

بالتوفيق في
شهادة البكالوريا

تمارين شاملة في الدوال

وفق البرنامج الوزاري
2021 / 2020



الأستاذ
عبد الرحمان
للرياضيات

التحليلات + الاشتقاقية + دراسة دوال: كثير الحدود، جذرية، ناطقة وصماء

تمارين شاملة في الدوال:

- العددية
- الأسية
- اللوغارتمية

تجميع
بالتوفيق في
شهادة البكالوريا

قناة لتعليم الرياضيات لمختلف الأطوار

بدراسة وتمارين قيمة وبشرح مفصل ومبسط ودقيق

كما يمكنكم الاتصال بنا على [f](#) أو [i](#) أو [s](#)

FB.COM/ABDOU.MATH17

التمرين الأول

ادرس قابلية اشتقاق الدوال التالية عند القيمة a المشار إليها في كل من الدوال المعرفة بـ:

- $f_3(x) = x^2; a = 1$
- $f_4(x) = x^2 + 1; a = 2$
- $f_5(x) = 3x + 1; a = 0$
- $f_6(x) = x^2 + x; a = -1$
- $f_7(x) = \frac{1}{x+1}; a = 2$
- $f_8(x) = \frac{x}{x+2}; a = -1$
- $f_9(x) = \frac{x+1}{x+3}; a = 1$
- $f_{10}(x) = \frac{1}{x} + 2; a = -1$
- $f_{11}(x) = \sqrt{x}; a = 1$
- $f_{12}(x) = \sqrt{x+3}; a = 6$
- $f_{13}(x) = \sqrt{-x-1} + 2; a = -1$
- $f_{14}(x) = \sqrt{2x}; a = 2$

التمرين الثاني

المستوي منسوب إلى معلم متعامد.

عين في كل حالة من الحالات التالية معادلة المماس لمنحني كل دالة من الدوال المعرفة كإيلي في النقطة ذات الفاصلة x_0 :

- $f(x) = -3x^3 + x - 4; x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x}; x_0 = -2$
- $f(x) = \frac{2x+1}{x-2} + 2; x_0 = 3$
- $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}; x_0 = 0$

التمرين الثالث

a, b و c أعداد حقيقية.

تعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

ونسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- عين الأعداد a, b, c بحيث المنحني (C_f) يشمل النقطة $A(1; -3)$ ويقبل في النقطة $B(0; 1)$ مماسا موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = -6x$.

التمرين الرابع

f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية تحقق:

$$f'(3) = 3 \quad f(1) = 2 \quad f'(-2) = -3$$

- عين الدالة f .

التمرين الخامس

احسب مشتقة كل دالة من الدوال المعرفة كإيلي:

- $f_1(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 5x$
- $f_2(x) = \frac{3x^2 + 6x - 3}{4}$
- $f_3(x) = \frac{2x + 1}{x - 2}$
- $f_4(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$
- $f_5(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$
- $f_6(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$
- $f_7(x) = \frac{x-3}{x^2 - 8x + 16}$
- $f_8(x) = (2x + 1)^2$
- $f_9(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x + 3}$
- $f_{10}(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$
- $f_{11}(x) = \frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 3}$
- $f_{12}(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$
- $f_{13}(x) = \sin x + 3\cos x$
- $f_{14}(x) = \tan x$
- $f_{15}(x) = (\sin x)(\cos x)$
- $f_{16}(x) = \cos^2 x$
- $f_{17}(x) = \frac{1}{\cos x}$
- $f_{18}(x) = \frac{1}{\tan x}$
- $f_{19}(x) = \frac{1 + \sin x}{3 + \cos x}$
- $f_{20}(x) = \sin(3x - 2)$
- $f_{21}(x) = \cos(-5x - 5)$
- $f_{22}(x) = \sqrt{2x + 2}$

التمرين السادس

احسب النهايات التالية:

- $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{\sqrt{x}}{1-x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4-x^2}{x-2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{1-x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+2}{x^2 + x} + \frac{3x+1}{x^2 - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 4 + \frac{1}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + 4 + \frac{\sin x}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos x}{x-1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$

التمرين السابع

احسب النهايات التالية:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 2)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 9 \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((2x+1)^2 - 5x^2 + 3 \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x - 3}{x-1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x-2)^2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 2x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{2x^2 - x - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x+1} - 2x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x+1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + 2x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2-x} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x-1} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\sqrt{x} - 3}{3\sqrt{x} + 2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}+2} \right)$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط:

https://youtu.be/d3Tty_sfEFY . الأستاذ عبد الرحمن للرياضيات

التمرين الثامن

احسب النهايات التالية:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 3x + 2}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 - 5x + 2}{9x^2 - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - 1}$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط:

https://youtu.be/d3Tty_sfEFY . الأستاذ عبد الرحمن للرياضيات

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x-2}-1}{\sqrt{x}-1} \bullet \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5\sqrt{x}-x\sqrt{5}}{x\sqrt{x}-5\sqrt{5}} \bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x}-8}{x^2-16}$$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/d3Tty_sfEfy . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات .

احسب نهايات كل من الدوال المعرفة بالعبارات أدناه عند أطراف مجموعة تعريفها مفسراً النتائج هندسياً:

$$\bullet f_1(x) = \frac{1}{x-2} ; D_1 =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\bullet f_2(x) = 2 - \frac{1}{x^2} ; D_2 =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\bullet f_3(x) = \frac{2x}{1-x} ; D_3 =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\bullet f_4(x) = \frac{x^2+4}{x^2+x-2} ; D_4 =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\bullet f_5(x) = \frac{-x+1}{x^2+1} ; D_5 =]-\infty; +\infty[$$

$$\bullet f_6(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} ; D_6 =]-\infty; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 2- احسب $f'(x)$ (حيث f' الدالة المشتقة للدالة f).
- 3- ادرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- 4- أ- أثبت أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
- ب- ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (T) والمنحنى (C_f) .
- 5- بين أن النقطة $\Omega(0;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
- 6- مثل بيانياً (C_f) .

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسّر ذلك هندسياً.
- 2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 3- عيّن إحداثيات نقط تقاطع (C_f) ، مع حامل محور الإحداثيات.
- 4- أ- بين أنه إذا كان $x \in D$ فإن: $(4-x) \in D$

- ب- بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) .
- 5- مثل بيانياً (C_f) .

تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس تغيرات الدالة f .
- 2- أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ حيث a, b, c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
- ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.
- ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- 3- مثل بيانياً (C_f) .

تعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس تغيرات الدالة f .
- 2- عيّن إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الإحداثيات.
- 3- أ- برهن أن النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر لـ (C_f) .
- ب- عين معادلة للمماس (T) في النقطة ω .
- 4- مثل بيانياً كل من (T) و (C_f) .
- 5- m وسيط حقيقي، ناقش بيانياً وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0$.

a و b عدداً حقيقيين.

تعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كمايلي :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3x + b$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- عين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 .
- 2- ادرس تغيرات الدالة f .
- 3- احسب $f(5), f(1), f(0), f(-2)$.
- 4- اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .
- 5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T) .
- 6- مثل بيانياً كل من (T) و (C_f) .

a و b عددا حقيقيان.
نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3x + b$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- عين العددين a و b بحيث: (C_f) يقطع حامل محور الترتيب في النقطة التي ترتيبها $\frac{4}{3}$ ويقبل المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقاربا له.
- 2- ادرس تغيرات الدالة f .
- 3- عين إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) مع حامل محوري الإحداثيات.
- 4- بين أن (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيه كل منهما يساوي -2 يطلب تعيين معادتهما.
- 5- مثل بيانيا (C_f) .

a و b عددا حقيقيان.
نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كالتالي:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x + 2}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- عين العددين a و b بحيث (C_f) يقبل عند النقطة $A(0; \frac{7}{2})$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.
ب- بين أن $f(x)$ يكتب على الشكل: $f(x) = 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2}$.
- 2- ادرس تغيرات الدالة f .
- 3- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادته.
- 4- عين إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) مع حامل محوري الإحداثيات.
- 5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- 6- برهن أن نقطة تقاطع (C_f) و (Δ) هي مركز تناظر ل (C_f) .
- 7- عين معادلة للمماس (T) في النقطة ω .
- 8- مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

I. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

- 1- ادرس تغيرات الدالة g .
- 2- احسب $g(0)$ و $g(\frac{1}{2})$.

