 و u_2.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 60 - u_n$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ- قدّر عدد العمال سنة 2017 .

د- حدّد إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ه- أحسب نهاية المتتالية (u_n) . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل ؟

التمرين [14] [باك 2016] [م1] [4,5 ن]

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة و معرّفة على $\mathbb{N}$ بـحدها الأول $v_0 = 18$ و العلاقة: $v_0 + v_1 + v_2 = 38$.

1) بيّن أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$.

2) أ- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .

جـ- أحسب نهاية (v_n) .

3) نضع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$

أ- أحسب S_n بدلالة n ، ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

ب- جد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$.

التمرين [15] [باك 2016] [م2] [5 ن]

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$.

1) أحسب u_1 و u_2.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

جـ- ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (u_n) ؟

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 1$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية معيّنا أساسها وحدّها الأول .

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$.

جـ- أحسب نهاية (u_n).

التمرين [16] [باك 2017] [م1] [4 ن]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 3$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3 - u_n$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ، ثم عيّن حدّها الأول .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

بيّن أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

التمرين [17] [باك 2017] [م2] [4 ن]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1) أحسب u_1, u_2 و u_3 ، ثم خمّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدّها الأول .

ب- عيّن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$.

أ- أحسب S_n بدلالة n .

ب- بيّن أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = S_n + u_0$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين [18] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م1] [4 ن]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n < 2$.

ب- عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ،ثم إستنتج أنها متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2u_n - 4$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين [19] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م2] [5 ن]

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 و الحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$. (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرّفتين كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ و $u_n = w_n - v_n$.

بيّن (u_n) متتالية حسابية ، يطلب تعيين أساسها r و حدّها الأول u_0 .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 + 6 + 8 + ... + (2n+4) = (n+1)(n+4)$.

4) إستنتج المجموع T_n بدلالة n حيث : $T_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$

التمرين [20] [باك 2018][م1] [4 ن]

I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرّفتان كما يلي :

$u_0 = 50$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$ و $v_n = u_n - 20$

1) برهن أن (v_n) هندسية أساسها $0,7$ يطلب تعيين حدّها الأول v_0 ، و كتابة عبارة v_n بدلالة n .

2) أ- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n.

ب- عيّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك سنة 2016 . بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين و تكتسب 600 مشترك جديد .

نعتبر المئة هي الوحدة ، و نرمز بـ u_n لعدد المشتركين سنة $n+2016$ أي $u_0 = 50$

1) ما هو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثم في سنة 2018 ؟

2) أ- برّر العبارة: $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$.

ب- إبتداءا من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ؟

التمرين [21] [باك 2018][م2] [4 ن]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $2u_{n+1} = u_n + 6$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 6$.

ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 .

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n ما يلي : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times ... \times v_n$

التمرين [22] [باك 2019][م1] [4 ن]

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = -4$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

1) أ- أحسب كلا من u_1 و u_2 .

ب- برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 8$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة .

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n - \alpha$

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$

ب- عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 .

جـ- نضع $\alpha = 8$ ، عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$.

4) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

التمرين [23] [باك 2019][م2] [4 ن]

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases}$.

1) حساب حدّها الأول u_0 و أساسها r .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3) بيّن أن العدد 2019 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ثم أحسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 حيث :

$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{1344}$ و $S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + ... + u_{1344}$

ـ استنتج حساب المجموع S_3 حيث : $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{1343}$

4) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = e^{6-2u_n}$

أحسب المجموع $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + ... + \frac{1}{v_n}$.