

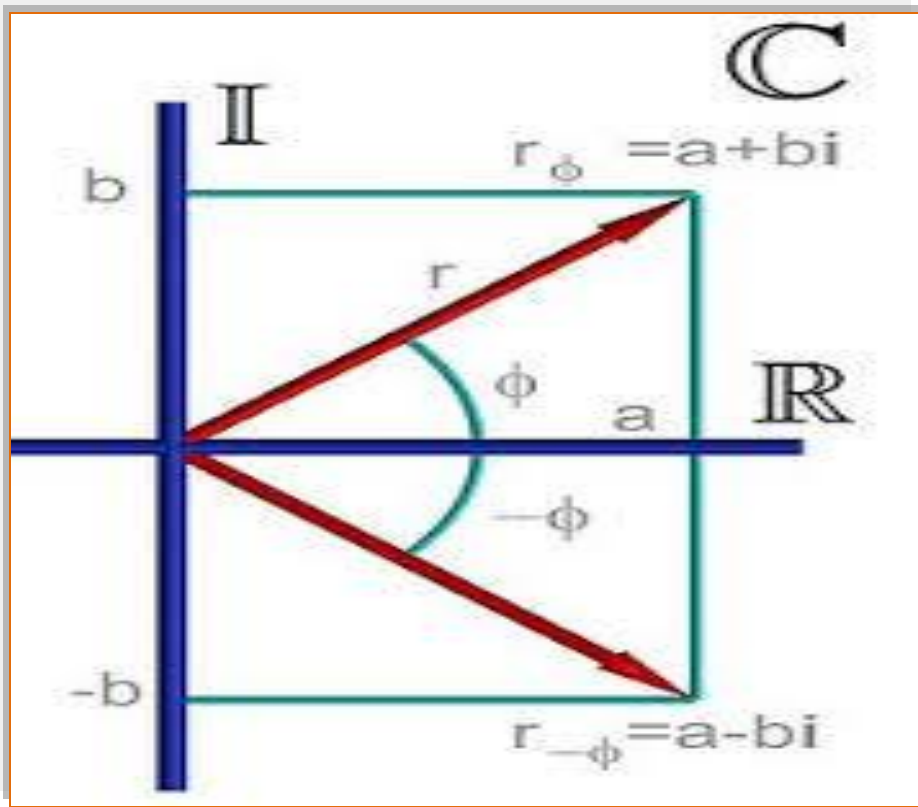


مجلة الرائد في الرياضيات



تمارين الأعداد المركبة في البكالوريا بين يديك

الشعب: علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



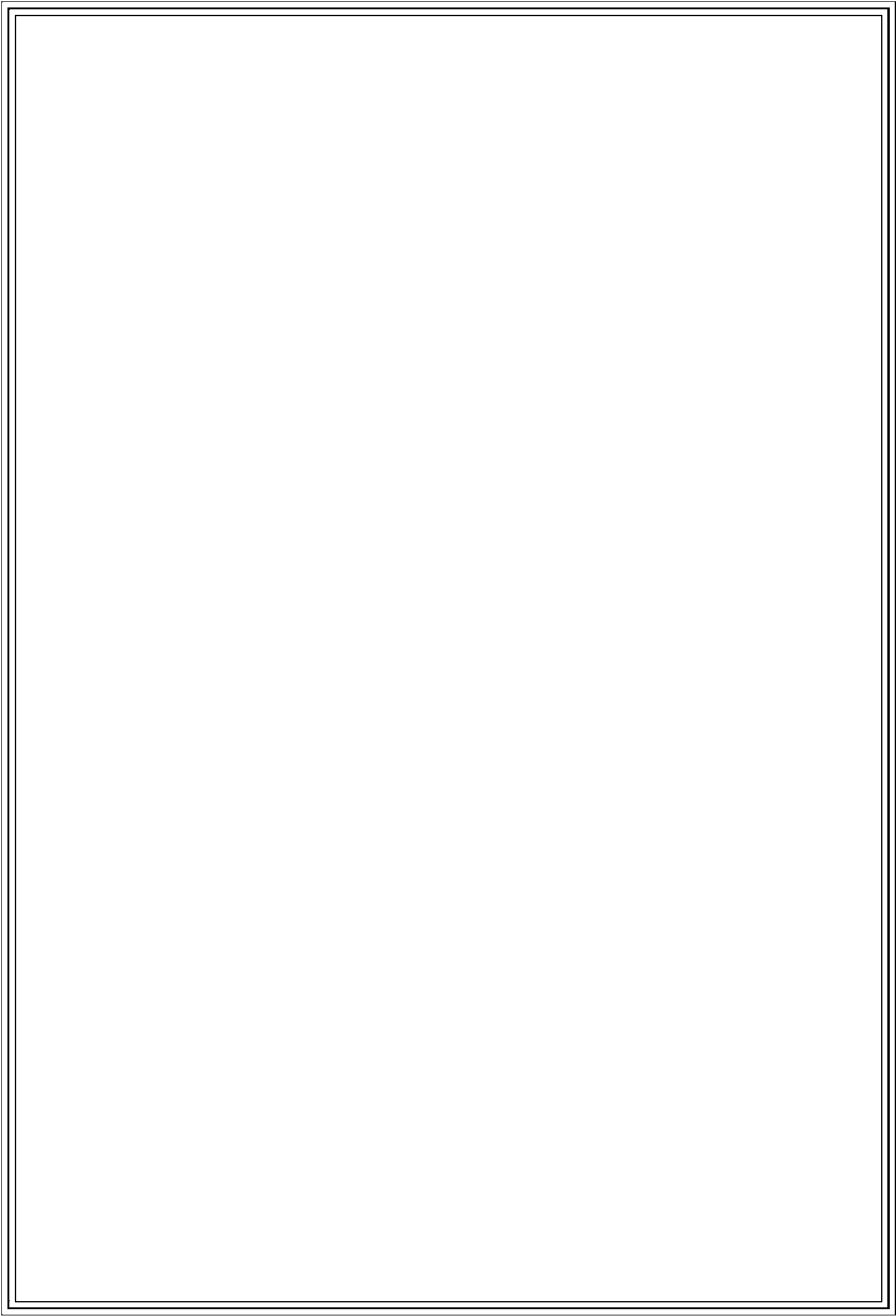
BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي



larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook



مجلة الرائد في الرياضيات

تمارين الأعداد المركبة في البكالوريا بين يديك

الشعب : علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات

الجزء الاول

تدريبات متنوعة

الجزء الثاني

بكالوريات النظام الجديد

العلوم التجريبية + تقني رياضي + رياضيات
(1) المواضيع ، (2) الحلول (المجلة المرفقة)

الجزء الثالث

بكالوريات النظام القديم

علوم الطبيعة والحياة + علوم دقيقة

الجزء الرابع

بكالوريات اجنبية

BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

الجزء الأول: تمارين تدريبية متنوعة

القسم 1: تمارين على الحساب في المجموعة $\mathbb{C}$

التمرين 01:

أ) نعتبر العددين المركبين: $z' = -1 + 2i$, $z = 3 + i\sqrt{3}$

أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري: $z_3 = \frac{z}{z'}$, $z_2 = z'^3$, $z_1 = z \times z'$, $z_0 = z^2$

ب) z عدد مركب حيث $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ أحسب الأعداد الآتية: z^2 و z^3 ثم استنتج $K = -\sqrt{3}z^2 + iz^3$

ج) لتكن الأعداد المركبة: $a = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $b = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ اكتب a^2 , b^2 على الشكل الجبري ثم استنتج a^3 و b^4

التمرين 02:

أ) اكتب مرافق كلا من الأعداد المركبة التالية:

$$z_6 = \frac{z^2 + iz - 1}{-z + 2i}, z_5 = \frac{1 - z}{1 + iz}, z_4 = (z - i)(z + i), z_3 = i(1 + z), z_2 = 2z - 2i, z_1 = 2 + iz$$

ب) نضع: $z_2 = \frac{-i + \sqrt{3}}{-2i}$, $z_1 = (\sqrt{3} - i)(-2i)$ عين الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري:

$$\overline{z_2}, \overline{z_1}, \overline{z_2 \times z_1}, \overline{z_1 + z_2}, \left(\frac{z_2}{z_1}\right), \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}, \overline{\left(z_2^{1441}\right)}, \overline{\left(z_1^{2020}\right)}$$

التمرين 03:

1- اكتب على الشكل المثلي ثم الأسّي الأعداد التالية: $z_3 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -z_1$, $z_1 = \overline{z_0}$, $z_0 = 1 + i$

2- استنتج الكتابة على الشكل المثلي ثم الأسّي الأعداد التالية: $\left(\frac{-4}{z_3}\right)^{19}$, $(z_0)^{44}$, $\frac{(z_1)^5}{(z_0)^4}$

التمرين 04:

أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

$$|z|^2 + i(z + \bar{z}) - 4 + 2i = 0 \quad (4), \quad z\bar{z} - \bar{z} + z - 5 - 2i = 0 \quad (3), \quad \bar{z} + 1 + i = i\bar{z} + 3 \quad (2), \quad 2iz - 3i + (1 - i)z = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} iz - (-1 + i)z' = -4 - 3i \\ (1 + i)z + 2iz' = 13 + 9i \end{cases} \quad \text{ب) حل في } \mathbb{C} \text{ الجملة التالية:}$$

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية ذات المجهول z

$$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0 \quad (5), \quad 2z^2 - 6z + 5 = 0 \quad (4), \quad z^2 = -\sin^2(\theta) \quad (3), \quad z^2 + 3 = 0 \quad (2), \quad z^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$z^2 = 5 - 12i \quad (8), \quad z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(2 + \sqrt{2}) = 0 \quad (7), \quad z^3 - 2z^2 + 4z = 0 \quad (7), \quad z^2 - 2(\sin \theta)z + 1 = 0 \quad (6)$$

التمرين 05:

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ تعطى النقط A, B, C و M التي لواحقتها هي: $z_A = 1 - 2i, z_B = -1 + 4i, z_C = -5i$ و $z = x + iy$

1- عين لاحقة النقطة D بحيث يكون $\overline{AB} = \overline{CD}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$

2- عين لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC

3- عين لاحقة G مرجح الجملة $\{(A, -2), (B, 1), (C, 2)\}$

4- عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $\| -2\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} \| = 4$

5- عين (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $3\| 2\overline{MA} - \overline{MB} - 2\overline{MC} \| = \| \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} \|$

6- عين (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $\| 2\overline{MA} - \overline{MB} - 2\overline{MC} \| = \sqrt{3} \| \overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC} \|$

7- عين (E) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $-2\| \overline{MA} \|^2 + \| \overline{MB} \|^2 + 2\| \overline{MC} \|^2 = 48$

8- عين (Δ') مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $-2\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = \lambda \vec{u}$ حيث λ يسمح $\mathbb{R}^*$

9- أ) أنشئ في المستوي السابق النقط A, B, C, D, H و G .

ب) أنشئ في المستوي السابق بدقة كلا من المجموعات: $(\Gamma), (\Gamma'), (\Delta), (\Delta')$ و (E)

التمرين 06:

أ) أكتب الأعداد التالية على الشكل المثلثي ثم الأسّي

$$z_4 = \frac{1+i}{i+\sqrt{3}}, z_3 = -2i, z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, z_1 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15}, z_0 = 2 + 2i\sqrt{3}$$

ب) اكتب الأعداد التالية على الشكل الجبري: $z_3 = -\frac{i}{2}e^{-i2019\pi}, z_2 = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}, z_1 = \sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}, z_0 = -6e^{i\frac{3\pi}{4}}$

ج) جد الشكل الأسّي ثم الجبري: $z_2 = 3\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}), z_1 = (-\sqrt{2} + 1)e^{-i\frac{1441\pi}{4}}, z_0 = (-\sqrt{3} + i)e^{i\frac{\pi}{6}}$

التمرين 07:

I) في المستوي المركب نعتبر النقطتين A, B اللتين لاحتقائهما: $z_A = 2i$ و $z_B = 4 - i$

عين هندسيا ثم جبريا مجموعة النقط $M(z)$ في كل حالة من الحالات التالية

1) $|z - 2i| = 4$, 2) $|z - 2i| = 2$, 3) $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{2}$, 4) $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4}$, 5) $z = 2i + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ و $k \in \mathbb{R}^+$

II) عين فيما يلي مجموعات النقط M والتي لاحتقائها z من المستوي حيث:

$$(1) |z - 1 + 3i| = 1 \quad (2) |2 + 4i| = |(1+i)z - i| \quad (3) |z - 2i| = 4 \quad (4) |z - i| = |z - 2 + 4i|$$

التمرين 08:

في المستوي المركب النقطة $A(2i)$ ، $B(1)$ و $M(z)$ وليكن العدد المركب L حيث: $L(z) = \frac{z-2i}{z-1}$

1) اكتب $L(1+i)$ ، $L(-i)$ على الشكل الجبري

2) نضع $z = x + iy$ حيث x, y عدنان حقيقيان. أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $L(z) = 1+i$

ب) بين الشكل الجبري للعدد $L(z)$ هو: $L(z) = \frac{(x^2 + y^2 - x - 2y)}{(x-1)^2 + y^2} + i \frac{(-2x - y + 2)}{(x-1)^2 + y^2}$

ج) عين ثم انشئ مجموعة النقطة $M(z)$ في كل حالة: $L(z)$ حقيقيا، $L(z)$ تخيليا صرفا، $|L(z)| = 1$.

التمرين 09:

عين طويلة وعمدة العدد z وذلك حسب قيم العدد الحقيقي α غير المعلوم في كل حالة .

$$z = \alpha\sqrt{3} \pm \alpha i \quad (5) \quad , \quad z = \alpha \pm \alpha\sqrt{3}i \quad (4) \quad , \quad z = \alpha \pm \alpha i \quad (3) \quad , \quad z = \alpha i \quad (2) \quad , \quad z = \alpha \quad (1)$$

التمرين 10:

z_1 و z_2 عدنان مركبان حيث: $|z_1| = |z_2| = 1$ وليكن العددين المركبين $K = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ ، $L = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$

1) أحسب كلا من $\bar{K}$ و $\bar{L}$. 2) أستنتج أن K حقيقي وأن L تخيلي صرف.

التمرين 11:

1) جد الجذور التربيعية للأعداد المركبة التالية: $z_0 = 2i$ ، $z_1 = 5 + 12i$ ، $z_2 = 3 - 4i$ ، $z_3 = -3$ ، $z_4 = -3$

2) عين الأعداد المركبة z في كل حالة ممايلي: $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z^3 = 8i$ ، $z^4 = -2 - 2i\sqrt{3}$

التمرين 12:

1) ليكن كثير الحدود: $p(z) = z^4 - 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 - 8\sqrt{3}z + 16$

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z فإن: $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$

ب) تحقق أن: $p(\sqrt{3} + i) = p(-2i) = 0$. أستنتج الجذرين الآخرين لـ $p(z)$

2) المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقطة: A, B, C, D التي لواحقتها: $z_A = i + \sqrt{3}$ ، $z_B = \bar{z}_A$ ، $z_C = -2i$ ، $z_D = \bar{z}_C$

أ) مثل النقطة: A, B, C, D في المستوي المركب

ب) اثبت ان النقطة A, B, C, D تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة

3) لتكن E نظيرة B بالنسبة الى O .

- بين ان $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، أعط تفسيراً هندسياً للمساواة.

التمرين 13:

- 1- عين طوليلة وعمدة العدد المركب $z = -\sqrt{3} + i$.
- 2- ليكن العدد المركب z' الذي يحقق: $z.z' = 6 \left[\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right]$
أ) عين طوليلة وعمدة العدد المركب z'
ب) أكتب z' على الشكل الجبري ثم استنتج قيمتي $\cos \frac{19\pi}{12}$ و $\sin \frac{19\pi}{12}$

التمرين 14:

- أختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل ممايلي
- 1) الشكل الجبري للعدد المركب z حيث $\bar{z} + \sqrt{z.\bar{z}} = 6 + 2i$ هو:
أ) $\frac{8}{3} - 2i$ ، ب) $-\frac{8}{3} + 2i$ ، ج) $\frac{8}{3} + 2i$
 - 2) مجموعة النقط $M(z)$ حيث: $(z+i)(\bar{z}+i) = (z-1)(\bar{z}-1)$ هي المستقيم ذو المعادلة:
أ) $y=x-1$ ، ب) $y=-x$ ، ج) $y=x$

التمرين 15:

- أجب ب: صحيح أو خطأ على الفرضيات التالية مع التعليل:
- 1- من أجل كل عدد مركب z : $\text{Im}(z)$ عدد تخيلي صرف.
- 2- في مجموعة الأعداد المركبة القسمة على i هي الضرب في $-i$.
- 3- العدد $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ له عمدة هي θ .
- 4- العدد $\frac{1-i}{1+i}$ له عمدة هي $\frac{\pi}{2}$.
- 5- A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب i ، $-i$ ، z : العدد $|z-i|$ يمثل الطول BC .
- 6- من أجل كل عدد طبيعي n : $i^n = (-1)^n$
- 7- من أجل كل عدد مركب z : $|1+iz| = |1-iz|$ تعني أن z حقيقي.

التمرين 16:

- نعتبر الأعداد المركبة التالية: $z_1 = 1+i$ ، $z_2 = \sqrt{3} + i$ و $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$
- 1- عين الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد z_3
 - 2- عين طوليلة وعمدة للعددين z_1 و z_2 ، ثم اكتب z_3 على الشكل المثلثي
 - 3- بين أن: $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ و $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ ، ثم استنتج $\tan \frac{\pi}{12}$.

التمرين 17:

z عدد مركب يختلف عن i ، وليكن $L = \frac{z-2}{z+i}$ عين مجموعة النقط M لاحتقتها z من المستوي
(1) $|L|=1$ ، (2) L حقيقي، (3) L تخيليا صرفا، (4) L تخيليا صرفا موجبا.

التمرين 18:

من أجل كل نقطة M لاحتقتها z نعتبر النقطة M' لاحتقتها z' حيث $z' = \frac{z-1}{1-z}$
1- بين من أجل كل عدد مركب z يختلف عن 1 أن $|z'|=1$
2- أثبت أن العدد $\frac{z'-1}{z-1}$ حقيقي. ثم استنتج إنشاء هندسي للنقطة M' .

التمرين 19:

في المستوي المركب المزود بمعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط $M(z)$ ، $A(z^2)$ ، $B(1)$ ، $C(1+z^2)$ و $D(\frac{1}{z})$
1- عين مجموعة النقط M لاحتقتها z من المستوي حتى تكون النقط M ، A و D في استقامية.
2- عين مجموعة النقط M لاحتقتها z من المستوي حتى تكون النقط M ، B و C في استقامية.

التمرين 20:

نعتبر المعادلة: $z^3 + 2(i-1)z^2 + (9-4i)z + 18i = 0$ (E)
1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) علما أنها تقبل حلا z_0 تخيليا صرفا.
2- نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: z_0 ، z_1 و z_2 ، ماذا يمكن القول عن المثلث ABC .

التمرين 21:

1- عين الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين: $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ و $z_2 = \frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$
2- جد الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون z_1^n حقيقيا.
3- جد الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون z_1^n تخيليا صرفا.

التمرين 22:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:
1) الشكل الأسّي للعدد المركب $-\sqrt{3}+i$ هو $2e^{\frac{5\pi}{6}}$ ، الشكل الأسّي للعدد $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^2$ هو $4e^{\frac{\pi}{4}}$.
2) المعادلة $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})z + \sqrt{3}-i = 0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{C}$ هو $4z = -\sqrt{2} + \sqrt{6} + i\sqrt{2} - \sqrt{6}$.
3) في المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط $M(z)$ و $B(-2)$ ، $A(4i)$.
4) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $|z-4i| = |z+2|$ هي المستقيم (AB) .

التمرين 23:

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر العدد المركب $P(z) = |z|^2 + 4iz - 5 - 4i$
- 1) عين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: أ) يكون $P(z)$ حقيقيا، ب) يكون $P(z)$ تخيليا صرفا.
 - 2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث $P(z) = 1$ نرسم z_1 و z_2 لحلي هذه المعادلة حيث $\text{Im}(z_1) < 0$
 - 3) نعتبر النقطتين A و B صورتين z_1 و z_2 على الترتيب، نظيرة A بالنسبة إلى O . عين لاحقة النقط C ثم لاحقة مركز ثقل المثلث ABC .

التمرين 24:

- 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-2)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4) = 0$ نسَمي حلولها z_1, z_2, z_3 حيث $z_1 \in \mathbb{R}$ و $\text{Im}(z_1) < 0$
 - 2) أكتب كلاً من z_3 ثم $z_2 + z_1$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos \frac{3\pi}{8}$ و $\sin \frac{3\pi}{8}$.
 - 3) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لتكن النقط A, B, C التي لواحقتها $z_A = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ و $z_B = -\sqrt{2}(1+i)$ و $z_C = -\sqrt{2}(1-i)$
- أ) أعط تفسيراً هندسياً لطويلة وعمدة العدد $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$.
- ب) ما طبيعة المثلث ABC ؟ برّر جوابك.

القسم 2: تمارين على التحويلات النقطية

التمرين 25:

T تحويل نقطي حيث: $T: M(z) \rightarrow M'(z')$ عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل T في كل حالة
 $z' = z + i$ (1 ، $z' = -2z + 3 - 3i$ (2 ، $z' = iz + 1 + i$ (3 ، $z' = (1+i)z - 3i$ (4 ، $z' = 2ize^{i\frac{\pi}{2}}$

التمرين 26:

S تحويل نقطي معرف بالعلاقة المركبة المختصرة عين طبيعة S وعناصره المميزة في كل حالة
 $(z' - i) = 2(z - i)$ (1 ، $(z' + i) = \sqrt{3}i(z + i)$ (2 ، $(z' + 2) = (1 - i)(z + 2)$ (3 ، $z' = \sqrt{2}(1 - i)z$ (4

التمرين 27:

أكتب العبارة المختصرة ثم العبارة المركبة للتحويل T في كل حالة من الحالات التالية.
 1) T انسحاب شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، H تحاكي مركزه $\omega(1 - i)$ ونسبته -2

3) R دوران مركزه $\omega(i)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ، 4) S تشابه مباشر مركزه $\omega(2i)$ ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{6}$

التمرين 28:

h التحاكي الذي مركزه $A(i)$ ونسبته -2 و r الدوران الذي مركزه $A(i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$
 أكتب العبارة المركبة لكل من r ، h ثم بين أن $roh = hor$

التمرين 29:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

- عين التحاكي h الذي مركزه O ويحول النقطة $A(1 - 2i)$ إلى النقطة $B(-2 + 4i)$. ثم استنتج نسبته
- عين الدوران r الذي يحول $A(1 - 2i)$ إلى $B(1)$ ويحول $C(1 - i)$ إلى O ، ثم عين عناصره المميزة
- عين التشابه S_1 الذي يحول $A(1; 2)$ إلى $B(1; 4)$ ويحول $C(2; -1)$ إلى $D(5; 2)$ ، ثم عين عناصره المميزة
- عين نسبة وزاوية التشابه المباشر S_2 الذي مركزه $A(1)$ ويحول النقطة $B(1 - i)$ إلى النقطة $C(3)$
- عين مركز وزاوية التشابه المباشر S_3 الذي نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ويحول $A(2; 1)$ إلى $B(-3; 3)$

التمرين 30:

f تحويل نقطي حيث: $M(x; y) \rightarrow M'(x'; y') : \begin{cases} x' = -2y - 3 \\ y' = 2x + 1 \end{cases}$

- عين لاحقة النقطة A' محولة النقطة $A(i)$ ب f ، ثم جد لاحقة النقطة B التي تحولتها $B'(-1; -1)$
- بين أن العبارة المركبة لـ f هي: $z' = 2iz - 3 + i$ استنتج طبيعة f مع ذكر عناصره المميزة.
- مجموعه النقط $M(x; y)$ من المستوي التي تحقق: $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ (4) (Γ)
- * ماهي طبيعة (Γ) ؟ عين عناصرها المميزة ثم جد صورة (Γ) للمجموعة (Γ) بالتحويل f

الجزء الثاني: تمارين البكالوريا

القسم 1: التمارين غير المتعلقة بالتحويلات النقطية

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 31: دورة 2012 م 1

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ حيث $(z \neq 2-3i)$ - حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم متعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب z_A و z_B حيث: $z_A = 1+i\sqrt{5}$ و $z_B = 1-i\sqrt{5}$. تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ النقط C, D, E لواحتها على الترتيب: $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$ - عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .
ب- أستنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. - تحقق أن النقطة E تنتمي إلى (γ) .

التمرين 32: دورة 2011 م 2

نعتبر في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C التي لاحقتها على الترتيب: $z_A = 3-2i$ ، $z_B = 3+2i$ و $z_C = 4i$.

1- أ- علم النقط A, B, C

ب- ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك.

ج- عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2- عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$.

3- أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6z + 13 = 0$.

نسمي z_0 و z_1 حلي هذه المعادلة

ب- لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z .

- عيّن مجموعة النقط M التي تحقق: $|z - z_0| = |z - z_1|$

التمرين 33: دورة 2009 م1

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$

2) نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة. اكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

ب) A, B, C هي النقط من المستوي التي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$

و $z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$ احسب الاطوال AB, AC, BC استنتج نوع المثلث ABC

ج) جد الطويلة والعمدة للعدد: $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

د) احسب Z^3, Z^6 ثم استنتج ان Z^{3K} عدد حقيقي

التمرين 34: دورة 2009 م2

$P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$ كثير حدود حيث:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

2) نضع $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي

ب) اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الأسّي

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$

3) احسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

التمرين 35: دورة 2008 م1

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث $\text{Im}(z_1) < 0$. بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ حقيقي.

2- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C نقط لاحقاً على

الترتيب: $z_1, -1 + i, z_2$ وليكن Z العدد المركب حيث: $Z = \frac{z_2 + 1 - i}{z_1 + 1 - i}$

أ) انطلاقاً من التعريف $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ومن الخاصية $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

برهن أن: $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

ب) أكتب Z على الشكل الأسّي. واستنتج طبيعة المثلث ABC .

شعبة: تقني رياضي

التمرين 36: دورة 2013 م 1

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $2z^2 + 6z + 17 = 0$.

2- في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C لاحقاً على

$$\text{الترتيب: } z_A = -4, z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i, z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3- أ) عيّن z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعاً مركزه A

ب) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 10\sqrt{2}$

4- (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\arg(z + 4) = \frac{\pi}{4}$

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ثم عيّن المجموعة (Γ_2) .

التمرين 37: دورة 2010 م 1

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z - 3 + 2i)(z^2 + 6z + 10) = 0$

2) علم في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, C, D و I

ذات اللاحقات: $z_A = 3 - 2i, z_C = -3 + i, z_D = -3 - i, z_I = 1$

$$\begin{cases} \arg(z - 3 + 2i) = \arg(z - 1) + \frac{\pi}{2} \\ |z - 3 + 2i| = |z - 1| \end{cases}$$

أ) بين أن الجملة تكافئ: $\frac{z - 3 + 2i}{z - 1} = i$ ثم عين قيمة z .

ب) النقطة التي لاحقها $z_B = 3$. تحقق أن: $\overline{AB} = \overline{DC}$ ، ثم عيّن طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

ج) لتكن J النقطة التي لاحقها $z_J = 1 - 2i$. أكتب على الشكل الأسّي: $Z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_J}$

تحقق أن: $\overline{AB} = \overline{JI}$. ثم عيّن طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

التمرين 38: دورة 2011 م 1

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \dots (E)$

- (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) وأكتب حلولها على الشكل المثلثي.
 (2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C والنقط التي

لاحقاً على الترتيب $z_A = 2i, z_B = \sqrt{3} + i, z_C = \sqrt{3} - i$ نضع: $L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

أ) أكتب L على الشكل الأسّي.

ب) أثبت أن $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$.

ج) استنتج نوع المثلث ABC واحسب مساحته S

التمرين 39: دورة 2010 م 2

1- أكتب على الشكل الاسي العدد: $a = -2 + 2\sqrt{3}i$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$

2) ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A, B, C والنقط التي لاحقاً:

$z_A = -2, z_B = -1 - \sqrt{3}i, z_C = 1 + \sqrt{3}i$ على الترتيب

أ- أحسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له.

ب- أستنتج طبيعة المثلث ABC

3) لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ حيث: $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{3}$

أ- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (E).

ب- عين المجموعة (E)

التمرين 40: دورة 2009 م 1

1- أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$

ب) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $(\bar{z} + 3)^2 - 2(\bar{z} + 3) + 2 = 0$

2- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, M لواحقتها

$(1-i), (1+i)$ و z على الترتيب

أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي: $z = 1 - i + ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يسمح $\mathbb{R}^+$

ب) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي: $|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$.

التمرين 41: دورة 2009 م 2

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2 - 6z + 18 = 0$

(2-أ) أكتب العدد المركب: $z_1 = 3 - 3i$ على الشكل الأسّي

(ب) أحسب طويلة العدد z_3 وعمدة له حيث: $z_1 \times z_3 = 6(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$

أستنتج قيمتي $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

(3) في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A ، B و C ذات اللاحقات :

$3 - 3i$ و $3 + 3i$ و $\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب.

(أ) عين قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة $\{(A, 1); (B, -1); (C, \alpha)\}$ مرجحا نرمل له ب G_α

(ب) عين مجموعة النقط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}^*$

التمرين 42: دورة 2008 م 1

لتكن في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كمايلي: $z^3 + (2 - 4i)z^2 - (6 + 9i)z + 9(-1 + i) = 0$

1- بين أن $z_0 = 3i$ هو حل للمعادلة (*).

2- بين أن (*) تقبل حلا حقيقيا z_2 ، ثم استنتج الحل الثالث z_1 واكتب الحلول على الشكل الأسّي

3- A ، B و C صور الحلول z_0 ، z_1 و z_2 على التوالي في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

عين النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 1); (C, -1)\}$

4- عين المجموعة (E) للنقط M حيث: $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$

- بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم أنشئ (E).

التمرين 43: دورة 2008 م 2

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كفي.

1- حل في حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2r \cos(\frac{\theta}{2})z + r^2 = 0$ ثم اكتب الحلين على الشكل الأسّي.

2- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقطتين A ، B صورتا الحلين. عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الاضلاع

شعبة: الرياضيات

التمرين 44: دورة 2009 م1

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث: $f(z) = \frac{z-i}{z-1}$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(45+45i)f(z) = 23+45i-2z$

2- لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$
أ- عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ حقيقيا سالبا تماما

ب- أحسب العدد المركب z_0 بحيث: $|f(z_0)| = 1$ و $\arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2}$

3- في المستوي المركب نعتبر النقط A, B, C صور الاعداد المركبة $1, i$ و z_0 على الترتيب.
أ- مانوع المثلث ABC ؟

ب- عين النقط D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

التمرين 45: دورة 2008 م2

نعتبر في مجموعة المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعروف كمايلي: $P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$

1- بين انه إذا كان α جذرا لـ $P(z)$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ جذرا له أيضا

2- تحقق أن: $1+i$ و $-1+i$ جذرين لكثير الحدود $P(z)$

3- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ ثم أكتب الحلول على الشكل الأسّي

4- في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D

والتي لواحتها على الترتيب: $1+i, -1+i, -\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$ حيث m عدد حقيقي

عين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.

القسم 2: تمارين متعلقة بالتحويلات التقطية

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 46: دورة 2019 م 1

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z : $(z-i)(z^2-4z+5)=0$
(II) نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C التي لاحقاً $i, 2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع: $f(z) = \frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)| = \frac{1}{2}$

ب) بيّن أن العدد المركب $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب

3) نعتبر الدوران الذي r الذي مركزه C وزايته $\frac{\pi}{2}$

أ) عين لاحقة النقطة D صورة B بالدوران r وبين أن النقط A, D و C في استقامية

ب) استنتج أن النقطة D صورة A بواسطة تحويل نقطي بسيط يطلب تعيين طبيعته وعناصره

التمرين 47: دورة 2019 م 2

المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$
نعتبر النقط A, B, C التي لاحقاً z_A, z_B و z_C على الترتيب. حيث $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = -2z_A$.

1-أ) اكتب العدد z_A على الشكل الأسّي. ب) احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$

2-أ) T الإنسحاب الذي يحول A إلى C ، عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالإنسحاب T

ب) استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$

3) اكتب العدد $z_C - z_A$ على الشكل الأسّي

4) جد الأعداد الطبيعية n والتي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ حقيقياً

5) لتكن M نقطة كيفية من المستوى حيث تختلف عن A وتختلف عن C

عين (E) مجموعة النقط M التي من أجلها يكون العدد $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ حقيقياً موجب تماماً

التمرين 48: دورة 2018 م 1

(1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

(2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ A, B, C ثلاث نقط من المستوي

لواحقها على الترتيب z_A, z_B, z_C حيث: $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = \overline{z_B}$

اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(3-أ) تحقق أن: $\frac{z_B}{z_C} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ وحدد طبيعة المثلث OBC .

(ب) أستنتج أن B صورة C بدوران r وتعين عناصره المميزة.

(4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z| = \left|z - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$.

عين طبيعة المجموعة (γ) ، ثم عين صورتها بالدوران r .

التمرين 49: دورة 2018 م 2

(I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(z^2 - 4z + 5) = 0$ ($\bar{z} - 4 + i$) (يرمز $\bar{z}$ لمرافق z)

(II) المستوي المركب إلى المعلم متعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها

$$z_C = \overline{z_A} \text{ و } z_B = 4 + i, z_A = 2 + i$$

(1) تحقق أن: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا

$$\begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \text{Arg}\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

(2) نقطة D من المستوي لاحقتها z_D حيث:

بين أن المثلث ABD متقايس الأضلاع وحساب z_D .

(3) احسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D .

(4) عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z تحقق: $\text{Arg}\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$

التمرين 50: دورة 2017 م 1

(I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاً على الترتيب $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = -2$.

1- أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي.

2- عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

3- (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$

تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ)، ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) أنشئها.

4- ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h.

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تعيين عناصرها المميزة.

التمرين 51: دورة 2017 م 2

المستوي المركب إلى المعلم متعامد والمتجانس ($O; \vec{u}; \vec{v}$).

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل فيب كل حالة:

1- مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي: $S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}$.

2- من أجل كل عدد مركب z : $(z+2)(\bar{z}+2) = |z+2|^2$.

3- من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$.

4- S التشابه المباشر الذي مركزه Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$. صورة الدائرة

(C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C) ذات المركز

$\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9

5- من أجل كل عدد حقيقي α : إذا كان $Z = (\sin \alpha + i \cos \alpha)(\cos \alpha - i \sin \alpha)$

فإن $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

التمرين 52: دورة 2017 الاستدراكية م 1

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{u}; \vec{v}$) حيث $\|\vec{u}\| = 2\text{cm}$

لتكن النقط A، B و C التي لاحقاً: $z_A = 2$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \bar{z}_B$

1- أ) أكتب z_B على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الاسي للعدد المركب z_C

ب) عيّن مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC، ثم إنشئ النقط A، B و C.

2- ليكن التشابه المباشر S الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

أ) أكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عيّن لاحقة كل من النقط A'، B' و C' صور النقط B، A و C على الترتيب بالتشابه S ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A'، B' و C'.
 ب) أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة المثلث A'B'C'.

التمرين 53: دورة 2017 الاستدراكية م2

- المستوي المركب إلى المعلم متعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
 نعتبر النقط B، A و C التي لاحقاً: $z_A = -3 - 2i$ ، $z_B = 1 + i$ و $z_C = 4 - 3i$.
 (1) عيّن نسبة وزاوية التشابه S الذي مركزه A ويحول B النقطة إلى النقطة C.
 (2) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.
 (3) نرسم ب: G إلى مركز ثقل المثلث ABC ب: I إلى منتصف [AC].
 عيّن z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I ثم بيّن النقط أن B و G و I على استقامة واحدة.
 (4) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة I، حدّد بدقة طبيعة الرباعي ABCD.
 (5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MC}\| = 5\sqrt{2}$.
 أ) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) . ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وإنشئها.

التمرين 54: دورة 2016 م1

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقاً العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقاً العدد المركب z' حيث $z' = \frac{z-2}{z-1}$.
 (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$.
 (2) النقطتان A، B لاحقاً على الترتيب: z_1 و z_2 ، حيث $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = \bar{z}_1$.
 أ) اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي.
 ب) بيّن أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O، يطلب تعيين زاوية له.
 (3) نضع: $z' \neq z$ ونعتبر أن النقطتين C و D لاحقتهما 1 و 2 على الترتيب.
 عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي لمحور الترتيب ثم إنشئ (Γ) .
 (4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.
 أ- عيّن طبيعة التحويل القطبي $S = hoR$ وعناصره المميزة. ب- اكتب العبارة المركبة للتحويل.
 ج- عيّن ثم إنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S.

التمرين 55: دورة 2016 م2

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، A ، B ، C النقطة التي لاحقاً على الترتيب $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_C = \bar{z}_B$ و $z_C = \bar{z}_B$.

أ- اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي

ب- بيّن أنه يوجد أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

3- أ- عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع: ثم حدد بدقة طبيعته.

ب- عيّن (E) مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z - z_A| = |\bar{z} - z_B|$ حيث $\bar{z}$ مرافق z .

ج- عيّن (Γ) مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ حيث θ يتغير على $\mathbb{R}$. ثم تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

التمرين 56: دورة 2016 م 1 الاستدراكية

1- نضع من اجل كل عدد مركب z : $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$

أ- تحقق أن: $P(2\sqrt{3}) = 0$. ب- جد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من اجل كل

عدد مركب z : $P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$

ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $P(z) = 0$.

2- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، A ، B ، C النقطة التي لاحقاً على الترتيب: $z_A = -\sqrt{3} + 3i$ ، $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ ، $z_C = 2\sqrt{3}$.

أ- اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري.

ب- بيّن أنه يوجد دوران r مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C ، يطلب تعيين زوايته.

ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .

د- عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{AB}$

ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

3- عيّن (Γ) مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z غير المعدومة بحيث: $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

التمرين 57: دورة 2016 م 2 الاستدراكية

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0$.

1- أ- أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2- في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقاط A ، B ، C و D

النقط التي لاحقاً على الترتيب: $z_D = -\frac{5}{2}$ و $z_C = -1$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

أ) اكتب كلا من العددين z_B و z_A على الشكل الأسّي . ب) أنشئ النقط A, B, C و D .

ج) إثبت أن: $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$.

د) استنتج طبيعة المثلث ABC .

3- ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 والتكن F صورة A بالتحويل S

أنشئ النقطة F ثم حدّد طبيعة المثلث AFC .

4- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) النقط M ذات اللاحقة z حيث: $z + 1 = kz_B$ لما يتغير K في المجموعة $\mathbb{R}_+$

التمرين 58: دورة 2015 م 1

I- عيّن العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β .

II- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $A(O; \vec{u}; \vec{v})$ و B, C النقط التي لاحقاً

على الترتيب $z_A = z_C \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) أ) اكتب z_C و z_A على الشكل الأسّي، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقياً سالباً

ب) تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1 + i$.

أ) حدّد النسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A .

ب) اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$.

3) عيّن مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يسمح $\mathbb{R}^+$.

التمرين 59: دورة 2015 م 2

في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $A(O; \vec{u}; \vec{v})$ و B, C النقط التي لاحقاً

على الترتيب z_A, z_B, z_C حيث $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = -\overline{z_A}$ و $z_C = -(z_A + z_B)$ ، $(\overline{z_A} \text{ مرافق } z_A)$

1) أ) اكتب كلا من العددين z_B و z_C على الشكل الأسّي

ب) استنتج أن النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ج) أنشئ الدائرة (γ) والنقط A, B, C .

$$2-أ) \text{ تحقق أن: } \frac{Z_B - Z_C}{Z_B - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ب) استنتج أن المثلث ABC متقايس الاضلاع وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

ج) عيّن وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

3) أ) عيّن زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A

ب) أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة [OB].

التمرين 60: دورة 2014 م 1

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة C المعادلة: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لتكن النقط A، B، C و D

التي لاحقاً على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \bar{z}_A$ ، و $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي. ب) أحسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

ج) بيّن أن النقط O، A، B و C تنتمي لدائرة إلى نفس الدائرة مركزها D، يطلب تعيين نصف قطرها.

د) أحسب $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ ثم جد قياساً للزاوية $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$. ماهي طبيعة الرباعي OACB؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R.

ب) عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط C، A و C' في استقامية.

ج) عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي OACB بالدوران R.

التمرين 61: دورة 2014 م 2

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z حيث: $(z-i)(z^2 - 2z + 5) = 0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (وحدة الطول 1cm)

تعطى النقط A، B و C التي لاحقاً: $z_A = i$ ، $z_B = 1+2i$ و $z_C = 1-2i$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A، B و C.

ب) جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

ج) احسب مساحة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عيّن الكتابة المركبة للتشابه S.

ب) بيّن أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر S تساوي $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$.

4) M نقطة لاحقتها z ، عيّن مجموعة النقط M حيث : $|z| = |iz + 1 + 2i|$

التمرين 62: دورة 2013 م

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I) ذات المجهول z التالية: $z^2 - (4 \cos \alpha)z + 4 = 0 \dots (I)$ حيث α وسيط حقيقي

2- من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ نرملحلي المعادلة (I) ب: z_1 و z_2 . بيّن أن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

3- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

النقط A ، B ، C التي لاحقاً: $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 4 + i\sqrt{3}$ على الترتيب

أ- أنشئ النقط A ، B ، C ، ب- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ثم استنتج ان

هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

ج- عيّن لاحقة G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, -1); (C, 2)\}$ ، ثم أنشئ G

د- احسب z_D لاحقة النقط D بحيث يكون الرباعي ABDG متوازي أضلاع.

التمرين 63: دورة 2013 م

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: $z^2 + 4z + 13 = 0 \dots (E)$

1) تحقق أن العدد $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) ثم جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب.

S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$

من المستوي إلى النقط $M'(z')$

أ- بيّن أن : $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$

ب- احسب z_C لاحقة النقط C ، علماً أن صورة B بالتشابه S

3) لتكن النقط D حيث : $2\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{0}$

أ- بيّن أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب- احسب z_D لاحقة النقط D.

ج- بيّن أن : $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD.

التمرين 64: دورة 2012 م

1) ليكن كثير الحدود : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $p(z)$

- ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل $z \in \mathbb{C}$: $p(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$
- ج- حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $p(z) = 0$.
- 2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ و A, B, C نقط من المستوي المركب لواحقتها على الترتيب: $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$
- أ- اكتب كلاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.
- ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.
- ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .

- 3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$. أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S .
- ب- عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالتشابه S .
- ج- بيّن أن النقط A, B و A' في استقامية.

التمرين 65: دورة 2011 م 2

- نعتبر في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C التي لاحقاً على الترتيب: $z_A = -i$ ، $z_B = 2 + 3i$ و $z_C = -4 + i$.
- 1- أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

- ب- عين طوليلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

- 2- نعتبر التحويل القطبي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث:

$$z' = iz - 1 - i$$

- أ- عيّن طبيعة التحويل T محدداً عناصره المميزة. ب- ماهي صورة النقطة B بالتحويل T .
- 3- لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$. أ- بيّن أن النقط A, C و D في استقامية.
- ب- عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحول C إلى D
- ج- جد العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D

التمرين 66: دورة 2010 م 1

- نعتبر في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين A, B اللتين لاحقتهما على الترتيب: $z_A = 1 + i$ و $z_B = 3i$

- 1) اكتب على الشكل الأسّي: z_A و z_B .

- 2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = 2iz + 6 + 3i$
- أ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

ب) عيّن z_c لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه S.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -2); (C, 2)\}$.
أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D.

ب) عيّن مع التبرير طبيعة الرباعي ABCD

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z والتكن (Δ) مجموعة النقط ذات

اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجب تماما.

أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

ب) أعط تفسير هندسيا لعمدة $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عيّن حينئذ المجموعة (Δ)

التمرين 67: دورة 2010 م

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 - 6z + 18 = 0$ ثم اكتب الحلين على الشكل الاسي

2- في المستوي المزود المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A، B، C و D لاحقا

على الترتيب: $z_A = 3 + 3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.

أ- بين أن A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب- عيّن زاوية الدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B

ج- بين أن A، O و C في استقامية وكذلك النقط B، O و D. د- استنتج طبيعة الرباعي ABCD.

التمرين 68: دورة 2008 م

1- أ) جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $7 + 24i$ ، ب) بين أن: $z^2 + iz - 2 - 6i = \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 - \frac{7 + 24i}{4}$

ج) استنتج العددين المركبين z_1 و z_2 حلي المعادلة: $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

2- نعتبر في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين A، B اللتين لاحقتهما

$z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$. عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر [AB]

3- أ) لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث: $z_C = \frac{4-i}{1+i}$.

- اكتب z_C على الشكل الجبري، ثم أثبت C تنتمي إلى (Γ) .

4- أ) برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k ($k > 0$) وزاويته θ

والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0)$

ب) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعروف ب: $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{\frac{i\pi}{3}} \left(z + \frac{1}{2}i\right)$

شعبة: تقني رياضي

التمرين 69: دورة 2019 م 1

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، A ، B و C لاحقاً على الترتيب

$z_A = 1+i$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و (Γ) الدائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها 1

1-أ) تحقق من أن النقطة C من الدائرة (Γ) .

ب) عين قياساً بالراديان للزاوية $(\overline{AB}; \overline{AC})$ ثم استنتج أن صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.

2) S التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

أ) حدد العناصر المميزة للتشابه S .

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالتشابه S .

3) ماهي نسبة التحاكي الذي مركزه A حيث: $S = \text{hor}$ ؟ استنتج أن القط A ، C و D في استقامية

4) (E) مجموعة القط M من المستوي التي لاحقها z حيث: $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$.

تحقق أن النقطة C من المجموعة (E)، ثم حدد طبيعة المجموعة (E).

التمرين 70: دورة 2019 م 2

I-أ) تحقق أن: $(2 - 2\sqrt{3})^2 = 16 - 8\sqrt{3}$

ب) عين على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد Z حيث: $Z = -16\sqrt{3} - 16i$

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر القط A ، B و C لاحقاً:

$$z_C = -\frac{1}{4}z_A \text{ و } z_B = \frac{1}{2}iz_A , z_A = 4e^{i\frac{\pi}{4}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

1) اكتب z_A على الشكل الجبري ثم بين أن: $z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

2) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين: $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$

3) S التشابه المباشر الذي يحول A إلى B ويحول B إلى C .

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S .

أ) بين أن: $z' = \frac{1}{2}iz$ ب) حدد العناصر المميزة للتشابه S .

4) G النقطة ذات اللاحقة z_G مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (C; 4)\}$

$$z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ أ) بيّن أن:}$$

ب) (E) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حيث: $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\sqrt{2}$ حدد طبيعة المجموعة (E) وعناصرها المميزة، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S

التمرين 71: دورة 2018 م

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

II) المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

لتكن النقطتين A، B لاحقاً على الترتيب $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$

1) أكتب على الشكل الأسّي العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ثم بيّن أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف

2) لتكن C صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3)

بيّن أن لاحقة النقطة C هي $z_C = -\sqrt{2} + i3\sqrt{2}$

3) احسب z_D لاحقة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $(-\frac{\pi}{2})$.

4 أ) بيّن أن: $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACD.

ب) أوجد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي ACED مربعاً.

التمرين 72: دورة 2018 م

I- أ) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $4z^2 - 2z + 1 = 0$ (E)

ب) أكتب العددين $\frac{1}{z_1}$ ، $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسّي حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E).

II) المستوى المركب إلى المعلم متعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A، B، C و D التي

لواحقها $z_C = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_A = 4$

1- أ) احسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم حدّد طبيعة المثلث ABC.

ب- استنتج أن B صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته.

2- أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{CB}$.

استنتج بدقة طبيعة الرباعي ACBD.

3- حدّد طبيعة (γ) مجموعة النقط (z) M من المستوى المركب التي تحقق: $|iz + \sqrt{3} - i| = |z - 1 + i\sqrt{3}|$

4- بيّن أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ).

التمرين 73: دورة 2017 م1

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاً على الترتيب $z_A = -1$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = -i$.

1- أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ لشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2- عيّن العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه C ويحول B إلى A .

3- نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة C و E صورة D بالتشابه S .

أ- عيّن z_D لاحقة D ثم تحقق أن: $z_E = 1 - 2i$ حيث z_E لاحقة E .

ب- حدّد طبيعة الرباعي ADEB .

4- (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z . (M تختلف عن A و B)

حيث: $\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$

تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) وإنشئها.

التمرين 74: دورة 2017 م2

المستوي المركب إلى المعلم متعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A، B ، C و D التي لواحقتها $z_A = 1+i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = \frac{1}{2}(1-i)$ و $z_D = \overline{z_C}$

1- أ- أكتب كلا من z_A و z_C على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي العددين z_D و z_B

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$

2- أ- أوجد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A و الذي يحول C إلى B .

ب- احسب طوليلة العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي ADCB .

3- جد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 2), (C; -1), (D; -1)\}$

4- لتكن (Γ) مجموعة النقط M حيث: $\|2\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC} - \overline{MD}\| = \sqrt{5}$

بيّن أن A نقطة من (Γ) ، ثم حدّد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

التمرين 75: دورة 2017 الاستدراكية م1

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-4)(z^2-2z+4)=0$

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاً على الترتيب $z_A = 4$ ، $z_B = 1+i\sqrt{3}$ و $z_C = 1-i\sqrt{3}$.

1- أكتب العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2- (أ) عيّن لاحقة النقطة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

(ب) عيّن طبيعة الرباعي ABDC

3- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $z_n = (z_C)^n + (z_B)^n$

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = 2^{n+1} \times \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n = z_{6n}$

عبر عن t_n بدلالة n ثم أحسب P_n بدلالة n حيث $P_n = t_0 \times t_1 \times t_2 \times \dots \times t_n$

التمرين 76: دورة 2017 الاستدراكية م2

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A، B و C النقط التي لاحقاً على الترتيب $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$

1- بيّن أن $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته.

2- أ- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث $L = \frac{z_C - z_A}{z_C}$

ب- بيّن أن: $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ: $\tan \frac{\pi}{12}$

3- نعتبر التحويل التقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات الاحقة z النقطة M' ذات الاحقة

z' والمعرف بـ: $z' = (z - z_B)L + z_B$

- بيّن أن S تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة.

4- لتكن A'، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتحويل SoS.

أحسب مساحة المثلث A'B'C'

التمرين 77: دورة 2016 م1

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$

2) في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين A، B اللتين لاحقاً

على الترتيب $z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$ و $z_B = \overline{z_A}$

أ) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي ، ب) بيّن أن: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$

(ج) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا.

(3) الف التحويل التقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = \left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)z$

(أ) عيّن طبيعة التحويل f وعناصره المميزة .

(ب) احسب z_c لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f .

(ج) عيّن z_d لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

التمرين 78: دورة 2016 م2

(I-1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(2z - \sqrt{2}) = 0$$

(2) اكتب الحلول على الشكل الأسّي.

II في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين A, B و C والتي لواحقها

على الترتيب $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

(1) علم النقط A, B و C في المعلم السابق.

(2) نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A وزاويته π ونسبته 3

والنقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

- احسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب .

III نضع $z = \frac{d-b}{e-b}$. (1) اكتب z على الشكل المثلي.

(2) نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة I .

ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

التمرين 79: دورة 2015 م1

نعتبر في المستوي المزود المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقاتيهما

على الترتيب على الترتيب z_A و z_B حيث: $z_A = 1 - i$ و $z_B = 3 + 3i$

(1) أ) اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي .

(ب) n عدد طبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

(ج) z عدد مركب حيث $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ احسب طويلة العدد z وعمدة له، ثم اكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري

(د) استنتج $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$.

(2) أ) احسب اللاحقة z_c للنقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

واستنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) احسب اللاحقة z_d للنقطة D مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 1); (C, 1)\}$ ، ثم بين ان ABDC مربع

التمرين 80: دورة 2015 م 2

(1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(I) \quad z^2 - 4(\sin \theta)z + 4 = 0 \dots (I) \text{ حيث } \theta \text{ وسيط حقيقي}$$

(2) من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ نرسم إلى حل المعادلة (I) ب: z_1 و z_2 . اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A، B، C التي لاحقاً على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = 3\sqrt{3} + i$.

أ) اكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) استنتج ان صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبه وزاويته.

ج) عين لاحقة النقطة D صورة B بالإنسحاب t الذي شعاعه $\vec{AC}$ ، ثم حدد طبيعة الرباعي ABDC

(4) أ) عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$.

ب) عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقيا مع $z \neq z_B$.

التمرين 81: دورة 2014 م 1

(1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z - i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.

(2) المستوي المزود المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نسمي النقط A، B، C نقط المستوي التي

لاحقاً على الترتيب: $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_3 = i$.

أ) اكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.

ب) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفاً؟ برر اجابتك.

3- أ) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C محددًا نسبه وزاويته.

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC.

4-أ) عيّن العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق : $|z-z_1|^2 + |z-z_3|^2 = 5$

ب) عيّن (E') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق : $|z-z_1| = |z-z_3|$

التمرين 82: دورة 2014 م

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; u; v)$ النقطة A ذات اللاحقة $z_0 = 1+i$

1-أ) عيّن ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يسمح $\mathbb{R}$.

ب) عيّن ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + ke^{i(\frac{3\pi}{4})}$ و k يسمح $\mathbb{R}^+$.

ج) عيّن إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') .

2-نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث $z_1 = z_0 + 2e^{i(\frac{3\pi}{4})}$

أ) عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

ب) عيّن z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ج) عيّن العددين α و β بحيث يكون النقطة O مرجحا للجملة: $\{(A, \alpha); (C, \beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$

د) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 0$

التمرين 83: دورة 2013 م

1-حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$

2- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A، B، C النقط التي لاحقاتها

على الترتيب: $z_A = -1-i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1+i\sqrt{3}$ و $z_C = -5+i\sqrt{3}$.

S التشابه المباشر الذي يحوّل A إلى C ويحوّل O إلى B.

-جد الكتابة المركبة للتشابه S، ثم عيّن العناصر المميزة له.

3-أ) عيّن z_D لاحقة D مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$

ب) اكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$ على الشكل الأسّي. ثم استنتج طبيعة المثلث ABD

ج) عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث: $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$

التمرين 84: دورة 2012 م 1

$$1- \text{عَيِّن العددين المركبين } z_1 \text{ و } z_2 \text{ حيث: } \begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - z_2 = 8 + 8i \end{cases}$$

- 2- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, Ω التي لاحقاًها على الترتيب: z_A, z_B, z_Ω حيث: $z_A = 3 + 2i$ و $z_B = -3$ و $z_\Omega = 1 - 2i$.
 أ) أثبت أن: $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$. (ب) استنتج طبيعة المثلث ΩAB .
 3-h هو التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2.
 أ) عَيِّن الكتابة المركبة للتحاكي h . (ب) عَيِّن لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h .
 ج) عَيِّن لاحقة النقطة D مرجح $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$.
 د) بيِّن أن $ABCD$ مربع.

- 4- (E) مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق: $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$.
 أ) بيِّن أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E)، ثم عين طبيعة (E) وعناصرها المميزة.
 ب) أنشئ المجموعة (E).

التمرين 85: دورة 2011 م 2

- المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. العدد مركب المعرف بـ: $L = \frac{-4\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{5 + 3i}$.
 1/ أ) أكتب L على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.
 ب) بيِّن أن: $L^2 + 1 = 0$ ، ثم أحسب $(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} + (5 + 3i)^{12}$.
 ج) n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي. أثبت أن: $L^{4n} + L^{4p} = 0$.
 2/ أ) النقطتان A و B لاحقاًهما على الترتيب: $z_A = 5 + 3i$ و $z_B = 5 - 3i$.
 عين اللاحقة z_A للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.
 ب) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA' .

شعبة الرياضيات

التمرين 86: دورة 2019 م 1

في المستوي المركب إلى المعلم متعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C و D حيث:

$$z_E = 1 \text{ و } z_D = \overline{z_B}, z_C = \overline{z_A}, z_B = i, z_A = 1 + i\sqrt{2}$$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 3) = 0$

2) أ) احسب كلا من $|z_A - 1|$ ، $|z_B - 1|$ و $|z_C - z_E|$ ثم تحقق أن النقط الأربعة A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها وطولها نصف قطرها.

ب) بين أن: $z_B - z_E = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A - z_E)$ ، ثم استنتج أن B هي صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة. - ما طبيعة المثلث ABE ؟

3) عيّن لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$ محددا طبيعة الرباعي $ABDE$

4) $\overline{w_1}$ و $\overline{w_2}$ شعاعان من المستوي لاحقتهما على الترتيب z_1 و z_2 .

أ) برهن أن: $(\overline{w_1} \text{ و } \overline{w_2} \text{ متعامدان})$ يكافئ $(z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 0)$

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $(z - z_A)(\overline{z} - z_D) + (z - z_B)(\overline{z} - z_C)$

التمرين 87: دورة 2019 م 2

1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100$

أ) بين أنه من أجل كل عدد مركب z : $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$

ثم استنتج أنه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\overline{z}$ حلا لها.

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ علما أنها تقبل حلا تخيليا صرفا.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم متعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. النقط A, B, M و

التي لاحقتهما على الترتيب $2i, 3-4i, z'$ حيث: $z' = \frac{-iz + 4 + 3i}{z - 2i}$ مع $z \neq 2i$

والتكن I مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; 1)\}$

أ) عيّن اللاحقتين z_I و z_J للنقطتين I وز على الترتيب.

ب) لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $|z'| = 2$.

بين أن (النقطة M من (E)) يكافئ $(\overline{IM} \cdot \overline{JM} = 0)$ ، ثم عيّن (E) وأنشئها.

ج) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $\arg(z') = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

تحقق أن النقطة D ذات اللاحقة $\frac{9}{2} - \frac{5}{2}i$ تنتمي إلى (Γ) ، ثم عيّن وأنشئ (Γ) .

3) عيّن الشكل الجبري للاحقة النقطة G تقاطع المجموعتين (E) و (Γ)

التمرين 88: دورة 2018 م

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; u; v)$ ، θ عدد حقيقي من المجال $[-\pi; \pi]$
I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2(\sin \theta)z + 1) = 0$$

II) A, B, C و D نقط من المستوي لاحقاً على الترتيب:

$$z_C = \sin \theta + i \cos \theta, z_B = 1 - i, z_A = -\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} \text{ (يرمز } \overline{z_C} \text{ إلى مرافق } z_C \text{)}$$

1) أكتب الأعداد z_A, z_B, z_C و $z_D = \overline{z_C}$ على الشكل الأسّي .

2) E نقطة من المستوي لاحقاً z_E حيث: $z_E = \frac{z_A}{z_B}$.

بين أن النقط C, D و E تنتمي الى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2} - 2)$

عين قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S .