- 3- أ- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $0; \frac{1}{2}$ يحقق $g(\alpha) = 0$.
ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$ و $]-1; +\infty[$.
II. هي الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ كالتالي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

- ونسَمي (Γ) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$.
- 2- عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسر النتيجة بيانيا.
- 3- احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

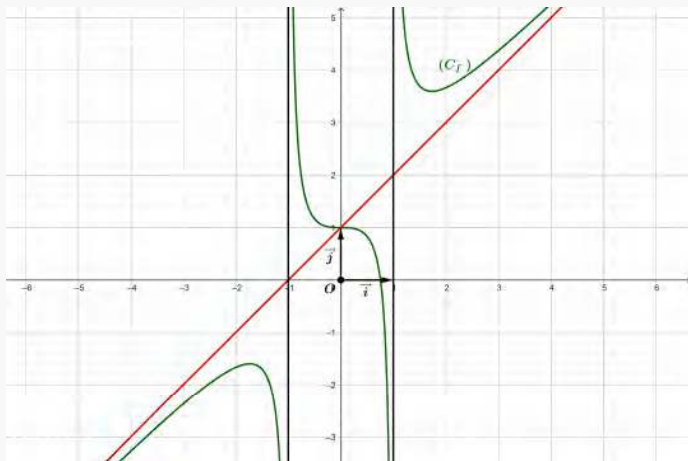
- 4- شكل جدول تغيرات الدالة f .
- 5- مثل بيانياً (Γ) .

التمرين التاسع عشر

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كالتالي:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_f) منحنيا البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما في الشكل المقابل:



1- بقراءة بيانية - دون استعمال عبارة الدالة f - أوجد مايلي:

- أ- نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- ب- معادلة المسقيمت المقاربة للمنحنى (C_f) .

ج- إشارة $f(\frac{1}{2})$.

2- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

3- أ- من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$. احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها.
ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

4- من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$. احسب $f(x) + f(-x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كالتالي:

$$g(x) = f(|x|)$$

ونسَمي (C_g) منحنيا البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة g في الصفر.
- 2- بين أن الدالة g زوجية.
- 3- انطلاقا من (C_f) مثل بيانيا (C_g) . - اشرح طريقة الإنشاء - .
- 4- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$|x|^3 + (1 - |m|)(x^2 - 1) = 0$$

I. g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x - 3$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; 3]$.

ب- عين إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

I. f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_f) منحنيا البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]1, +\infty[$.

2- ادرس إتجاه الدالة f على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3- بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) .

4- أوجد فواصل النقط التي تكون فيها المستقيمتان المتماثلتان لـ (C_f) موازية للمستقيم (d) .

5- مثل بيانيا (C_f) .

1- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x^2 + 1}$.

2- ادرس تغيرات الدالة f .

3- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 4x + 3$.

4- أثبت أن (C_f) يقبل ثلاث نقط إنعطاف يطلب تعيينها.

5- بين أن النقطه $A(0; 3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

6- أثبت أن (C_f) يقبل تماسين معامل توجيههما 2.

7- مثل بيانيا (C_f) والمستقيم (Δ) .

8- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x) = 4x + m$.

التمرين الثالث وعشرون

I. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $\alpha \in]2.19; 2.20[$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

2- ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3- بين أن: $f(\alpha) = \frac{3(\alpha + 2)}{\alpha^2 - 1}$ ، ثم أوجد حصراً للعدد $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-1} .

4- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بمجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5- مثل بيانيا المستقيم (Δ) ، ثم المنحنى (C_f) .

III. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة h في 0.

2- بين أن الدالة h زوجية.

3- بين كيف يمكن تمثيل المنحنى (C_h) انطلاقاً من (C_f) ، ثم أنشئه.

التمرين الرابع وعشرون

a و b عدداً حقيقيين. I. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = ax^3 + bx + c$$

ونسَمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما في الشكل المقابل:

التمرين الواحد وعشرون

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 - 1}$ ، حيث a, b, c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) في مجوار $+\infty$ و $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلته.

2- ادرس تغيرات f .

3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-\frac{1}{2}; -\frac{4}{5}[$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

4- مثل بيانياً (C_f) .

5- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $0 = x^3 - (m+1)x^2 + m + 1$.

II. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{|x| - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أثبت أن الدالة h زوجية، فسّر ذلك هندسياً.

2- اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

3- مثل بيانياً (C_h) .

التمرين الثاني وعشرون

a و b عدداً حقيقيين.

I. نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- عين العددين a و b بحيث: المنحنى (C_f) يمر من النقطه $A(0; 3)$ ويقبل فيها مماساً معامل توجيهه 4.

II. نضع من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$$

- 1- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.
- 2- ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 3- أ- بين أن: $f(a) = a - \frac{2}{a^2+1}$
ب- أوجد حصرا للعدد $f(a)$.
- 4- أ- عين الأعداد الحقيقية a, c, b ، بحيث من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$
ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، يُطلب تعيين معادلته.
ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- 5- أ- تحقّق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f''(x) = \frac{4(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$
ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل تقطعي إنعطاف يُطلب تعيينهما.
- 6- بين أنه يوجد مماسين (T_1) و (T_2) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الترتيب -2 ، يُطلب كتابة معادلتيهما.
- 7- مثل بيانيا المماسين (T_1) و (T_2) ، ثم المنحنى (C_f) .
- 8- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة: $m(x^2+1)+2=0$.

التمرين السادس وعشرون

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- بين أن المنحنى (C_f) يقبل النقطة ذات الفاصلة 1 مركز تناظر، يُطلب تعيين ترتيبتها.
- 2- ادرس تغيرات الدالة f .
- 3- أ- عين الأعداد الحقيقية a و b ، بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{x}{x-1}$
ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، يُطلب تعيين معادلته.
ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- 4- بين أنه يوجد مماسان (T_1) و (T_2) لـ (C_f) عموديان على المستقيم ذو المعادلة: $y = -4x$ ، يُطلب تعيين معادلة كلٍّ منهما.
- 5- مثل بيانيا كل من (T_1) و (T_2) ، ثم المنحنى (C_f) .
- 6- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$3x^2 + (5 - |m - 1|)x + (|m - 1| - 4) = 0$$

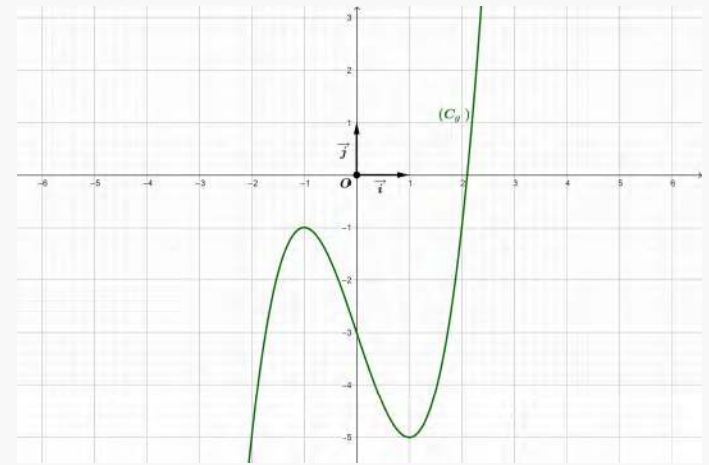
II. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $h(x) = f(x^2)$ - عبارة $h(x)$ غير مطلوبة-

ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- احسب نهايات الدالة h عند أطراف مجموعة تعريفها.
ب- ادرس بطريقتين مختلفتين، اتجاه تغير الدالة h .
ج- شكّل جدول تغيرات الدالة h .
 - 2- بين أن الدالة h زوجية، ثم فسّر ذلك هندسيا.
- III. نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كالتالي: $k(x) = 2xf'(x^2)$ - عبارة $k(x)$ غير مطلوبة-
- 1- ادرس إشارة $k(x)$.
 - 2- برهن حسابيا بطريقتين مختلفتين أن الدالة k فردية، ثم فسّر ذلك هندسيا.

التمرين السابع وعشرون

الأجزاء I، II و III مستقلة.



1- باستعمال المنحنى (C_g) الممثل في الشكل السابق. عين a, b و c .

2- بين أن المعادلة $0 = 3x^3 - 3x - 3$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $\alpha \in \left] 2; \frac{5}{2} \right[$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} + 1$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- تحقّق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$
- 2- عين دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.
- 3- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- 4- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 5- بين أن: $f(\alpha) = 3\alpha + 1$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.
- 6- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- 7- مثل بيانياً المستقيم (Δ) ثم المنحنى (C_f) .

التمرين الثامن وعشرون

I. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كالتالي:

$$g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$$

- 1- ادرس تغيرات الدالة g .
- 2- أ- بين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $\alpha \in]-1; 0[$.
ب- أعط حصرا لـ α سعته 10^{-1} .
- 3- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
- 4- بين أن: $\alpha^2 = -3 - \frac{4}{\alpha - 1}$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I. باستعمال العدد المشتق. احسب النهايتين التاليتين:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^3 - a^3} \bullet \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin^2(x) - \sin(x) \cdot \sin(\alpha)}{x - \alpha} \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{\sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2021} - 1}{x - 1}$$

II. أوجد قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & ; x \geq 1 \\ ax - x & ; x < 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$.

III. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في α .
- حدد النهايات الآتية:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a+x^2)}{x} \bullet \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(\alpha) - \alpha f(x)}{x - \alpha}$$

التمرين الثامن وعشرون

I. g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-2.25; 2]$.

ب- عيّن إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

I. f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_f) منحنيا البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

4- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5- بين أن: $f(\alpha) = 1 + \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1}$ ، ثم أوجد حصرًا لـ: $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

6- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $A(\beta; 0)$ حيث: $-1.25 < \beta < -1.5$.

7- مثل بيانياً (C_f) .

III. تعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{\beta\}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{1}{f(x)}$$

ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة h ، ثم مثل (C_h) بيانياً.

2- m وسيط حقيقي. ناقش بيانياً وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = |m - 1|$.

3- n وسيط حقيقي. ناقش بيانياً وحسب قيم n عدد حلول المعادلة: $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$. حيث: $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

4- γ وسيط حقيقي. ناقش بيانياً وحسب قيم γ عدد حلول المعادلة $f(x) = \sin(\gamma)$. حيث: $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

التمرين التاسع وعشرون

I. g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-4; -3]$.

ب- عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $-\frac{n+1}{10} \leq \alpha \leq \frac{n}{10}$.

ج- عيّن إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
2- بين أن: $\alpha^3 = -3\alpha - 2$.
II. f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

ونسَمي (C_f) منحنيا البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$.

3- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4- بين أن: $f(\alpha) = -\frac{3}{\alpha + 1}$ ثم استنتج حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

5- أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = -2$.

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، يُطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

6- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثيها.

ب- اكتب معادلة للمماس (T) .

7- مثل بيانياً المستقيم (T) ، ثم المنحنى (C_f) .

8- m وسيط حقيقي. عيّن قيم m حتى تقبل المعادلة: $0 = (m+2)(x+1)^2 - 3x - 1$ حلين مختلفين في الإشارة.

I. f دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{x^2 + 1}$$

ونسَمي (Cf) منحنيا البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس تغيرات الدالة f.
- 2- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-2; -1[$ ، ثم عَيِّن حصر ل α سعته 10^{-1} .
- 3- نعتبر كثير الحدود التالي: $p(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 1$.
 - أ- تحقّق من أن: $p(1) = 0$.
 - ب- بين أن المعادلة $x^3 + x^2 + 3x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا β على \mathbb{R} ثم تحقّق أن: $0.2 < \beta < 0.3$.
 - ج- حل في \mathbb{R} ، المعادلة $p(x) = 0$.
 - د- بين أنه يوجد مماسان ل (Cf) يمران بالنقطة $B(0; \frac{1}{2})$.
- 4- اكتب معادلة للمماسين (T_1) و (T_2) في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و -1 على الترتيب.
- 5- أ- برهن أن المنحنى (Cf) يقبل مستقيما مقاربا مثلا (Δ) يُطلب تعيين معادلته.
- ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (Cf) والمستقيم (Δ) .
- 6- برهن أن النقطة $I(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (Cf).
- 7- بين أن المنحنى (Cf) يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها.
- 8- مثل بيانيا كل من المستقيمي (T_1) و (T_2) ، ثم المنحنى (Cf).
- 9- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

II. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = |f(x)|$$

ونسَمي (Cg) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
- ب- فسّر كيف يمكن تمثيل (Cg) انطلاقا من (Cf).
- 2- مثل بيانيا (Cg).

التحريين الواحد و ثلاثون

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)}$$

ونسَمي (Cf) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
 - 2- أ- احسب $f'(x)$.
 - ب- ادرس إشارة $f'(x)$. ماذا استنتج بالنسبة للمنحنى (Cf)؟
 - ج- شكّل جدول تغيراتها.
 - 3- عَيِّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{2(x+2)}$.
- II. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ:
- $$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$$
- ونسَمي (Cg) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x))$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$ ثم فسّر ذلك هندسيا.
 - 2- ادرس الوضع النسبي بين (Cg) و (Cf).
 - 3- اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = m$.
- II. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$h(x) = \frac{x^3 + x - 2}{2(x+2)}$$

التحريين الثاني و ثلاثون

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 11x + 7}{2(x-2)}$$

ونسَمي (Cf) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

- 1- أ- احسب: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.
- ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2- ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 3- أ- برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - \frac{3}{2}$ مقارب مائل ل (Cf) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
- ب- ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (Δ) والمنحنى (Cf).
- 4- بين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر للمنحنى (Cf).
- 5- بين أنه يوجد مماسان (T_1) و (T_2) ل (Cf) معامل توجيه كل منهما $\frac{3}{2}$ ، يُطلب تعيين معادلة كل منهما.
- 6- تحقّق من أن نقطتي التماس ل (T_1) و (T_2) مع المنحنى (Cf) متناظرتين بالنسبة لمركز تناظر (Cf).
- 7- مثل بيانيا (Cf).

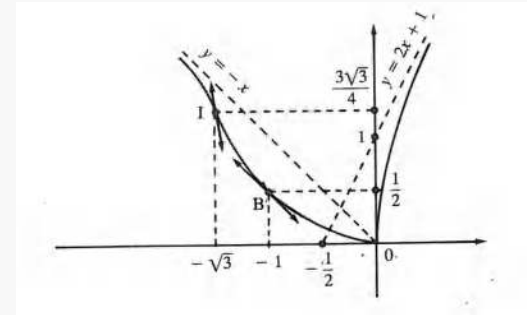
II. نعتبر الدالة الوسيطة f_m ذات المتغير x والوسيط الحقيقي m المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كاليلي:

$$f(x) = \frac{4x^2 + (m+8)x - m + 4}{2(x-2)}$$

ونسَمي (C_{f_m}) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- بين أنه توجد نقطة ثابتة تنتمي إليها جميع المنحنيات (C_{f_m}) .
- 2- ماهو المنحنى الذي يشمل $A(\frac{7}{4}; 0)$.

I. (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على \mathbb{R} . الشكل المقابل يوضح ذلك:



- بقراءة بيانية. أوجد مايلي، مع التبرير:

- أ- نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- ب- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$.
- ج- $f'(-1)$ و $f''(-\sqrt{3})$.
- د- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{x} \right)$.

II. تعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

ونسَمِّي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- 2- أ- من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، احسب: $g'(x)$.
- ب- عين إشارة $g'(x)$ على \mathbb{R}^* .
- 3- شكّل جدول تغيرات الدالة g .
- 4- m وسيط حقيقي. انطلاقاً من جدول تغيرات الدالة g ، ناقش بيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $g(x) = |m - 2|$.

I. تعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1$$

ونسَمِّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 احسب الدالة المشتقة للدالة f .
- 2- بين أنه من أجل $x < 0$ لدينا: $f'(x) < 0$.
- 3- بين أنه من أجل $x \geq 0$ لدينا: $f'(x) < 0$.
- 4- بين أنه من أجل كل $x < 0$ لدينا: $f(x) + 3x - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$.
- 5- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 3x - 1)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.
- 6- بين أنه من أجل كل $x > 0$ لدينا: $f(x) + x - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.
- 7- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 1)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.
- 8- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1.4 < \alpha < 1.3$.
- ب- احسب $f(0)$.
- 9- مثل بيانياً (C_f) .

II. تعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كمايلي:

$$h(x) = (f(x))^2$$

- 1- احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
- 2- ادرس إتجاه تغير الدالة h ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

I. تعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كمايلي:

$$g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

- 1- بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) > 0$.
- II. تعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = xg(x)$$

ونسَمِّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس تغيرات الدالة f .
- 2- اكتب معادلة للمماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0 .
- 3- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T) .
- 4- مثل بيانياً (C_f) .
- 5- m وسيط حقيقي. ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $f(x) = x + m$.
- III. تعتبر الدالة k المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$k(x) = f(x^2)$$

- 1- ادرس إتجاه تغير الدالة k بطريقتين مختلفتين.
- 2- شكّل جدول تغيرات الدالة k .

I. تعتبر الدالة f المعرفة على $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right]$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{2x - 1}}{x}$$

ونسَمِّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $\frac{1}{2}$ من اليمين، ثم فسر النتيجة هندسياً.
- 2- ادرس تغيرات الدالة f .
- 3- بين أنه من أجل كل x من المجال $]1; 2[$: $|f'(x)| < 1$.
- 4- بين أنه من أجل كل x من المجال $]1; 2[$: $f''(x) = \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 \sqrt{2x - 1}^3}$.
- 5- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة نقطة انعطاف، يُطلب تعيين احداً منها.
- 6- مثل بيانياً (C_f) .
- 7- m وسيط حقيقي. ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $x + \sqrt{2x - 1} - mx = 0$.

II. 1- حل في المجال $[0; \pi]$ المتراجحة: $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$.

2- تعتبر الدالة k المعرفة على $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$ بـ:

$$k(x) = f(\sin x)$$

- أ- ادرس إتجاه تغير الدالة h بطريقتين مختلفتين.
- ب- شكّل جدول تغيرات الدالة h .

1. تعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب تغيرات الدالة f .
- 2- اكتب معادلة للمماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- 3- من أجل كل x من \mathbb{R} احسب: $f(x) + f(-x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.
- 4- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T) ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟
- 5- بين أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1 < \alpha < 2$.
- 6- مثل بيانياً المستقيم (T) ، ثم المنحنى (C_f) .

II. تعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$h(x) = 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة h في 0، ثم فسّر ذلك هندسيا.
- 2- بين أنّ الدالة h زوجية.
- 3- انطلاقاً من (C_f) ، مثل بيانياً (C_h) .

تعتبر الدالة f المعرفة على $[-2; 2]$ بـ:

$$f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في -2، ثم في 2 من اليسار.
ب- فسّر ذلك هندسيا.
- 2- احسب $f'(x)$ ، ثم ادرس إشارتها.
- 3- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 4- حل في المجال $[0; 2]$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.
- 5- اكتب معادلة للمماس (T) ل (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- 6- مثل بيانياً (C_f) .

(I) تعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; 1]$ بـ:

$$f(x) = (1 - x) \sqrt{1 - x^2}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، حيث: $\|\vec{j}\| = 4\text{cm}$.

1- أ- احسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟

ب- فسّر النتيجة هندسياً

2- بين أنه من أجل كل x من $[-1; 1]$ فإن: $f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

- 3- ادرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1; 1]$.
- 4- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 5- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- 6- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T) .
- 7- مثل بيانياً المستقيم (T) ، ثم المنحنى (C_f) .

(II) تعتبر الدالة g المعرفة على $[-1; 1]$ بـ:

$$g(x) = (1 - x) \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}$$

- 1- بين أنّ منحنى الدالة g هو صورة المنحنى (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ثم مثله بيانياً.
- 2- m وسيط حقيقي. ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $g(x) = e^m$.

m وسيط حقيقي يختلف عن 4.

تعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f_m(x) = \frac{2x^2 + mx + 2}{(x + 1)^2}$$

ونسَمي (C_{f_m}) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 2- ادرس حسب قيم m كل من: $\lim_{x \rightarrow -1} f_m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f_m(x)$ ، ثم فسّر ذلك هندسياً.
- 3- أ- ادرس حسب قيم m اتجاه تغير الدالة f_m .
ب- حسب قيم m ، شكّل جدول تغيرات الدالة f_m .
- 4- بين أنه توجد مستقيمات مماسية ل (C_{f_m}) موازية لحامل محور الفواصل في نقطة، يُطلب تعيينها.
- 5- برهن أنّ جميع المنحنيات (C_{f_m}) تمرّ من نقطة وحيدة ثابتة، يطلب تعيين إحداثياتها.
- 6- أوجد نقط تقاطع (C_{f_m}) مع محوري الإحداثيات.
- 7- مثل بيانياً وفي نفس المعلم كل من (C_{f_8}) و $(C_{f_{-4}})$.

التمرين الأول

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = x - e^{-x}$

- 1- ادرس تغيرات الدالة g .
- 2- أ- بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيداً α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$.
- ب- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$

- ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - 2- أ- بين أنّه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$
 - ب- عيّن دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيًا.
 - 3- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
 - 4- بين أنّ $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كانت $g(x) = 0$ ثمّ استنتج قيمة $f(\alpha)$.
 - 5- مثل بيانيًا (C_f) .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال \mathbb{R} كالتالي:

$$h(x) = |f(x)|$$

- ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 1- اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
 - 2- انطلقاً من (C_f) مثل بيانيًا (C_h) .

التمرين الثاني

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$

- ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$
- 1- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - 2- بين أنّه من أجل كل x من \mathbb{R} فإنّ: $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$
 - 3- أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.
 - ب- عيّن $(\ln 3)$ - f'' دون حساب عبارة $f''(x)$ - برر إجابتك.
 - 4- أ- بين أنّ المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(-\infty)$.
 - ب- بين أنّ المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(+\infty)$.
 - 5- ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .
 - 6- أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
 - 7- بين أنّ النقطة $I(\ln(3); \ln(3))$ مركز تماظر للمنحني (C_f) .
 - 8- بين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيداً α في المجال $]-2; -1[$. ثمّ عيّن حصرًا للعدد α سعته 10^{-1} .
 - 9- أنشئ المستقيمين (Δ_1) ، (Δ_2) ، المماس (T) والمنحني (C_f) .
 - 10- ناقش بيانيًا وحسب قيم الوسيط الحقيقي غير المعلوم m المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = f(3x - 2)$ - عبارة $g(x)$ غير مطلوبة -

- 1- ادرس تغيرات الدالة g .
- 2- تحقّق من أنّ: $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$ ثمّ بين أنّ: $3f'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)$
- 3- استنتج معادلة المماس (D) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

دراسة واول أسية

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال \mathbb{R} كيلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ على \mathbb{R} . ماذا نستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

ج- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2- برهن أن النقطة $I(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

3- أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$. ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب- احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$. ماذا نستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

4- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-2.76 < \alpha < -2.77$.

أ- احسب $f(0)$.

ب- مثل بيانيا (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = f(4x + 1)$ -عبارة $g(x)$ غير مطلوبة-

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2- تحقّق من أن: $g\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 0$ ، ثمّ بين أن: $4f'(\alpha) = g'\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right)$.

3- استنتج معادلة المماس (T) للمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha - 1}{4}$.

4- تحقّق من أن: $y = (1 + \alpha)^2 x - \frac{(1 + \alpha)(\alpha^2 - 1)}{4}$ معادلة للمماس (T) .

(III) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال \mathbb{R} كيلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسعي (C_k) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن الدالة k زوجية.

2- أ- بين كيف يمكن تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) .

ب- انطلاقا من (C_f) . مثل بيانيا (C_k) .

(IV) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال \mathbb{R} كيلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسعي (C_h) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- تحقّق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $h(x) = f(x) + 1$.

2- أ- استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل تقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب- انطلاقا من (C_f) . مثل بيانيا (C_h) .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = x + 2 - e^x$.

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.9 < \beta < -1.8$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال \mathbb{R} كيلي:

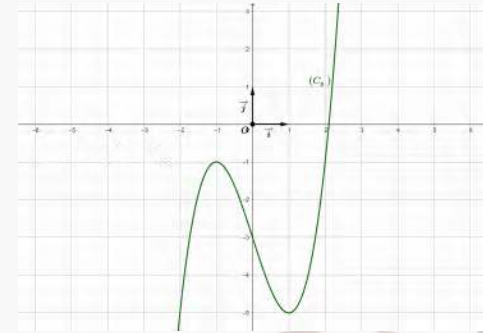
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

4 - تحقّق من أن: $y = \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha + 2)}{4}$ معادلة للمستقيم (D) .

(I) a, b و c أعداد حقيقية.

نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = (ax + b)e^x + c$.

ونسعي (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، كما في الشكل أدناه:



1 - بقراءة بيانية، أوجد مايلي:

أ- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

ب- $g'(0)$ و $g(0)$.

2- كما سبق، أوجد: a, b و c .

3- نضع: $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.

أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على \mathbb{R} . ثمّ تحقّق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال \mathbb{R} كيلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

ونسعي (C_f) منحنيها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2- أ- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

ب- ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3- عيّن دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمرّ من المبدأ، يُطلب كتابة معادله.

5- بين أن: $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثمّ أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

6- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

7- مثل بيانيا المماس (T) ، ثمّ المنحنى (C_f) .

8- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

ونسَمي (Cf) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسّر ذلك هندسياً.
- 2- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$
- 3- ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 4- عيّن دون حساب كل من: $\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}$ و $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 5- بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم أوجد حصر ل $f(\alpha)$ سعته 10^{-1} .
- 6- تعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = e^x - xe^x - 1$
 - بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $h(x) \leq 0$
- 7- نضع من أجل كل x من \mathbb{R} : $p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$
 - تحقّق من أن: $p(0) = 0$
- 8- بين أن المنحنى (Cf) يقبل مماساً (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$
 - ب- اكتب معادلة للمماس (T).
- ج- ادرس وضعية المنحنى (Cf) بالنسبة للمستقيم (T)، ماذا استنتج بالنسبة ل (Cf)؟
- 9- نأخذ: $-1.195 \leq f(\beta) \leq 1$ ، مثل بياناً للمستقيم (T)، ثم المنحنى (Cf).
- 10- m وسيط حقيقي، ناقش بياناً حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$.

التمرين السادس

(1) تعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كالتالي: $g(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

- ونسَمي (Cg) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.
- 1- ادرس تغيرات الدالة g' .
 - 2- احسب $g'(1)$ ثم استنتج إشارة $g'(x)$ على \mathbb{R} .
 - 3- ادرس تغيرات الدالة g .
 - 4- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب لمقارب ل (Cg) بجوار $(-\infty)$.
ب- ادرس وضعية المنحنى (Cg) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) على \mathbb{R} .
 - 5- أ- بين أن المنحنى (Cg) يقبل مماساً (D) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها.
ب- اكتب معادلة المماس (D).
 - 6- بين أن المنحنى (Cg) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث: $1.9 < \alpha < 2$ و $-0.5 < \beta < -0.6$.
 - 6- أنشئ (Δ) ، (D) ثم المنحنى (Cg).
 - 3- تعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي الموجب تماماً m التالية: (E) $g(x) = 2x + \ln m$.
- ناقش بياناً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E).

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/BlkFbE-ti_I . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات .

التمرين السابع

تعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

ونسَمي (Cf) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$
- ب- استنتج أن الدالة f فردية.

2- احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- 3- أ- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ ، ثم ادرس إشارة $f'(x)$.
ب- ماذا استنتج بالنسبة ل (Cf)؟
ج- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 4- أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) \right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
ب- احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x \right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (Cf) والمستقيم ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
- 6- مثل بياناً (Cf).

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

<https://youtu.be/lSpzGlcRII0> . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات .

التمرين الثامن

تعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = -2e^{-2x} + e^{-x} + 1$$

ونسَمي (Cf) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
ب- بين أن: $f(x) = e^{-2x}(2e^x + e^x - 2)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{4 - e^x}{e^{2x}}$ ، ثم ادرس إشارة $f'(x)$.
- 3- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 4- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (Cf) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$.
- 5- حل في \mathbb{R} المعادلة: $f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 6- احسب $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ - النتيجة مدوّرة إلى 10^{-2} .
- 7- مثل بياناً (Cf) على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- 8- m وسيط حقيقي.

- ناقش بياناً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = m + 2$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

<https://youtu.be/fj5eqmiZ5hw> . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات .

التمرين الأول

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ كالتالي :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = y$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(+\infty)$.

3 - ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

4 - بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

5 - بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

6 - مثل بيانياً المنحنى (C_f) .

التمرين الثاني

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كالتالي : $g(x) = 1 + x^2 + \ln x$.

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $0.32 < \alpha < 0.33$.

3 - استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كالتالي : $f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$.

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 - بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 - بين أن : $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$ ، ثم عين حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

4 - احسب $[f(x) + x] \lim_{x \rightarrow +\infty}$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلته.

- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5 - أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها. اكتب معادلة المماس (T) .

6 - مثل بيانياً كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) . علماً أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاها x_0 و x_1 حيث

$0.2 < x_0 < 0.1$ و $1.5 < x_1 < 1.6$.

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كالتالي :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1}$$

ونسعي (C_h) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $h(x) = f(x+1) + 2$.

ب- بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$.

2- أ- بين أن المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه.

ب- مثل بيانياً المنحنى (C_h) .

3- m وسيط حقيقي غير معدوم.

دراسة دوال لوغاريتمية

التمرين الثالث

(T_m) مستقيم معادلته: $y = \ln(|m|x + 1)$.

أ- برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة وحيدة يُطلب تعيينها.

ب- ناقش بياناً حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $h(x) = \ln(|m|x + 1)$.

(I) تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} + x & ; x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\\ \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{2(\ln(x))^2} & ; x \in]0; +\infty[\\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

وُسَمِيَ (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$ ، فسر النتيجة هندسياً.

2- ادرس تغيرات الدالة f .

3- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) مقارباً ماثلاً بجوار $(-\infty)$ - يطلب تعيين معادلته.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $] -1; 0[\cup] 1; +\infty[$.

4- حل المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]0; +\infty[- \{1\}$ ، ماذا نستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

5- بين أن (C_f) يقطع حامل محور القواسم في نقطة وحيدة فاصلتها α على المجال $] -2; -\frac{3}{2}[$.

6- هل توجد مماسات لـ (C_f) تمر من مبدأ المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ؟ برر إجابتك.

7- مثل بياناً كل من المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

(II) تعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$.

وُسَمِيَ (C_h) منحنياً البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن الدالة h زوجية.

2- اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

3- مثل بياناً المنحنى (C_h) موضعا طريقة الإنشاء.

4- تعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي t التالية: (E) $h(x) = -(m^2 + a)$ حيث a عدد حقيقي.

- ناقش بياناً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E).

التمرين الرابع

(I) تعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كالتالي:

$$g(x) = (\ln x)^3 + 1$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- حل المعادلة $g(x) = 0$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) تعتبر الدالة f المعرفة على $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ كالتالي:

$$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$$

وُسَمِيَ (C_f) منحنياً البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ يكون: $f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$.

ج- استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2- تعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كالتالي: $h(x) = (\ln x)^2 + 1$.

وُسَمِيَ (C_h) منحنياً البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة h .

2- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ، فسر النتيجة هندسياً.

3- ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h).

3- بين أن (C_h) يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها.

4- اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

5- احسب $f(e)$ ، ماذا نستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

6- مثل بياناً المنحنيين (C_f) و (C_h) مع المستقيم (T) في نفس المعلم.

7- تعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m (\ln x)^3 + e^m (\ln x) - (\ln x) - 2e^m = 0 \dots \dots \dots (F)$$

- ناقش بياناً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (F).

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط:

<https://youtu.be/yUL31FE2UG4> . الأستاذ عبد الرحمن للرياضيات .

التمرين الخامس

(I) دالة معرفة على $\mathbb{R} - [-1; 1]$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$++$	0	$-$	$++$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$	0	0	0	$+\infty$

وُسَمِيَ (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1- علماً أن الدالة f فردية:

أ- عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب- بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ و $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$.

ج- أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.

2- نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

أ- مثل بياناً كل من المستقيم (d) والمنحنى (C_f). - نأخذ: $\sqrt{3} \simeq 1.7$ و $3 \simeq f(\sqrt{3})$.

3- نترض أن عبارة $f(x)$ هي من الشكل: $f(x) = ax + b + \ln\left(c + \frac{2}{x-1}\right)$ حيث: a, b, c أعداد حقيقية.

أ- باستعمال نتائج الجدول أعلاه بين أن: $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$.

4- ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0$.

(II) تعتبر الدالة g المعرفة على $]1; +\infty[$ كالتالي: $g(x) = \ln(f(x))$.

1- ادرس تغيرات الدالة g .

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$$

- 1- أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن: $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$.
- ب- بين أن الدالة g متزايدة على المجال $]1; +\infty[$.
- 2- استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$: $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ (لاحظ أن: $0 \leq 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$).
- 3- أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$ فإن: $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$. ثم استنتج النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط:

<https://www.youtube.com/watch?v=PBtTbFpwiMI&t=4s> . الأستاذ عبد الرحمن للرياضيات .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln x + x - 3$.

- 1- ادرس تغيرات الدالة g .
- 2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا واحدًا α حيث: $2.21 < \alpha < 2.2$.
- 3- عين إشارة $g(x)$ على المجال: $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln x - 2)$$

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2- أ- احسب: $f'(x)$ ، ثم ادرس إشارتها.
- ب- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 3- عين دون حساب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيًا.
- 4- بين أن: $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.
- 5- حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيًا.
- 6- بأخذ: $f(\alpha) \simeq -0.66$ مثل بيانًا للمنحنى (C_f) على المجال $]0; 10[$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط:

<https://www.youtube.com/watch?v=9e3zBhsbJnU> . الأستاذ عبد الرحمن للرياضيات .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

- 1- ادرس تغيرات الدالة g .
- 2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا واحدًا α في المجال: $]0; +\infty[$.
- ب- تحقق من أن: $1.32 < \alpha < 1.31$.
- 3- عين إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
- 4- برهن أن: $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كيلي:

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 2- بين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
- 3- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 4- بين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$.
- 5- استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(III) نسعي (Γ) التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = \ln x$.

- النقطة A ذات الإحداثيات $(0; 2)$.
- نقطة M من المنحنى (Γ) فاصلتها x .

1- بين أن المسافة AM تعطى بـ: $AM = \sqrt{f(x)}$.

2- نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

- أ- برهن أن للدالتين f و k نفس إجهاد التغير على المجال $]0; +\infty[$.
- ب- برهن أن المسافة AM أصغر في نقطة P من (Γ) ، يُطلب تعيين إحداثياتها.
- ج- برهن أن: $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
- 3- هل المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P ؟ برّر إجابتك.

الحل

I.

1. **لكم دراسة تغيرات الدالة g**

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2 + \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 + \ln x) = +\infty$$

المشتقة: الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كيلي:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

إشارة المشتقة وإجهاد التغير

إن $g'(x) > 0$ على المجال $]0; +\infty[$ وبالتالي الدالة g متزايدة تمامًا على المجال $]0; +\infty[$.
جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. **لكم تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا واحدًا α في المجال: $]0; +\infty[$**

لدينا من جدول التغيرات الدالة g مستمرة ومتزايدة تمامًا على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا: $0 < \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ومنه حسب مبرهنة

القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا واحدًا α في المجال: $]0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4 **لنثبت** تبين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$

لدينا:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2 \dots \dots (1)$$

ومما سبق وجدنا:

$$\ln \alpha = 2 - \alpha^2 \dots \dots (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - (2 - \alpha^2))^2$$

يكافئ:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$$

5 **لنثبت** استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

من جدول تغيرات الدالة f لدينا:

x	0	$+\infty$
$f(x)$		+

III

1 **لنثبت** تبين أن المسافة AM تعطى بـ $AM = \sqrt{f(x)}$ على المجال $]0; +\infty[$

لدينا: M نقطة من (Γ) معناه إحداثياتها هما: $(x; \ln x)$ ومنه المسافة تعطى بما يلي:

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (-2 - \ln x)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2} \\ &= \sqrt{f(x)} \end{aligned}$$

2 **لنثبت** أ- برهان أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$

هنا نستعمل اتجاه تغير مركب دالتين -عد لدروس السنة الثانية ستجد هذا بالترتيب-

$$u(x) = \sqrt{x};]0; +\infty[$$

لاحظ أن: $f = u \circ k$.

نعلم أن الدالة u متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ والدالة f موجبة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وبالتالي فإن k و f نفس اتجاه التغير.

ملاحظة: يمكنك اشتقاق الدالة k لتجد أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ وتقوم بدراسة إشارتها ومن ثم اتجاه التغير.

لنثبت التحقق من أن: $1.31 < \alpha < 1.32$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ و $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) = 0.02$. إذن $1.31 < \alpha < 1.32$.

3 **لنثبت** تعيين إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

4 **لنثبت** برهان أن: $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ يكافئ:

$$\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$$

يكافئ:

$$\ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

II

1 **لنثبت** حساب: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (2 - \ln x)^2) = +\infty$$

لأن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (2 - \ln x)^2) = +\infty$$

لأن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2 **لنثبت** تبين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كالتالي:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2 \left(-\frac{1}{x}\right) (2 - \ln x) \\ &= 2x - \frac{2}{x} (2 - \ln x) \\ &= \frac{2x^2 - 4 + 2 \ln x}{x} \\ &= \frac{2(x^2 - 2 + \ln x)}{x} \\ &= \frac{2}{x} g(x) \end{aligned}$$

بأن: $0 < \frac{2}{x}$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

3 **لنثبت** تشكيل جدول تغيرات الدالة f

3 - برهان أن المسافة AM أصغر في نقطة P من (Γ)، يُطلب تعيين إحداثياتها

بما أن لـ f و k نفس اتجاه التغير على المجال]0; +∞[فإن: الدالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي x = α وبالتالي المسافة أصغر لما x = α إذن:

$$P(\alpha; \ln \alpha)$$

يكافئ:

$$P(\alpha; 2 - \alpha^2)$$

الحل ج - برهن أن: $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$

لدينا مايلي:

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} \\ &= \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{1 + \alpha^2} \\ &= |\alpha|\sqrt{1 + \alpha^2} \\ &= \alpha\sqrt{1 + \alpha^2} \end{aligned}$$

3 - الحل هـ هل المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P؟ برّر إجابتك.

لدينا أولاً يجب المماس لـ (Γ) في النقطة P هو:

$$h'(\alpha) = \ln'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AP) هو:

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} \\ &= \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha - 0} \\ &= \frac{-\alpha^2}{\alpha} \\ &= -\alpha \end{aligned}$$

تذكر أنه: يتعامد مستقيمان إذا كان جداً ميلهما يساوي -1.

لدينا: $-1 = -\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -1$ وبالتالي المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P.

التمرين التاسع

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كإيلي: $g(x) = xe^x - x + 1$

- 1 - ادرس تغيرات الدالة g'.
- 2 - احسب $g'(0)$ ثم استنتج إشارة $g'(x)$ على \mathbb{R} .
- 3 - بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $g(x) - 1 \geq 0$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كإيلي: $f(x) = \ln(xe^x - x + 1)$

- ونسعي (Cf) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 1 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 - 2 - بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
 - 3 - شكّل جدول تغيرات الدالة f.
 - 4 - احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \ln(-x))$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
 - 5 - احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (Cf)؟
 - 6 - نعتبر الدالة u المعرفة على \mathbb{R} كإيلي: $u(x) = e^x + x - 2$

أ - بين أن المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0 < \alpha < 1$ ، ثم عيّن حصرًا لـ α سعته 10^{-1} .

ب - استنتج إشارة $u(x)$ على \mathbb{R} .

7 - ادرس وضعية المنحنى (Cf) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

8 - أ - بين أن المنحنى (Cf) يقبل مماساً (δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها.

ب - برّر لماذا المستقيمان (δ) و (Δ) متوازيان.

ج - أوجد حصرًا للعدد $f(\alpha) - \alpha$ (تُدور النتائج إلى 10^{-2}).

د - اكتب معادلة المماس (δ).

هـ - احسب $f(1)$ و $f(-2)$.

9 - اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (Cf) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

10 - مثل بيانياً كل من المستقيمين (Δ) و (T)، منحنى الدالة $\ln(-x)$ والمنحنى (Cf).

11 - ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي a عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = (2 - e^{-1})x + a$

11 - ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي l عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = x + l$

12 - (T_n) مستقيم ذو المعادلة $(e^n - e^{n-1})x - (e^n - e^{n-1})$ و $y = (2e^n - e^{n-1})x - (e^n - e^{n-1})$

أ - برهن أن جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثياتها.

ب - ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(x) = (2e^n - e^{n-1})x - (e^n - e^{n-1})$$

(III) الدالة المعرفة على \mathbb{R} كإيلي:

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{xe^{x-1} - xe^{-1} + e^{-1}}\right)$$

ونسعي (Ch) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 - بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} فإن: $h(x) = -f(x) + 1$

2 - أ - بين أن المنحنى (Ch) هو صورة المنحنى (Cf) بتركيب تحويلين نقطيين إسطين يُطلب تعيينهما.

ب - مثل بيانياً المنحنى (Ch).

3 - نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m التالية: $(E) : (e^x - 1) - m = 0$ حيث $x \neq -1$ و m.

- باستعمال المنحنى (Ch). ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E).

(IV) نعتبر الدالة k المعرفة على \mathbb{R} بـ: $k(x) = h(2x - 2) + f(\alpha)$ - عبارة $k(x)$ غير مطلوبة -

1 - ادرس تغيرات الدالة k.

2 - تحقق من أن $k\left(\frac{\alpha + 2}{2}\right) = 1$ ، ثم بين أن: $k\left(\frac{\alpha + 2}{2}\right) = -2f'(\alpha)$

3 - استنتج معادلة المماس (D) لمنحنى الدالة k عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha + 2}{2}$.

4 - تحقق من أن: $3 + 2x + \alpha = -2x + \alpha + 3$ معادلة للمستقيم (D).

5 - احسب $k(-1)$

(V) الدالة المعرفة على \mathbb{R} كإيلي:

$$p(x) = f(|x|)$$

ونسعي (Cp) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 - أ - احسب: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x^2}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة p؟

ب - فسّر النتيجة هندسياً.

2 - أ - من أجل كل x عدد حقيقي، احسب $p(x) - p(-x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة p؟

ب - فسّر النتيجة هندسياً.

3 - اكتب $p(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

4 - باستعمال المنحنى (Cf)، مثل بيانياً المنحنى (Cp) مبيناً طريقة الإنشاء.

(VI) نعتبر الدالة q المعرفة على المجال $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ كإيلي:

$$q(x) = k(\tan x)$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g''(x)$		$-$	$+$
$g'(x)$	-1	$-1 - e^{-2}$	$+\infty$

2 **الحل** حساب $g'(0)$ ثم استنتاج إشارة $g'(x)$ على \mathbb{R}

لدينا : $g'(0) = e^0 + (0)e^0 - 1 = 0$ ومنه من جدول التغيرات تكون إشارة $g'(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$

3 **الحل** تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} : g(x) - 1 \geq 0$

حساب نهايات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(e^x - 1) + 1) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة g لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R} : g(x) \geq 1$ ومنه $g(x) - 1 \geq 0$.

الجزء الثاني

1 **الحل** حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(xe^x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x(e^x - 1) + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(xe^x - x + 1) = +\infty$$

2 **الحل** تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} : f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{e^x + xe^x - 1}{xe^x - x + 1} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

3 **الحل** تشكيل جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ لأنه من أجل كل x من \mathbb{R} فإن $g(x) > 0$ ومنه جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي :

ونسعي (C_q) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} q(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} q(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً .

2 - أ - ادرس بطريقتين مختلفتين اتجاه تغير الدالة q .

ب - شكّل جدول تغيراتها .

3 - حل في المجال $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ المعادلة : $\tan x = -1$.

4 - اكتب معادلة المماس (L) للمحني (C_q) في النقطة ذات الترتيب $f(a) + f(-4) - 1$.

الحل

الجزء الأول

1 **الحل** دراسة تغيرات الدالة g'

حساب المستقة الأولى g'

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة معرفة بـ : $g'(x) = e^x + xe^x - 1$.

حساب نهايات الدالة g'

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + xe^x - 1) = -1$$

لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + xe^x - 1) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$.

حساب المستقة الثانية g''

الدالة g' معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة معرفة بـ :

$$g''(x) = e^x + e^x + xe^x = e^x(x+2)$$

جدول إشارة $g''(x)$

إشارة $g''(x)$ من إشارة $x+2$ لأن $e^x > 0$ ومنه إشارة $g''(x)$ تكون كالتالي :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g''(x)$		$-$	$+$

إتجاه تغير الدالة g'

- لـ $x \in]-\infty; -2]$ لدينا $g''(x) \leq 0$ ومنه الدالة g' متناقصة .

- لـ $x \in]-2; +\infty[$ لدينا $g''(x) \geq 0$ ومنه الدالة g' متزايدة .

جدول تغيرات الدالة g'

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$u(x)$	-2	-0.79	-0.57	-0.35	-0.10	0.14

إذن : $0.4 < \alpha < 0.5$

لحساب استنتاج إشارة $u(x)$ على \mathbb{R}

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

7 **لحساب دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$**

لدينا : $f(x) - x = \ln(xe^x - x + 1) - x$

نضع : من أجل كل x من \mathbb{R} : $s(x) = \ln(xe^x - x + 1) - x$

لدينا : $s(\alpha) = f(\alpha) - \alpha$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = +\infty$

الذالة s معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة معرفة بـ :

$$s'(x) = f'(x) - 1 = \frac{g'(x)}{g(x)} - 1 = \frac{g'(x) - g(x)}{g(x)} = \frac{e^x + xe^x - 1 - xe^x + x - 1}{xe^x - x + 1} = \frac{e^x + x - 2}{xe^x - x + 1} = \frac{u(x)}{g(x)}$$

إشارة $s'(x)$ من إشارة $u(x)$ لأن $g(x) > 0$: ولديه جدول تغيرات الذالة s يكون كالتالي :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$s'(x)$	-	0	+
$s(x)$	$+\infty$	$s(\alpha)$	$+\infty$

لدينا كما سبق : $f(1) = 1$: يكافئ : $f(1) - 1 = 0$: يكافئ : $s(1) = 0$ وكذلك : $g(0) = 1$: يكافئ : $\ln g(0) = \ln 1$: يكافئ : $s(0) = 0$ ومنه : $f(0) - 0 = 0$

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) تلخص في الدول التالي :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$s(x) = f(x) - x$	+	0	-	+
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

- $(C_f) \cap (\Delta) = \{O(0;0)\}$
- $(C_f) \cap (\Delta) = \{M(1;1)\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

4 **لحساب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \ln(-x))$ ثم تفسير النتيجة هندسيا**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \ln(-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(xe^x - x + 1) - \ln(-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{xe^x - x + 1}{-x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(-e^x + 1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) والمنحنى الذالة $\ln(-x)$ متقاربان في جوار $(-\infty)$

5 **لحساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ والاستنتاج بالنسبة للمنحنى (C_f)**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(xe^x - x + 1) - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(xe^x \left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right)\right) - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(xe^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x) + \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x) + x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = x$

6 **لحساب تبين أن المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0 < \alpha < 1$**

الذالة u معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة هي : $u'(x) = e^x + 1$ ولدينا من أجل كل x من \mathbb{R} : $u'(x) > 0$ وكذلك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x - 2) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x - 2) = -\infty$

جدول تغيرات الذالة u

x	$-\infty$	$+\infty$
$u'(x)$		+
$u(x)$	$-\infty$	$+\infty$

لدينا : $u(1) = e - 1$ و $u(0) = -2$

الذالة u مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]0;1[$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً حيث $0 < \alpha < 1$

لحساب تعيين حصر α سعته 10^{-1}

- لآ $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) = 0$ أي $\frac{e}{|m+1|} = e^0$ يكافئ: $|m+1| = e$ أي $m = e-1$ أو $m = -e-1$ المعادلة (E) تقبل حلين هما $x = 1$ و $x = -2$.

- لآ $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) < 1$ أي $\frac{e}{|m+1|} < e$ يكافئ: $|m+1| > 1$ أي $m > 0$ أو $m < -2$ المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

- لآ $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) = 1$ أي $\frac{e}{|m+1|} = e$ يكافئ: $|m+1| = 1$ أي $m = 0$ أو $m = -2$ المعادلة (E) تقبل حلًا مضاعفًا هو $x = 0$.

- لآ $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) > 1$ أي $\frac{e}{|m+1|} > e$ يكافئ: $|m+1| < 1$ أي $m > -1$ أو $m < -3$ المعادلة (E) لا تقبل حلولًا.

الجزء الرابع

1 ادرس تغيّرات الدالة k

التهيّات

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-2) = -\infty$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-2) = +\infty$

المشتقة

الدالة k معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة هي:

$$k'(x) = 2h'(2x-2) = 2(-f'(2x-2)) = -2f'(2x-2)$$

إشارة المشتقة

- لآ: $0 \in]-\infty; 0]$ أي $x \in]-\infty; 1]$ يكون $k'(x) \geq 0$ ومنه الدالة k متزايدة.
- لآ: $0 \in [0; +\infty[$ أي $x \in [1; +\infty[$ يكون $k'(x) \leq 0$ ومنه الدالة k متناقصة.

جدول التغيّرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$k'(x)$		$+$	$-$
$k(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

2 اتحقق من أنّ $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = 1$ ثمّ بين أنّ: $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'(\alpha)$

- $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) + f(\alpha) = h\left(2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) - 2\right) + f(\alpha) = h(\alpha+2-2) + f(\alpha) = h(\alpha) = 1 - f(\alpha) + f(\alpha) = 1$
- $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'\left(2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) - 2\right) = -2f'(\alpha+2-2) = -2f'(\alpha)$

3 اكتب استنتاج معادلة المماس (D) لمنحني الدالة k عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{2}$

$$y_D = k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) \left(x - \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\right) + k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'(\alpha) \left(x - \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\right) + 1 = f'(\alpha) (\alpha+2-2x) + 1$$

- لآ $e^n < \frac{1}{2-e^{-1}}$ أي $0 \in]-\infty; \ln\left(\frac{1}{2-e^{-1}}\right)[$ المعادلة لا تقبل حلولًا.

- لآ $e^n < 1$ أي $0 \in \left[\ln\left(\frac{1}{2-e^{-1}}\right); 0\right[$ المعادلة تقبل حلًا واحدًا موجبًا.

- لآ $e^n = 1$ أي $n = 0$ المعادلة تقبل حلًا مضاعفًا هو $x = 1$.

- لآ $e^n > 1$ أي $n \in]0; +\infty[$ المعادلة تقبل حلًا واحدًا موجبًا.

الجزء الثالث

1 اكتب معادلة المماس لـ $h(x) = -f(x) + 1$ في \mathbb{R} فإنّ:

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{xe^{x-1} - xe^{-1} + e^{-1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-1}(xe^x - x + 1)}\right) = \ln\left(\frac{e}{xe^x - x + 1}\right) = \ln(e) - \ln(xe^x - x + 1) = -f(x) + 1$$

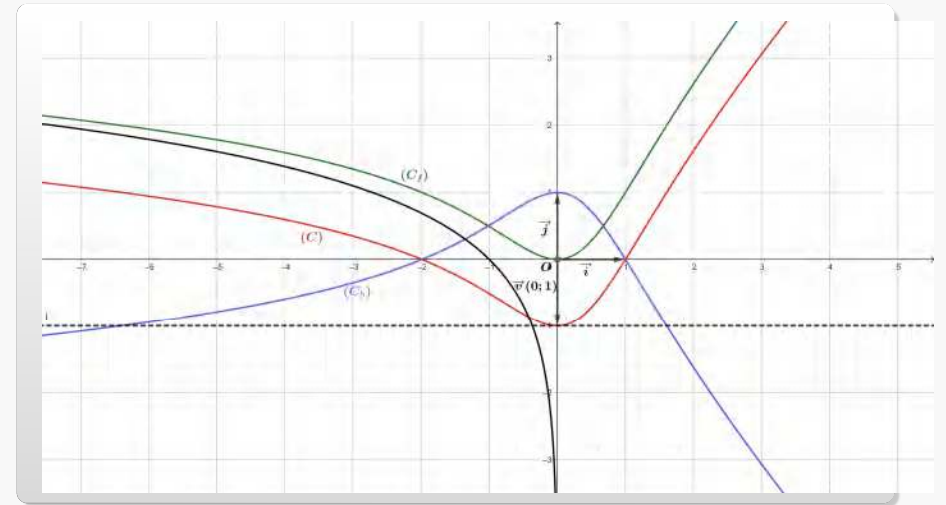
2 اكتب معادلة المماس لـ المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتركيب تحويلين تقطعيين بسطيين يطلب تعيينهما

لدينا: $h(x) = -f(x) + 1 = -(f(x) - 1)$ ومنه:

- منحني الدالة $1 - f(x)$ هو صورة المنحني (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{v}(0; -1)$.
- ومنحني الدالة $-(f(x) - 1)$ هو نظير منحني الدالة $f(x) - 1$ بالنسبة لمحور الترتيب.

اكتب معادلة المنحني (C_h)

نسمي منحني الدالة $1 - f(x)$ في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{0}; \vec{i}; \vec{j})$.



