مسألة أسية رقم 03

1) عيّن جميع الدّوال $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التي تحقّق من أجل كل عدد حقيقي $x\notin\{-1,1\}$ العلاقة:

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x....(1)$$

2) نعتبر الدّالّة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{(2-2x^2)f(x)}$.

أ) أحسب نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) أحسب g' مشتقة الدّالة g.

ج) إستنتج إتجاه تغير الدّالة g. ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى C_g عند النّقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

4) أرسم C_g التّمثيل البياني للدّالّة g والمماس (T) في معلم $O,\vec{i},\vec{j}$.

الإجابة النموذجية

1) لتكن f هي حل المعادلة (1). من أجل كل عدد حقيقي $x\notin\{-1,1\}$، نقوم بإجراء التّبديلين البسيطين التّاليين للمتغيّر:

- نضع $t=\frac{x-3}{x+1}$ فنجد أنّ $x=\frac{3+t}{1-t}$ من أجل $t\notin\{-1,1\}$، والمعادلة (1) تكتب على الشكل:

$$f(t)+f\left(\frac{t-3}{t+1}\right)=\frac{3+t}{1-t}....(*)$$

من أجل كل $x\notin\{-1,1\}$.

- نضع $t=\frac{x+3}{1-x}$ فنجد أنّ $x=\frac{t-3}{1+t}$ من أجل $t\notin\{-1,1\}$، والمعادلة (1) تكتب على الشكل:

$$f(t)+f\left(\frac{t+3}{1-t}\right)=\frac{t-3}{1+t}....(**)$$

من أجل كل $x\notin\{-1,1\}$.

- بجمع المعادلتين $(*)$ و $(**)$ طرفاً لطرف نحصل على: $2f(t)+f\left(\frac{t+3}{1-t}\right)+f\left(\frac{t-3}{t+1}\right)=\frac{3+t}{1-t}+\frac{t-3}{1+t}$

ومن كون $f\left(\frac{t+3}{1-t}\right)+f\left(\frac{t-3}{t+1}\right)=t$ (من المعادلة (1))، نحصل على $2f(t)+t=\frac{3+t}{1-t}+\frac{t-3}{1+t}$ ومنه

$f(t)=\frac{4t}{1-t^2}-\frac{t}{2}$، وعليه الدّالّة المطلوبة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بـ: $f(x)=\frac{4x}{1-x^2}-\frac{x}{2}=\frac{x^3+7x}{2-2x^2}$.

2) أ) نهايات الدّالّة g هي: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^3+7x}=$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي لـ C_g في جوار $-\infty$، كذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^3+7x}=+\infty$

• الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقّة هي: $g'(x)=(3x^2+7)e^{x^3+7x}$، وكون $e^{x^3+7x}>0$ و $3x^2+7>0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ $g'(x)>0$ وبالتّالي الدّالّة g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$، وجدول تغيّرات الدّالّة f هو:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

3) معادلة المماس (T) للمنحنى C_g عند النّقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ تُعطى بـ: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي: $(T): y=7x+1$

4) التّمثيل البياني في الشكل الموالي: