تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

شعبة : رياضيات

التمرين [1] [باك 2008] [م1] [ن6]

لتكن f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و فسر النتيجة هندسيا.

- أدرس تغيّرات الدالة f .
- باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" أنشئ (C_f) .
- أرسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته : $y=x$.

2) نعرّف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

أ- باستعمال (D) و (C_f) مثل u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل .

ب- ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2\le u_0\le5$ و $u_{n+1}>u_n$.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة . أحسب $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

التمرين [2] [باك 2008] [م2] [ن4]

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+1$.

1) أحسب u_0 ، u_1 و u_2 .

2) (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

- برهن بالتراجع أن (v_n) ثابتة.
- إستنتج عبارة u_n بدلالة n .
- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{2}{3}n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

أحسب المجموع : $S_n=w_0+w_1+w_2+.....+w_n$.

التمرين [3] [باك 2009] [م1] [ن6]

1) نعرف الدالة f على المجال $[1;5]$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{5}{x}\right)$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $3cm$)

أ- أدرس تغيّرات الدالة f .

ب- أنشئ (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$ في نفس المعلم.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=5$ و بالعبارة : $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{5}{u_n}\right)$.

أ- أحسب u_1 و u_2 .

بـ-أ-باستعمال (Δ) و (C_f) مثل u_0، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل .

3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq \sqrt{5}$.

بـ- بيّن أن (u_n) متناقصة تماما، ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها ؟

4) أ- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n ، $\left(u_{n+1}-\sqrt{5}\right) \leq \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$.

بـ- إستنتج أن : $(u_n-\sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0-\sqrt{5})$. ما هي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين [4] [باك 2009] [م2] [ن4]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n+2n+1$.

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان .

1) عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدها الأول .

2) أحسب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

3) أحسب المجموعين S_n و S'_n بحيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$.

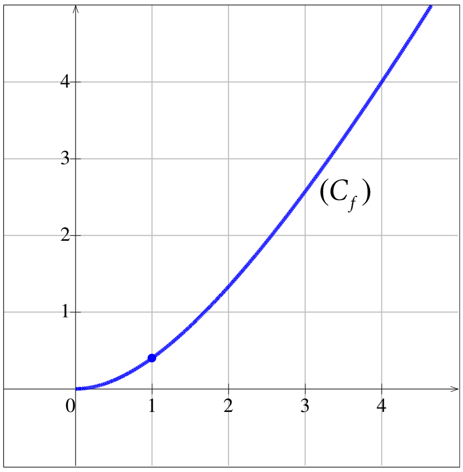
التمرين [5] [باك 2014] [م2] [ن4,5]

الدالة العددية f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\frac{2x^2}{x+4}$ و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (أنظرالشكل).

1) بيّن ان الدالة f متزايدة تماما.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=3$ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

و (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$.



أ- باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل، على حامل محور الفواصل، الحدود: u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 دون حسابها.

بـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3$.

بـ- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة .

جـ- استنتج أن (u_n) متقاربة .

4) أ- أدرس إشارة العدد $7u_{n+1}-6u_n$ و استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$.

بـ- برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

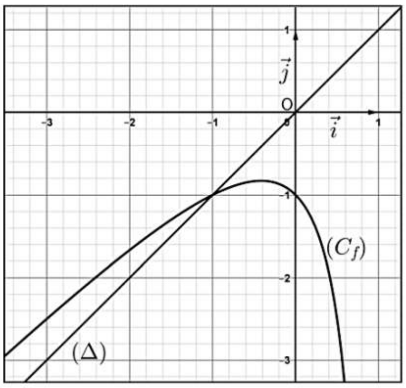
جـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين [6] [باك 2018] [م1] [ن4]

f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=-3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (الشكل)



1) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، أعط تخمين حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \le u_n \le -1$.

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+1 \ge \frac{3}{4}(u_n+1)$.

بـ- إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n+1 \ge -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

3) نضع : $S_n = u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \le (u_0+1)+(u_1+1)+.....+(u_n+1) < 0$. و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين [7] [باك 2020] [م1] [ن4]

الدالة العددية f معرفة على المجال $[1;4]$ بـ : $f(x) = \frac{4x+4}{9-x}$.

1) أ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[1;4]$.

بـ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;4]$ فإن : $f(x) \in [1;4]$.

2) المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 بحيث : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 4$.

بـ- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة .

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-4}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0 .

بـ- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) المجموع S_n معرّف بـ : $S_n = v_0+8v_1+8^2v_2+...+8^n v_n$. أحسب S_n بدلالة n .

التمرين [8] [باك 2020] [م2] [ن5]

المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \end{cases}$$

المتتالية العددية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = v_n - u_n$.

1) أ- أحسب w_0 ثم أحسب w_1 بدلالة α .

بـ- بيّن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha-1)$.

جـ- أكتب عبارة w_n بدلالة n و α ، ثم عيّن قيم α حتى تكون $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

نفرض في كل ما يلي : $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$.

2) أ- أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما وأن (v_n) متناقصة تماما .

بـ- استنتج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ .

جـ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n+v_n = 2$ و استنتج قيمة ℓ .

3) أحسب بدلالة α المجموع S بحيث : $S = u_0+u_1+u_2+...+u_{2020}$.

❝ The only way to learn mathematics is to do mathematics ❞

كتابة : خالد بخاخشة

نشر يوم 2021/01/29