4) نضع: $\theta = \frac{-3\pi}{4}$. عين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيلياً صرفاً.

التمرين 89: دورة 2018 م

I-أ) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $4z^2 - 2z + 1 = 0$ (E)

ب) أكتب العددين $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسّي حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E) .

II) المستوي المركب إلى المعلم متعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقتها $z_A = 4, z_B = 1 + i\sqrt{3}, z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1-أ) احسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم حدّد طبيعة المثلث ABC .

ب- استنتج أن B صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته.

2- أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ ثم استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

3- حدّد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق ما يلي:

$$|iz + \sqrt{3} - i| = |z - 1 + i\sqrt{3}|$$

4- بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

التمرين 90: دورة 2017 م 1

I حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - 2 + 2i)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 8) = 0$
 II المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C التي لاحقاً : $z_A = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 2(1-i)$
 1- أ) أكتب كلا من z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي ، ثم استنتج ان A, B, C تنتمي لدائرة (Ω) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيلياً صرّفاً.

ج) نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حيث $z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ مع k يسمح $\mathbb{R}_+$
 تحقق أن C النقطة تنتمي إلى (Γ) ، ثم عيّن وإنشئ (Γ) .

3- الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ و h التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2 -
 عيّن طبيعة التحويل hor وعناصره المميزة ، ثم أستنتج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل hor .

التمرين 91: دورة 2017 م 2

I اكتب العدد $\left(\frac{5}{2} + i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركب $\frac{21}{4} + 5i$
 II المستوى المركب إلى المعلم متعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C و I ذات اللواحق : $z_I = i$ و $z_C = -\overline{z_A}$ و $z_B = -\frac{3}{2}i$ ، $z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
 1) أكتب كلا من z_A و z_C على الشكل الجبري.

2) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ الشكل الأسّي مستنتجاً طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحوّل A إلى I .
 أ) أكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عيّن نسبته وزاويته.

ب) نعرّف من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ التحويل التقطي T_n كمايلي : $T_n = \underbrace{SoSo\dots S}_n$
 عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون T_n تحاكياً، عيّن عندئذ عناصره المميزة.

التمرين 92: دورة 2017 الاستدراكية م 1

I حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 - 10z + \frac{29}{2} = 0$

II المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C, D

التي لاحقاً: $z_D = i$ و $z_C = -\overline{z_A}$ ، $z_B = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

1-أ) أكتب كلا من z_A ، z_B على الشكل الجبري، ثم عَلم A ، B ، C و D في المعلم السابق.

ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ لشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2-جد لاحقة النقطة E نظيرة B بالنسبة للنقطة D ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCE$.

3- أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه B الذي يحول A إلى D ثم حدد نسبته وزاويته.

4-عرّف متتالية النقط $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ كمايلي: $A_0 = A$ و $A_{n+1} = S(A_n)$ (z_n لاحقة النقطة A_n)

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n - z_B = 5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$

ب) عيّن قيم n الطبيعية حتى تنتمي النقط A_n إلى المستقيم (AB)

التمرين 93: دورة 2017 الاستدراكية م2

I- نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) $z^2 - 2(1 - \sin \alpha)z + 2(1 - \sin \alpha) = 0$

حيث α عدد حقيقي . (نرمز بـ: z_1 و z_2 إلى حلّي المعادلة (E))

1) عيّن الحلين z_1 و z_2 المعادلة (E).

2) نضع: $\alpha = \frac{\pi}{6}$. بيّن أن $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 1$.

II - المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاً: $z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2z_A$.

1- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B} \right)^n$ عددا حقيقيا موجبا.

2- ليكن التحويل التقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات الاحقة z النقطة M' ذات

الاحقة z' والمعرف بـ: $z' = (1 + z_A)z + 2z_B$.

عين طبيعة التحويل S ثم حدد عناصره المميزة.

3- (Γ) مجموعة النقط M ذات الاحقة z حيث $\arg(\bar{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$

- تحقق ان النقطة C تنتمي إلى (Γ)، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وإنشئها.

التمرين 94: دورة 2016 م1

1) أ- حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$

ب- استنتج حلول المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z+1+i(1-\sqrt{3}))^2 - 4z + 1 - 4i(1-\sqrt{3}) = 0$

(2) θ عدد حقيقي، $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له.

أ) اكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسّي.

ب) عيّن θ علماً أن: $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{z_0} = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ ($\bar{z}_0$ مرافق العدد المركب z_0)

ج) n عدد طبيعي. من أجل قيمة θ المتحصل عليها اكتب $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2} \right]^n$ على الشكل المثلي

د) عيّن قيم العدد الطبيعي التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2} \right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

(3) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C النقط التي

لاحقاً على الترتيب z_A, z_B, z_C حيث: $z_A = 2-i, z_B = 2+i, z_C = 1+i\sqrt{3}$.

أ) عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$
ب) استنتج ان الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

ج) النقطة E من المستوي المركب ذات اللاحقة z_E حيث:

$$\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left| \frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} \right| = 2 \end{cases}$$

- بيّن أن: $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$.

- بيّن أن النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة
(4) M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z ، I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.
أ) عيّن z_I لاحقة النقطة I .

ب) α عدد حقيقي. نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تحقق: $z - z_I = e^{i\alpha}$
- تحقق ان النقطة E تنتمي للمجموعة (Γ) .

- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة عندما يتغير α في $\mathbb{R}$.

التمرين 95: دورة 2016 م 2

I-1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$

$$(2) \begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases} \text{ حيث } z_1 \text{ و } z_2$$

II- المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C, D, H النقط

التي لاحقاً على الترتيب حيث: $z_A = i\sqrt{2}, z_B = -i\sqrt{2}, z_C = 1+i, z_D = 1-i$ و $z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$

حيث E النقطة التي تحقق: $\overline{DE} = 2\overline{DO}$.

1) اكتب z_H على الشكل الأسّي واستنتج نوع المثلث BEC

2) S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقاً z النقطة M' لاحقاً z' حيث: $z' = z_A \cdot z + z_B$

أ) ماهي طبيعة التحويل S ؟ وماهي عناصره المميزة؟

ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C ونصف قطرها CD .

ج) عيّن (γ') صورة (γ) بالتحويل S واستنتج مساحتها.

3) عيّن (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M) تختلف عن B و C ذات اللاحقة z التي يكون من

أجلها العدد $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقياً سالباً.

التمرين 96: دورة 2015 م 1

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C, H و I لاحقاً

على الترتيب: $z_A = i, z_B = -2+i, z_C = -3, z_H = -3+4i$ و $z_I = -1-i$.

1) أ) مثل النقط A, B, C, H و I في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

ب) عيّن النسبة والزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B ويحول النقطة A إلى النقطة C .

2) عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

3) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$

ب) استنتج ان المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

(ج) بيّن أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

(4) بيّن أن النقط G، H و I في استقامة.

(5) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حيث: $z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

(أ) بيّن أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ).

(ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة.

(ج) إنشئ المجموعة (Γ).

(د) تحقق أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ).

التمرين 97: دورة 2015 م2

(1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0 \quad (\text{لاحظ أن: } (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3})$$

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوى، لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ و $z_B = \overline{z_A}$

(2) (أ) بيّن أن: $\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}}$ ، (ب) استنتج عمدة للعدد المركب z_A .

(ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$.

(3) (أ) حل، في مجموعة الاعداد الصحيحة، المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $7x - 2y = 1$.

(ب) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من الاعداد الصحيحة، حلا للمعادلة $7x - 24y = 12$

فإن x يكون مضاعفا للعدد 12.

(ج) استنتج كل الثنائيات $(x; y)$ من الاعداد الصحيحة حلول للمعادلة $7x - 24y = 12$.

(د) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

التمرين 98: دورة 2014 م1

1- حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(z-1-2i)(z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3})=0$

2- A، B، C و D نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لاحقاً على الترتيب $z_A = 1+2i$ ، $z_B = 1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C = 1+\sqrt{3}-i$ و $z_D = 1-2i$.

أ) بين أن: $AB=CD$ و $(BC) \parallel (AD)$. (ب) تحقق أن: $\frac{z_B+z_D}{2} \neq \frac{z_A+z_C}{2}$ واستنتج طبيعة الرباعي ABCD

3- أ) بين أن: $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ استنتج أن D صورة A بتشابه مباشر مركزه B يطلب تعيين نسبته وزاوية

ب) بين أن المثلث ADB قائم وان النقط A، B، C و D تنتمي لدائرة واحدة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

ج) استنتج إنشاء للرباعي ABCD.

التمرين 99: دورة 2014 م 2

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A و B النقطتان اللتان لاحقاً على

الترتيب: $a = -2+6i$ و $b = -1+2i$.

1) اكتب العدد المركب $1+i$ على شكل أسي.

2) S التحويل التقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقة z النقطة M' لاحقاً z حيث: $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2$

أ) النقطة ذات اللاحقة d حيث: $d = 2i$ ، جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S، ماذا تستنتج؟

ب) بين أن: $z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - d)$ واستنتج طبيعة وعناصر التحويل S.

3) (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $3x + 5y = 11$.

أ) تحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) ، ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

ب) M_0 صورة M_0 بالتحويل S، بين أن المستقيمين (BM_0) و (BA) متعامدان.

4) x و y عدنان صحيحان من المجال $[-5;5]$. عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث

يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدان، حيث M' هي صورة M بالتحويل S.

التمرين 100: دورة 2013 م 1

I-a و b عدنان موجبان تماماً. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

النقط A، B، C و E التي لاحقاً: $z_A = ae^{\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B = -a\sqrt{2}$ ، $z_C = \overline{z_A}$ و $z_E = be^{\frac{3\pi}{2}}$ على الترتيب.

1. أكتب على الشكل الآسي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

ب- حدد طبيعة الرباعي OABC ثم استنتج مساحته.

2. التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ ، يحول كل نقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$

أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ، ثم تحقق أن $S(A)=E$.

ب- بين أن مساحة الرباعي OEFG هي b^2 (مقدربوحدة المساحة) حيث $S(B)=F$ و $S(C)=G$.

3. أ- احسب بدلالة a و b العبارة: $|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E| \cos(\arg \frac{z_C}{z_E})$.

ب- استنتج CE^2 بدلالة a و b.

التمرين 101: دورة 2013 م

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2 + z + 1 = 0$.

2. نعتبر في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

النقط A ، B و M ذات اللاحقات: $z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و z على الترتيب.

أ- اكتب z_A على الشكل الآسي.

ب- عين مجموعة النقط M من المستوي ، حيث : $\arg(z - z_A)^2 = \arg(z_A) - \arg(z_B)$.

3. أ- التحويل التقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = z_A \cdot z + z_B \cdot \sqrt{3}$.

- ما طبيعة التحويل r ؟ عين عناصره المميزة .

ب- التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ ، حيث : $z' = -2z + 3i$.

- عين نسبة ومركز التحاكي h .

ج- نضع: $S = \text{hor}$ عين طبيعة التحويل S مبرزاً عناصره المميزة

ثم تحقق أن عبارته المركبة هي: $z' = 2e^{\frac{\pi i}{3}}(z - i) + i$.

4. بيّن أن النقط O, Ω و E في استقامة حيث: $S(O)=C, S(C)=D, S(D)=E$: علماً أن: $\Omega(i)$

5. أ- عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z = 2e^{i\theta} + e^{\frac{\pi i}{2}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

ب- عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S

التمرين 102: دورة 2012 م 1

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

A, B, C نقط من المستوي لاحقاً على الترتيب: $z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = z_A + z_B$

أ- اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة: z_A, z_B و $\frac{z_A}{z_B}$.

ب- عين لاحقة كل من A', B', C' صور النقط A, B, C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ج- بيّن أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

3) نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z - z_A| = |z - z_B|$ (أبيّن أن (Δ) هو محور الفواصل).

ب) بين أن حلي المعادلة: $\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)^2 = i$ عدنان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين)

التمرين 103: دورة 2012 م 2

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z^2 + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

2) نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C و D

التي لواحقتها على الترتيب $z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \overline{z_A}, z_C = -2i, z_D = \overline{z_C}$

- بيّن أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ثم أنشئ النقط A, B, C و D

3) نرمز بـ z_E إلى النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة لـ O .

أ- بيّن أن $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{(-\frac{\pi}{3})i}$. ب- بيّن أن النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C

يطلب تعيين زاويته.

ج- استنتج طبيعة المثلث AEC . د- H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

- عيّن طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH .

التمرين 104: دورة 2011 م 1

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A, B, C ثلاث نقط من المستوى

$$z_C = \sqrt{3}(1+i), z_B = -1+i, z_A = 1-i$$

(1) اكتب على الشكل الاسي الاعداد المركبة z_A, z_B, z_C

(2-أ) احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم فسر النتائج المحصل عليها

(ب) حدد طبيعة المثلث ABC

(3) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي ACBD معيناً.

(4) التحويل التقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوى لاحقتها النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = (-1+i)z + 1 - 3i$.

(أ) عيّن طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

(ب) استنتج طبيعة التحويل ToT وعناصره المميزة.

التمرين 105: دورة 2011 م 2

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0 \dots (E)$

(1-أ) تحقق أن 3 حل للمعادلة (E)، ثم عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = (z - 3)(az^2 + bz + c)$$

(ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

(2-المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

النقط A، B و C صور الأعداد $z_A = 3, z_B = \sqrt{3}i, z_C = -\sqrt{3}i$.

بين أن المثلث ABC متقايس الاضلاع

$$z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

عين z_E لاحقة النقطة E صورة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

$$z_F = 1 - \sqrt{3}i$$

(أ) احسب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان

(ب) عين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون OEGF مربعاً.

التمرين 106: دورة 2010 م 2

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1. نسمي A, B, I النقط التي لاحتقاها على الترتيب: $z_A = 1 - 4i, z_B = -1 - 2i, z_I = 1 - 2i$.
أ) علم النقط A, B, I .

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$

ج) مانوع المثلث IAB ؟

د) صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2.

احسب اللاحقة z_C للنقطة C .

هـ) D مرجح $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$. احسب اللاحقة z_D للنقطة D

و) بين أن $ABCD$ مربع.

2. عين وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $2\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MC}\|$

3. عين وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 1$.

الجزء الثالث: بكالوريات النظام القديم

التمرين 107: دورة 2001 ع ط

1- أوجد الجذريين التربيعيين للعدد المركب: $-6 + i6\sqrt{3}$

2- استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $\left(z + \frac{3\sqrt{3} + i}{4}\right)^2 = \frac{-6 + 6\sqrt{3}i}{16}$

3- ليكن $2z_1 = -\sqrt{3} + i$ و $z_2 = -\sqrt{3} - i$ عدنان مركبان. اكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله الأسّي.

4- في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر العدد المركب $L = -2(\sin\theta + i\cos\theta)$. حيث θ عدد حقيقي والتكن النقط A, B, M صور الأعداد المركبة z_1, z_2 و L على الترتيب.

أ- أحسب طولية وعمدة للعدد المركب L بدلالة θ . ب- نضع: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ أثبت أن المثلث ABM قائم.

التمرين 108: دورة 1995 علوم

في المجموعة $\mathbb{C}$ ، نعتبر كثير الحدود: $P(z) = z^3 - (1 + i\sqrt{2})z^2 + (1 + i\sqrt{2})z - i\sqrt{2}$

1- أ- بيّن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلاً تخيلياً صرفاً z_0 يطلب تعيينه

ب- عيّن عددين حقيقيين a و b حتى يكون: $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$

ج- حل عندئذ في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ وأكتب الحلول على الشكل الأسّي.

2- في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

لتكن النقط A, B, C ذات الواحق: $z_A = i\sqrt{2}$ ، $z_B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_C = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ على التوالي.

أ- عين لاحقة النقطة G مرجح النقط A, B, C والمرفقة بالمعاملات $-3, (1 + \sqrt{6})$ و $(1 - \sqrt{6})$ على التوالي
ب- بين أن النقطة G مركز الدائرة بالمثلث ABC .

التمرين 109: دورة 2001 ت ن

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z : $(z - 1 + \sqrt{3})(z^2 - 2z + 4) = 0 \dots (E)$

2- ليكن z_1, z_2 و z_3 حلول المعادلة (E) حيث: $z_1 \in \mathbb{R}$ ، $\text{Im}(z_2) > 0$ و z_2 الحل الآخر.

أ- اكتب كلا من z_2 و z_3 على الشكل المثلي. ب- بيّن أن $z_2^{2010} + z_3^{2010} = 2^{2011}$

3- في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C ذات الواحق:

$$z_C = 1 - \sqrt{3}i \quad \text{و} \quad z_B = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_A = 1 - \sqrt{3}$$

أ- احسب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- عيّن احداثي النقطة G مرجح الجملة المثلة $\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\}$.

ج-عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = -3$

التمرين 110: دورة 1998 علوم

1-نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2(1+2i)z + 9 + 20i = 0 \dots (1)$

بين أن: $z_1 = 3 - 2i$ حلا للمعادلة (1) ثم استنتج الحل الثاني z_2

2- $M_1(3-2i)$ ، $M_2(-1+6i)$ نقطتان في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. ω نقطة من حامل محور الفواصل و R الدوران الذي مركزه ω ويحول M_1 إلى M_2 . عين مركز وزاوية الدوران R.

التمرين 111: دورة 2005 علوم

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-1+i)(z^2-2z+5)=0 \dots (1)$ ثم أكتب الجداء $z_3 \cdot z_2 \cdot z_1$ على الشكل الأسّي

(2) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط $A(1)$ ، $B(1+2i)$ ، $C(1-i)$.

أوجد إحداثيي النقطة G مركز مركز ثقل النقط A، B و C

(3) تحويل نقطي للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

أبين أن: $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$ استنتج طبيعة التحويل T

ب) اكتب العبارة المركبة ثم العبارة التحليلية للتحويل T.

(4) A' ، B' و C' صور النقط A، B، C بالتحويل T. بين أن النقط A' ، B' و C' في استقامية.

التمرين 112: دورة 2003 علوم

نعتبر كثير الحدود: $f(z) = z^3 - (2-3i)z^2 - 9z - 18 + 27i$

1-أ) أحسب $\overline{f(z)}$ بدلالة $\bar{z}$. بين أن المعادلة $f(z) = 0$ تقبل حلين مترافقين واستنتج الحل الثالث

2- في المستوي المركب، نعتبر النقط A، B و C ذات الإحداثيات $3i$ ، $-3i$ و $2-3i$ على الترتيب.

أ) عين زاوية نسبة والتشابه المباشر الذي مركزه B ويحول C إلى A. واستنتج طبيعة المثلث ABC

ب) عين إحداثيي النقطة G مركز المسافات المناسبة للنقط A، B و C المرفقة بالمعاملات 1، 2 و -2

ج) عين مجموعة النقط M من المستوي حيث: $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = 25$

التمرين 113: دورة 2005 علوم

1-نعتبر كثير الحدود: $f(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - (5-3i)z + 2 + 2i$

أبين أن المعادلة: $f(z) = 0$ تقبل حلين تخيليين يطلب حسابهما.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z) = 0$

2- المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لتكن النقط $A(0;1)$ ، $B(0;2)$ ، $C(1;1)$

أ) عين زاوية ونسبة التشابه الذي مركزه B ويحول A إلى C

ب) تحويل نقطي للمستوي في نفسه يرفق بالنقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = (1+i)z + 2$

أ) عين طبيعة التحويل t واذكر عناصره المميزة

ب) ماهي طبيعة المثلث BMM' ؟ ج) عين مجموعة النقط M من حيث: $OM = OM'$.

التمرين 114: دورة 2002 علوم

نعتبر العدد المركب $z = 2\sin^2(\alpha) + i\sin(2\alpha)$ حيث α المجال $[0, 2\pi]$

1. عيّن حسب قيم α ، طوليلة و عمدة العدد z .
2. بمحصر العدد $\sin\alpha$ ، أعط حصرا للجزء الحقيقي لـ z
3. نسمي x الجزء الحقيقي و y الجزء التخيلي للعدد z
أ) جد علاقة بين x ، y مستقلة عن α .
ب) باستعمال العلاقة السابقة، تحقق من الإجابة رقم 2
ج) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. عيّن مجموعة النقط $M(z)$ عندما يتغير α

التمرين 115: دورة 2005 تك

ليكن العدد المركب: $\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

- 1- أحسب α^2 ثم أكتب α^2 على الشكل المثلثي ثم إستنتج الطويلة وعمدة لعدد α .
- 2) أحسب كلا من $\cos(\frac{7\pi}{12})$ ، $\sin(\frac{7\pi}{12})$
- 3) أحسب كلا من α^{2011} و α^{1432} وبين أن: $\alpha^{12k} \in \mathbb{R}$

4) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. عين مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $|\frac{z}{z-1}| = |\alpha|$

التمرين 116: دورة 1980 علوم

α عدد المركب حيث: $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

- 1) أحسب α^2 ثم α^4 . 2) أحسب $|\alpha^4|$ و عمدة لـ α^4 ، ثم استنتج $|\alpha|$ و عمدة لـ α
- 3) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. عين مجموعة النقط $M(z)$ حيث: $|\alpha z| = 8$

التمرين 117: دورة 1998 علوم

حل في $\mathbb{C}$ ، كلا من المعادلتين: $z^2 - 2z + 5 = 0$ ؛ $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

2) في المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C, D و صور الأعداد المركبة: $1-2i, 1+\sqrt{3}+i, 1+2i$ و $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب

أ. ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

ب. أكتب معادلة للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

ج. أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (γ) .

د. أنشئ (γ) والنقط A, B, C, D في المعلم المعطى

الجزء الرابع: بكالوريات اجنبية

التمرين 118: /فرنسا 2019 N-Calédonie

((ترجمة الأستاذ: محمد جبالي))

- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
أجب بصحيح أو خطأ- مع التعليل- في كل حالة من الحالات التالية:
1. لتكن، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $z(z^2 - 8z + 32) = 0 \dots (E)$.
• صور حلول المعادلة (E) ، هي رؤوس مثلث مساحته تساوي 16.
 2. لتكن (E) : مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z التي تحقق $|iz| = |z - 3|$.
• (E) هي الدائرة ذات المركز O ، ونصف القطر 3.
 3. نعتبر المتتالية (z_n) المعرفة، من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ $z_n = (1 - i\sqrt{3})^n$.
نرمز بـ M_n ، إلى النقطة ذات اللاحقة z_n .
• من أجل كل عدد طبيعي n ، النقط M_n, O, M_{n+3} ، في استقامية.
 4. نعتبر المعادلة ذات المجهول x ، التالية: $(e^{ix} - e^{-ix})(e^{i(2x)} + e^{-i(2x)}) = 0$.
• هذه المعادلة تقبل فقط، في المجال $]-\pi, \pi[$ ، أربعة حلول هي: $-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

التمرين 119: /فرنسا 2018 Pondichéry

((ترجمة الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي))

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0 \dots (E)$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي
2. من أجل كل عدد مركب z نضع: $P(z) = 3z^4 - 7i\sqrt{3}z^3 - 18z^2 + 7i\sqrt{3}z + 3$
أ) تحقق أن: $P(i\sqrt{3}) = 0$ وأن: $P(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 0$.
ب) بين أنه من أجل كل عدد مركب غير معدوم: $P(-\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^4} \cdot P(z)$
ج) استنتج ان كلا من العددين المركبين $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ و $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ هما حلان للمعادلة $P(z) = 0$.
- 3-أ) في المستوي المنسوب إلى متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ علم النقط A, B, C ذات اللواحق $e^{i\frac{\pi}{3}}, 3e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ على الترتيب.
ب) أنشئ النقطة D والمعرفة كما يلي: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ ثم اكتب لاحقة D على الشكل القطبي
ج) المستقيم الذي يشمل النقطة A والموازي للمستقيم (BD) يقطع (OD) في النقطة E .
عين لاحقة النقطة E .