إشياء المنحني (C_h)

3 اكتب المناقشة البيانية حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E)

من أجل $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$ لدينا: $x(e^x - 1) - m = 0$ يكافئ: $xe^x - x = m$ يكافئ: $xe^x - x + 1 = m + 1$

يكافئ: $\ln(xe^x - x + 1) = \ln|m+1|$ يكافئ: $-\ln(xe^x - x + 1) = -\ln|m+1|$ يكافئ: $-f(x) + 1 = -\ln|m+1|$

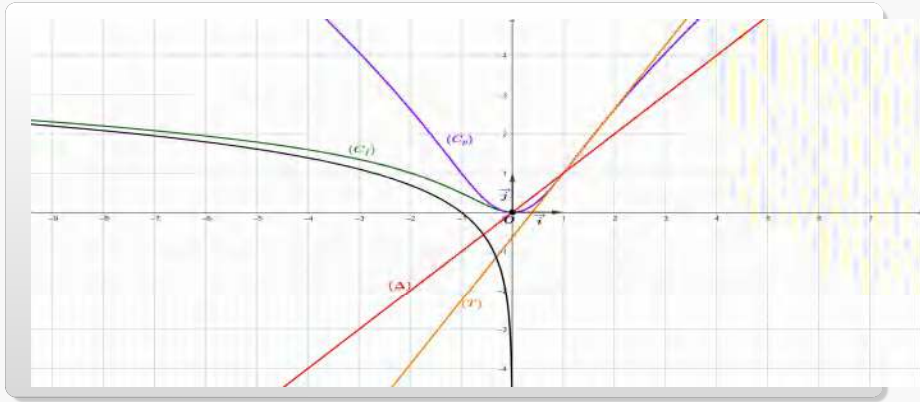
يكافئ: $h(x) = \ln\left(\frac{1}{|m+1|}\right)$ يكافئ: $h(x) = \ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right)$

حلول المعادلة (E) بيانها هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_h) مع المستقيم ذو المعادلة: $y = \ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right)$

- لآ $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) < 0$ أي $e^0 < \frac{e}{|m+1|}$ يكافئ: $\frac{|m+1|}{e} > 1$ يكافئ: $|m+1| > e$ أي $m > e-1$ أو $m < -e-1$

- لآ $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) = 0$ أي $e^0 = \frac{e}{|m+1|}$ يكافئ: $|m+1| = e$ أي $m = e-1$ أو $m = -e-1$

- لآ $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) > 0$ أي $e^0 > \frac{e}{|m+1|}$ يكافئ: $|m+1| < e$ أي $m \in]-e-1; e-1[$



إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدالة $x \mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (Cp)

الجزء السادس

1 **حساب $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} q(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} q(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا**
 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ تذكر أن :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} k(x) = -\infty$ لأن : $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ و $\cos(x) = 0^+$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} q(x) = -\infty$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} k(x) = -\infty$ لأن : $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ و $\cos(x) = 0^-$ ومنه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} q(x) = -\infty$$

التفسير الهندسي

- معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (Cq) $x = -\frac{\pi}{2}$
- معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (Cq) $x = \frac{\pi}{2}$

2 **دراسة بطريقتين مختلفتين اتجاه تغير الدالة q**

الطريقة 1 هنا نستعمل فقط مشتقة الدالة k وإشارتها .

$$q'(x) = \tan' x \cdot k'(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot k'(\tan x)$$
 ودالتها المشتقة هي : $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$

لدينا : $\tan x = 1$ أي : $k'(\tan x) = 1$ يكافئ : $\sin x = \cos x$ يكافئ : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبما

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ فإن : } x = \frac{\pi}{4}$$

- لما $\tan x \in]-\infty; 1]$ أي : $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ لدينا : $k'(\tan x) \geq 0$ معناه : $q'(x) \geq 0$ ومنه الدالة q متزايدة .

- لما $\tan x \in [1; +\infty[$ أي : $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ لدينا : $k'(\tan x) \leq 0$ معناه : $q'(x) \leq 0$ ومنه الدالة q متناقصة .

الطريقة 2 هنا نستعمل إجهاد تغير دالة مركبة .

لدينا : $q = k \circ v$ حيث v دالة معرفة كالتالي : $v : x \mapsto \tan x$

- الدالة k متزايدة على المجال $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 1]$ لما $\tan x \leq 1$ و $\tan x \geq 1$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ والدالة tan متزايدة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

(لأن $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$) ومنه الدالة q متزايدة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

- الدالة k متناقصة على المجال $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 1]$ لما $\tan x \geq 1$ و $\tan x \leq 1$ على المجال $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ والدالة tan متزايدة على المجال $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

(لأن $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$) ومنه الدالة q متناقصة على المجال $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

4 **التحقق من أن : $y = -2x + \alpha + 3$ معادلة للمستقيم (D)**

$$y = f'(\alpha)(\alpha + 2 - 2x) + 1 = \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}(\alpha + 2 - 2x) + 1 = \frac{e^\alpha + \alpha e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha - \alpha - 1}(\alpha + 2 - 2x) + 1$$

$$= \frac{2 - \alpha + \alpha(2 - \alpha) - 1}{\alpha(2 - \alpha) - \alpha - 1}(\alpha + 2 - 2x) + 1 = \frac{-\alpha^2 + \alpha - 1}{-\alpha^2 - \alpha - 1}(\alpha + 2 - 2x) + 1 = -2x + \alpha + 3$$

5 **حساب $k(-1)$**

$$k(-1) = h(2(-1) - 2) + f(\alpha) = h(-4) + f(\alpha) = 1 - f(-4) + f(\alpha)$$

الجزء الخامس

1 **حساب : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x}$ ، والاستنتاج بالنسبة للدالة p**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(|x|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(xe^x - x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x(e^x - 1) + 1)}{x(e^x - 1)} \cdot (e^x - 1) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(|x|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(-xe^{-x} + x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x(-e^{-x} + 1) + 1)}{x(-e^{-x} + 1)} \cdot (-e^{-x} + 1) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} x(e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} x(-e^{-x} + 1) = 0 \text{ لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} x(e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} x(-e^{-x} + 1) = 0 \text{ لأن :}$$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x} = 0$ نستنتج أن الدالة p قابلة للاشتقاق في الصفر .

التفسير النتيجة هندسيا

نفسر النتيجة السابقة هندسيا بأن المنحنى (Cp) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته هي : $y = f(0) = 0$

حساب $p(x) - p(-x)$ ، والاستنتاج بالنسبة للدالة p

من أجل كل x و -x ينتميان إلى IR لدينا : $p(x) - p(-x) = f(|x|) - f(|-x|) = f(|x|) - f(|x|) = 0$

التفسير النتيجة هندسيا

نفسر النتيجة السابقة هندسيا بأن المنحنى (Cp) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) محور تناظر .

2 **كتابة p(x) دون رمز القيمة المطلقة**

$$p(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x); x \geq 0 \\ f(-x); x \leq 0 \end{cases}$$

3 **حساب استعمال المنحنى (Cf) ، إنشاء المنحنى (Cp) مبينا طريقة الإنشاء**

لما $x \geq 0$ ينطبق على (Cf) . لما $x \leq 0$ نظير (Cf) بالنسبة لمحور الترتيب .

لدينا : $q\left(\frac{\pi}{4}\right) = k\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = k(1) = f(\alpha)$ ومنه :

جدول التغيرات

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$q'(x)$		+	0
$q(x)$			

$f(\alpha)$

$-\infty$ $-\infty$ $-\infty$

3 [حل في المجال] $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$] المعادلة : $\tan x = -1$

لدينا : $\tan x = -1$ يكافئ : $-\sin x = \cos x$ يكافئ : $-\cos(\pi + x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ يكافئ : $\frac{\pi}{2} - x = \pi + x + 2k\pi$.
حيث : $k \in \mathbb{Z}$ أي : $x = -\frac{\pi}{4} - k\pi$ ومنه حل المعادلة $\tan x = -1$ في المجال $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$ هو $x = -\frac{\pi}{4}$.

4 [كتابة معادلة المماس (L)]

نفرض أن (L) مماس لـ (C_q) في النقطة $(x_2; 1 - f(-4) + f(\alpha))$ وكذلك : $\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.
يكون $q(x_2) = 1 - f(-4) + f(\alpha)$ يكافئ : $k(\tan x_2) = 1 - f(-4) + f(\alpha)$ يكافئ : $\tan x_2 = -1$ إذن $x_2 = -\frac{\pi}{4}$ ومنه :
$$y_L = q'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + q\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 - f(-4) + f(\alpha) = 2x + \frac{\pi}{4} + 1 - f(-4) + f(\alpha)$$

بالتوفيق والنجاح إن شاء الله في البكالوريا

قال الإمام عبد الحميد ابن باديس رحمه الله تعالى :
انحض لي العلم في جمد بلا كسل *** نخوض عبدي الى الخيرات بيتدر
واصبر على نيله صبر الجيد له *** فليس يدركه من ليس يصطبر
يكفيك بالعلم فضلا أن صاحبته *** بالعز نال العلاء والشير ينتظر
وأتم له رجلا فرذا محاسنه *** بلزوم العزم هان الضعيف والعيسر