

مسألة 1:

(I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $g(x) = x^3 - 3x - 3$

- (1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.
- (2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 3$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها.
- (2) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ فان : $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.
- (3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (4) بين ان $f(\alpha) = 3\alpha + 1$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.
- (5) ا بين ان المستقيم (d) الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .
- (6) اوجد فواصل النقط من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) .
- (7) ارسم المستقيمات المقاربة والمنحني (C_f) .

الحل:

$$g(x) = x^3 - 3x - 3 \quad (I)$$

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$D_g =]-\infty; +\infty[\quad \text{* النهايات:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

* اتجاه التغير:

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1) \quad \text{ومنه } g'(x) = 0 \text{ معناه } x = -1 \text{ او } x = 1 \text{ و}$$

$$g(x) > 0 \text{ معناه } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\text{ وأيضا } g'(x) < 0 \text{ معناه } x \in]-1; 1[.$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

(2) اثبات ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 3$:

الدالة g مستمرة على المجال $]2;3[$ و $g(2)=-1$ و $g(3)=15$ أي $g(2) \times g(3) < 0$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج ان للمعادلة $g(x)=0$ على الأقل حل في المجال $]2;3[$ ومن خلال جدول التغيرات ينتج ان الدالة g متزايدة تماما على المجال $]2;3[$ اذن فللمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا في المجال $]2;3[$.

(3) استنتاج إشارة $g(x)$: من خلال جدول التغيرات نلاحظ ان المنحني يقع تحت محور

الفواصل لما $x \in]-\infty; \alpha[$ ومنه نستنتج ان $g(x) < 0$ معناه $x \in]-\infty; \alpha[$ وكذلك

المنحني يقع فوق محور الفواصل لما $x \in]\alpha; +\infty[$ أي $g(x) > 0$ معناه $x \in]\alpha; +\infty[$.

$$(II) \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} - \{-1;1\} \text{ بـ } f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} .$$

(1) حساب النهايات: $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

$$, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad , \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad , \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

(2) اثبات انه من اجل كل $x \in D_f$ فان $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(2x^3 + x^2 + 2)'(x^2 - 1) - (2x^3 + x^2 + 2)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{(6x^2 + 2x)(x^2 - 1) - (2x^3 + x^2 + 2) \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 + 2x^3 - 2x - 4x^4 - 2x^3 - 4x}{(x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^3 - 3x - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لنا $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ أي ان إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $xg(x)$:

جدول الإشارة:

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$			
x	-		-	0	+		+	+	
$g(x)$	-		-	-		-	0	+	
$f'(x) = xg(x)$	+		+	0	-		-	0	+

من خلال هذا الجدول نستنتج ان الدالة f متزايدة تماما على المجموعة $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; \alpha[$ ومتناقصة تماما على المجموعة $]0; 1[\cup]1; \alpha[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	-2	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	

(4) اثبات ان $f(\alpha) = 3\alpha + 1$ وتعيين حصر لـ $f(\alpha)$:

$$\text{لنا } f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + \alpha^2 + 2}{\alpha^2 - 1}$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha) - 3\alpha - 1 &= \frac{2\alpha^3 + \alpha^2 + 2}{\alpha^2 - 1} - 3\alpha - 1 \\
&= \frac{2\alpha^3 + \alpha^2 + 2 - 3\alpha^3 + 3\alpha - \alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{-\alpha^3 + 3\alpha + 3}{\alpha^2 - 1} \\
&= -\frac{\alpha^3 - 3\alpha - 3}{\alpha^2 - 1} = -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 - 1} = 0
\end{aligned}$$

$$g(\alpha) = 0 \text{ لأن}$$

اذن نجد $f(\alpha) - 3\alpha - 1 = 0$ ومنه $f(\alpha) = 3\alpha + 1$.

تعيين الحصر: لنا $2 < \alpha < 3$ ومنه $6 < 3\alpha < 9$ ومنه $7 < 3\alpha + 1 < 10$ أي $7 < f(\alpha) < 10$.

(5) أ) اثبات ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} - 2x - 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x^3 + x^2 + 2 - 2x^3 + 2x - x^2 + 1}{x^2 - 1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x + 3}{x^2 - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\pm\infty} = 0
\end{aligned}$$

وعليه نستنتج ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار كل من $+\infty$ و $-\infty$.

ب) دراسة الوضعية النسبية بين (d) و (C_f) :

لمعرفة الوضعية النسبية بين (d) و (C_f) ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$$

جدول إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$:

x	$-\infty$	-1,5	-1	1	$+\infty$
$2x + 3$	-	0	+	+	+
$x^2 - 1$	+	+	0	-	+
$\frac{2x + 3}{x^2 - 1}$	-	0	+	-	+

من خلال الجدول نستنتج ان المنحني (C_f) يقع فوق (d) لما $x \in]-\frac{3}{2}; -1[\cup]1; +\infty[$ ويكون المنحني (C_f) يقع تحت (d) لما $x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]-1; 1[$.

(6) إيجاد فواصل النقط من (C_f) التي يكون المماس فيها موازيا للمستقيم (d) :

ان معامل توجيه المستقيم (d) يساوي 2 ونحن نعلم ان معامل توجيه المماس عند النقطة التي فاصلتها مثلا a هو $f'(a)$ ومنه لكي يكون المماس موازيا للمستقيم (d) يجب ان يكون لهما نفس معامل التوجيه اذن نقوم بحل المعادلة $f'(a) = 2$ وعدد حلولها هو عدد المماسات المطلوب:

$$f'(a) = 2 \text{ معناه } \frac{2a \times g(a)}{(a^2 - 1)^2} = 2 \text{ ومنه } a \times g(a) = (a^2 - 1)^2 \text{ ومنه } a \times (a^3 - 3a - 3) = (a^2 - 1)^2$$

$$\text{ومنه } a^4 - 3a^2 - 3a = a^4 - 2a^2 + 1 \text{ ومنه } a^2 + 3a + 1 = 0 \text{ و } \Delta = 8 > 0 \text{ ومنه } a_1 = \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{2} \text{ و}$$

$$a_2 = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2} \text{ اذن هناك مماسان معامل توجيههما } a_1 \text{ و } a_2 \text{ يوازيان المستقيم } (d).$$

(7) رسم المستقيمات المقاربة والمنحني (C_f) : باستعمال برمجية الجيو جابرا نتحصل على المنحني التالي:

