

نهايات دوال ناطقة

تمرين 01:

أحسب النهايات التالية :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x - 2} \right)$, 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 5x + 2}{x - 1} \right)$, 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 + 3x + 1}{(x - 2)^2} \right)$, 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 2x - 3} \right)$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 4x - 5} \right)$, 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2 - 2x + 3}{3x + 2} \right)$, 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 1}{3x^2 - 4x + 3} \right)$, 8) $\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{(x + a)^2 - x^2}{a} \right)$
- 9) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n} \right)$, 10) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{2^{n+1} - 1} \right)$

نهايات دوال صماء

تمرين 02:

أحسب النهايات التالية :

- 1) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2 - 2x + 3} \right)$, 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3} \right)$, 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x - 4}{\sqrt{x + 2}} \right)$, 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} \right)$
- 5) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5}}{x - 2} \right)$, 6) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x - 4} \right)$

حساب نهاية باستعمال العدد المشتق

تمرين 03:

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^3 - 27}{x - 3} \right)$, 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3} \right)$, 3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin x}{x - \pi} \right)$, 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin 3x}{2 \cos x - 1} \right)$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f^2(x) - f^2(2)}{x - 2} \right]$ و $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$

حساب نهاية دوال مركبة

تمرين 04:

باستعمال نهاية الدالة المركبة أحسب النهايات التالية :

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{2x^2 - x + 1} \right)$, 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{\frac{4x + 5}{2x + 1}} \right)$, 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)$, 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$

حساب نهاية باستعمال مبرهنة الحصر

تمرين 05:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ و ثم استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

مراجعة 06:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x^3 + 5 \cos x + 1$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $x^3 - 4 \leq f(x) \leq x^3 + 6$ ثم استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

مراجعة 07:

(1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$ و $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1$.

(2) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{2 + \sin x}$. أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(3) g دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $g(x) = \frac{2 + \sin x}{x}$. أدرس نهايتي الدالة g عند 0 من اليسار ثم عند 0 من اليمين.

نهاية غير منتهية

(1) أحسب نهاية الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند العدد 1.

(2) أوجد عدد حقيقيا α بحيث إذا كان : $x \in]1-\alpha; 1+\alpha[$ فإن : $f(x) > 10^3$.

نهاية منتهية

(1) أحسب نهاية الدالة f المعرفة على $];+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{6x-1}{4x-1}$ عند $+\infty$.

(2) أوجد عدد حقيقيا A بحيث إذا كان : $x > A$ فإن : $f(x) \in]1,4; 1,6[$.

المستقيمات المقاربة

(1) بين أن المنحنى (γ) الممثل للدالة f يقبل المستقيم (Δ) كمستقيم مقارب.

$(\Delta): y = 2x + 3$ و $f(x) = 2x + 3 - \frac{7}{x+2}$ ؛ $(\Delta): y = 5$ و $f(x) = \frac{5x+3}{x+2}$ ؛ $(\Delta): x = 1$ و $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$

المستقيمات المقاربة

(2) نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$.

(1) عين الأعداد الحقيقية : a ؛ b ؛ c ؛ d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$.

(2) استنتج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مائلا (Δ) عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

(3) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

المستقيمات المقاربة

❖ نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ : $f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x+2}$ و الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 - 3x + 5$.

(1) عين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-2\}$ يكون : $f(x) = g(x) + \frac{a}{x+2}$.

(2) أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)]$ ثم فسّر بيانيا النتيجة.

الاستمرارية: دالة ذات شكل واحد

تمرين 13:

(1) f دالة معرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} ; x \neq 2 \\ f(x) = 3 ; x = 2 \end{cases}$. أدرس استمرارية الدالة f عند $x = 2$.

الاستمرارية: دالة ذات قيمة مطلقة

تمرين 14:

(1) f دالة معرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{2x} + x^2 + \frac{1}{2} ; x \neq 0 \\ f(x) = 1 ; x = 0 \end{cases}$. أدرس استمرارية الدالة f عند $x = 0$.

الاستمرارية: دالة ذات شكلين

تمرين 15:

(1) f دالة معرفة كمايلي : $\alpha \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} f(x) = \alpha + 1 ; 2 \leq x < 3 \\ f(x) = x + \alpha - 2 ; 3 \leq x < 5 \end{cases}$. أدرس استمرارية الدالة f عند $x = 3$.

الاستمرارية: مسألة عكسية

تمرين 16:

(1) f دالة معرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2} - 2} ; x \neq 0 \\ f(x) = a ; x = 0 \end{cases}$. تحقق أنه من أجل $x \neq 0$: $f(x) = \sqrt{4+x^2} + 2$.

(2) استنتج قيمة a حتى تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$.

مبرهنة القيم المتوسطة: $f(x) = k$

تمرين 17:

(1) برهن باستعمال نظرية القيم المتوسطة أن المعادلة : $x^3 - 6x = -3$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $[-1 ; 2]$.

مبرهنة القيم المتوسطة: $f(x) = 0$

تمرين 18:

(1) برهن باستعمال نظرية القيم المتوسطة أن المعادلة : $x^3 + 5x - 2 = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0 ; 1]$.

مبرهنة القيم المتوسطة: $f(x) = x$

تمرين 19:

(1) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ بـ : $f(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2$.

(1) بين أن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $D = [0 ; 2]$.

(2) لتكن الدالة g المعرفة على D بـ : $g(x) = f(x) - x$. بين أن لدالة g متناقصة تماماً على المجال D .

(3) حسب $g(0)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً في المجال D . فسّر النتيجة هندسياً .

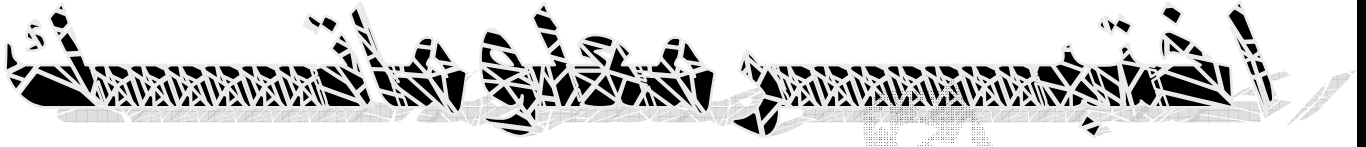
مبرهنة القيم المتوسطة: $f(x) = g(x)$

تمرين 20:

❖ نعتبر الدالتين : $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = -x^3$.

(1) بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0

حيث : $-\frac{7}{8} < x_0 < -\frac{3}{4}$.



❖ أحسب النهايات التالية :

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 2x + 2} \right)$, 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5} \right)$, 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 - x + 3}{x^2 + 2} \right)$, 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} \right)$
5) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 + 2x + 1}{x - 2} \right)$, 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x + 1}{x^2 + 3x - 4} \right)$, 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{5x^2 + 3x + 1}{(x - 3)^2} \right)$, 8) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{3x + 7}{-x^2 - 2x - 4} \right)$
9) $\lim_{n \rightarrow a} \left(\frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} \right)$, 10) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \right)$, 11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 5x + 1} \right)$, 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \right)$
13) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$, 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \sqrt{x^2 + x} \right)$, 15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} \right)$, 16) $\lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49} \right)$
17) $\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x} \right)$, 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sqrt{\frac{1 - x}{x}} \right)$, 19) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sqrt{x} - a}{x - a} \right)$, 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \right)$

❖ باستعمال تعريف العدد المشنق أحسب النهايات التالية :

- 21) $\lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7} \right)$, 22) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(-x^3 + 3x - 1)^5 - 1}{x - 1} \right)$, 23) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos(2x)}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$, 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x + 1} - 1} \right)$

❖ باستعمال نهاية دالة مركبة أحسب النهايات التالية :

- 25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{-x + 1}{x^2 + 1}} \right)$, 26) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$, 27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{\pi x + 1}{4x + 3} \right)$, 28) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^3$

❖ باستعمال نهاية حصر دالتين أحسب النهايات التالية :

- 29) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \cos \left(\frac{\pi}{x - 1} \right)$, 30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 - 4(-1)^x}{x} \right)$

(1) من أجل $x < 0$ قارن بين : $(x + 3)$ و $(x + 3 \sin x)$ ثم استنتج : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3 \sin x)$ 31)

(2) من أجل $x > 0$ قارن بين : $2x$ و $\sqrt{4x^2 + 5}$ ثم استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 5} - x)$ 32)



توسّع أكثر

أحسن التمارين في الكتاب

فرض الثلاثي الأول

تمرين 01:

(1) f دالة معرفة على المجال $I = [0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$.

(2) برهن أنه من أجل كل $x \geq 0$: $x \leq \sqrt{x^2 + 3x + 1} \leq x + 2$.

(3) استنتج أنه من أجل $x > 0$: $1 - \frac{2}{x+2} \leq f(x) \leq 1$.

(4) ماهي نهاية الدالة f عند $+\infty$ ؟

(5) فسر هندسيا هذه النهاية؟

تمرين 02:

❖ f دالة معرفة كمايلي : $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & ; x \leq 3 \\ \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} & ; x > 3 \end{cases}$.

(1) عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f .

(2) عين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون : الدالة f مستمرة عند $x_0 = 3$ و (C_f) يشمل النقطة $A\left(-2; -\frac{4}{3}\right)$.

تمرين 03:

❖ f و g دالتان معرفتان كمايلي : $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{5}{x-1}$.

(1) عيّن D_f و D_g مجموعة تعريف الدالتان f و g .

(2) بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث : $3 < x_0 < 4$.

تمرين 04:

f دالة معرفة كمايلي : $f(x) = \begin{cases} \frac{3|x^2 - x|}{x^2 + x - 2} \\ f(x) = 1 ; x = 1 \end{cases}$.

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أكتب عبارة f دون رمز القيمة المطلقة.

(3) أدرس استمرارية الدالة f عند كل من : $x = -2$ ؛ $x = 1$ ؛ $x = 3$.

اختبر معلوماتك : إجابة مختصرة :

النهاية	01	02	03	04	05	06	07	08
النتيجة	$\frac{1}{2}$	0	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
النهاية	09	10	11	12	13	14	15	16
النتيجة	$\frac{a-1}{3a^2}$	$3x^2$	$+\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{56}$
النهاية	17	18	19	20	21	22	23	24
النتيجة	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{a}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{6}$	-2	0	2
النهاية	25	26	27	28	29	30	31	32
النتيجة	0	$+\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	0	0	$-\infty$	$+\infty$

أحسن التمارين في الكتاب المدرسي.

02 – 01 : نهاية منتهية و غير منتهية

12 - 14 - 19 : نهاية منتهية و غير منتهية

30 - 31 - 32 - 33 - 34 - 38 - 39 : نهاية دالة مركبة و النهايات بالمقارنة

42 - 43 - 45 : الاستمرارية.