التمرين 120: فرنسا 2018 ع ت

(ترجمة الأستاذ جبالي/بتصرف)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، حيث $\|\vec{u}\| = 1 \text{ cm}$.

لتكن النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = -4$ ؛ $z_B = 2$ ؛ $z_C = 4$ ، ولتكن النقط A', B', C' التي لواحقها على الترتيب: $z_{A'} = j \cdot z_A$ ؛ $z_{B'} = j \cdot z_B$ ؛ $z_{C'} = j \cdot z_C$.

حيث j هو العدد المركب المعروف كما يلي: $j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) أَعْطِ الأشكال الجبرية لـ $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ ، $z_{C'}$.

(ب) اكتب j على الشكل الأسّي، واستنتج الأشكال الأسّيّة للأعداد المركبة $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ ، $z_{C'}$.

(2) (أ) علّم، بدقة، ودون استخدام القيم التقريبية، النقط A', B', C' .

(ب) برهن أن النقط A', B', C' في استقامة.

(3) أثبت أن النقط A', B', C' هي صور النقط A, B, C بدوران، يطلب تعيين مركزه وزاويته.

(4) لتكن النقط M, N, P : منتصفات القطع المستقيمة $[A'C]$ ، $[C'C]$ ، $[C'A]$ على الترتيب.

ما طبيعة المثلث MNP ؟ علّل

التمرين 121: تونس 2017 ع ت

(ترجمة الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي)

(1) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 - (\sqrt{5} + 2i)z + 1 + 4i\sqrt{5} = 0 \dots (E)$

(أ) احسب $(\sqrt{5} + 2i)^2$ ، ثم بيّن أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta = -3(\sqrt{5} + 2i)^2$

(ب) استنتج أن حلّي المعادلة (E) هما: $a = (\sqrt{5} + 2i)(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})$ و $b = (\sqrt{5} + 2i)(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})$

(2) في الشكل 1 $(O; \vec{u}; \vec{v})$ معلم متعامد والمتجانس في المستوي.

(C) دائرة مركزها O ونصف قطرها 3.

بيّن أن النقطة Q ذات اللاحقة $\sqrt{5} + 2i$ تنتمي

إلى (C) ثم أنشئ النقطة Q.

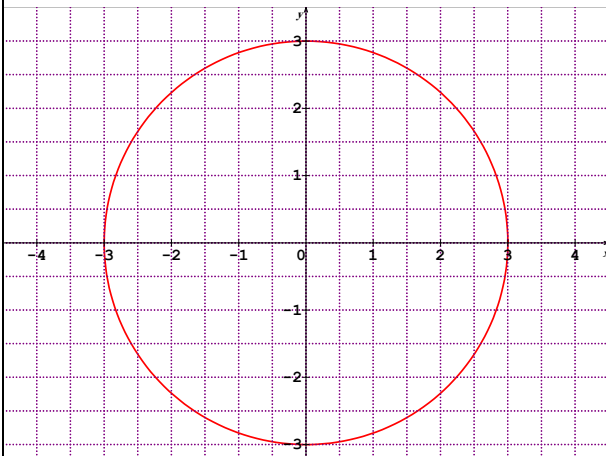
(3) نعتبر النقطتين A و B واللتين لاحقتاهما a و b (أ)

بيّن أن النقطتين A و B تنتميان للدائرة (C)

(ب) تحقق أن: $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OQ}$ استنتج أن الرباعي

OAQB معين.

(ج) إنشئ النقطتين A و B في المعلم السابق.



التمرين 122: المغرب 2017 ع ت

نعتبر العددين a و b حيث: $a = \sqrt{3} + i$ و $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

1- أ) تحقق أن: $b = (1+i)a$: ثم استنتج أن: $|b| = 2\sqrt{2}$ و أن $\arg(b) = \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

ب) استنتج أن مما سبق: $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B واللتين لاحقتهما a و b على الترتيب والنقطة C ذات اللاحقة c حيث $c = -1 + i\sqrt{3}$.

أ- تحقق من أن: $c = ai$ واستنتج أن: $OA = OC$ و أن $(\vec{OA}; \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

ب- بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{OC}$.

ج- استنتج أن الرباعي $OABC$ مربعاً.

التمرين 123: السنغال 2016 ع ت

1- نعتبر المعادلة $(E): z^3 - 13z^2 - 59z - 87 = 0$ حيث z عدد مركب.

أ) تحقق أن 3 حاد للمعادلة (E) .

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة C .

2- المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق $z_A = 3$, $z_B = 5 - 2i$, $z_C = 5 + 2i$ على الترتيب والتكن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي M (تختلف عن A و B)

أ) أحسب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ أو استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) فسر هندسياً طويلة وعمدة العدد المركب $L = \frac{z-3}{z-5+2i}$. عين مجموعة النقط M حيث $L \in \mathbb{R}^*$

2) (C) الدائرة المحيطة بالمثلث ABC والنقطة $\Omega(2-i)$.

أ) أعط الكتابة المركبة للدوران R الذي مركزه Ω وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ب) عين (C') صورة الدائرة (C) بالدوران R , ثم أكتب معادلة ديكارتية للدائرة (C')

التمرين 124: المغرب 2015 ع ت

I- نعتبر العدد المركب a حيث: $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1) بين أن طويلة العدد a تساوي $2\sqrt{2} + \sqrt{2}$.

2) تحقق أن : $a = 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$

3-أ) أثبت أن : $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ و $\sin 2\theta = 2\cos\theta \cdot \sin\theta$ باستعمال $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$

ب) بيّن أن : $a = 4\cos^2 \frac{\pi}{8} + 4i \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$

ج) استنتج الشكل المثلثي للعدد a ، ثم بيّن أن : $a^4 = 2(2\sqrt{2} + \sqrt{2})^4 \cdot i$

II- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ النقطتين Ω و A اللتين لاحتقائهما على الترتيب : $z_\Omega = \sqrt{2}$ و $z_A = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ واليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

1) بيّن أن z_B : لائحة النقطة B صورة النقطة A بالدوران R هي $2i$.

2) حدد مجموعة النقط M ذات اللائحة z بحيث : $|z - 2i| = 2$

التمرين 125: دورة 2015-مالي

نعتبر العدد المركب : $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

1) أحسب u^2 ثم u^4 .

2) أحسب طوييلة u^4 وعمدة u^4 ثم استنتج الطوييلة وعمدة u

3) حدد القيمتين المضبوطتين للعددين : $\sin \frac{13\pi}{8}$ و $\cos \frac{13\pi}{8}$

4) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

عين مجموعة النقط $M(z)$ حيث : $|uz| = 8$

التمرين 126: دورة 2014 a-guyane

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ وحدة الطول هي 2cm .

نعتبر الدالة f والتي ترفق بكل عدد مركب z العدد المركب : $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1) احسب صورة العدد المركب $-1 + i\sqrt{3}$ بالدالة f .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z) = 5$ ، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسّي. ثم مثل بيانيا النقطتين

A و B صورتني حلّي المعادلة $f(z) = 5$ (صورة الحل الذي جزءه التخيلي موجب).

3) ليكن λ عدد حقيقي. ونعتبر المعادلة $f(z) = \lambda$ ذات المجهول z .

عين مجموعة قيم العدد الحقيقي λ والتي من أجلها يكون للمعادلة $f(z) = \lambda$ حلين مترافقين.

4) لتكن (F) مجموعة النقط من المستوي المركب والتي لاحتقتها z تحقق : $|f(z) - 8| = 3$.

- بيّن أن (F) هي دائرة مركزها $\Omega(-1;0)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$ ، ثم أرسم (F) في المعلم السابق.
- (5) ليكن z عدد مركب حيث: $z = x + iy$ (x و y عدداً حقيقيين)
- أ) بيّن أن الشكل الجبري للعدد المركب $f(z)$ هو $x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$
- ب) لتكن (E) مجموعة النقط من المستوي المركب والتي لاحتقتها z والتي من أجلها يكون $f(z)$ عدداً حقيقياً. بيّن أن (E) هي اتحاد مستقيمين (D_1) و (D_2) يطلب تعيين معادلتيهما.
- ارسم المستقيمين (D_1) و (D_2) في المعلم السابق.
- (6) عيّن إحداثي نقط تقاطع المجموعتين (F) و (E).

التمرين 127: دورة 2011S-polynesie

- أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:
- المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- (1) لتكن النقطتان $A(2-5i)$ ، $B(7-3i)$ المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.
- (2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z-i| = |z+2i|$ هي مستقيم يوازي محور الفواصل.
- (3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العدد المركب $(3+i\sqrt{3})^{3n}$ تخيلي صرف.
- (4) إذا كانت $\frac{\pi}{2}$ عدة للعدد المركب غير المعدوم z فإن $|z+i| = 1+|z|$.
- (5) عدد مركب غير معدوم ، إذا كان $|z|=1$ فإن $z^2 + \frac{1}{z^2}$ عدد حقيقي.

التمرين 128: دورة 2011S-المغرب

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 18z + 82 = 0$
- (2) في المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C ذات اللاحقات $z_A = 9+i$ ، $z_B = 9-i$ و $z_C = 11-i$ على الترتيب.
- أ- بيّن أن: $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -i$ ، ثم استنتج أن المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.
- ب- أعط الشكل المثلثي للعدد المركب $4(1-i)$.
- ج- بيّن أن $(z_C - z_A)(z_C - z_B) = 4(1-i)$ ، ثم استنتج أن: $AC \times AB = 4\sqrt{2}$.
- (3) ليكن العدد المركب z لاحقة النقطة M من المستوي و z' لاحقة النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه B وزاويته $\frac{3\pi}{2}$.
- أ- بيّن أن: $z' = -iz + 10 + 8i$.
- ب- تحقق أن لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R هي $9-3i$

التمرين 129: دورة 2006S أمريكا

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقاط A, B, C, D ذات اللواحق

$$z_D = -3 - i, z_C = 5i, z_B = 1 + i, z_A = 4 + i$$

(1) علم النقاط A, B, C, D

(2) f تحويل نقطي للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$: $z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i$

(أ) عين صورتَيِ النقطتين A, B بالتحويل f

(ب) أثبت أنه توجد نقطة واحدة صامدة E بالتحويل f يطلب تعيين لاحقها

(3-أ) برهن أنه من أجل كل عدد مركب z : $z' - z = -2i(2 - i - z)$

(ب) أستنتج قيمة $\frac{MM'}{EM}$ وقيسا بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{ME}; \overrightarrow{MM'})$ حيث M تختلف عن E

(ج) ماهي طبيعة المثلث EMM' ؟

(د) لتكن النقطة G ذات الاحقة $z_G = -1 - i\sqrt{3}$

* أكتب z_G على الشكل الأسّي. * أنشئ النقطة G' صورة G بالتحويل f .

التمرين 130: دورة 2009-المغرب

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقاط A, B, C ذات لواحقها على

$$a = 2 - 2i, b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, c = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$$

(1) أكتب كلا من a و b على الشكل المثلثي.

(2) نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$

(أ) z لاحقة نقطة M من المستوي المركب و z' لاحقة نقطة M' صورة M بالدوران R . بين أن $z' = bz$

(ب) تحقق أن النقطة C هي صورة A بالدوران R .

(3) بيّن أن : $\arg(c) = \arg(a) + \arg(b) + 2k\pi$ ثم حدد عمدة للعدد المركب c .

التمرين 131: دورة 2005-الهند

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقاط A, B, I لواحقها

على الترتيب $z_I = 1, z_A = 1 - 2i$ و $z_B = -2 - 2i$ ، ونعتبر (γ) الدائرة قطرها $[AB]$.

نقوم بإنشاء كل العناصر التي ستندرج في التمرين بأخذ الوحدة $2cm$.

1- عين مركز الدائرة (γ) ، ثم احسب نصف قطرها.

2- نعتبر النقطة D لاحقها $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$

- اكتب z_D على الشكل الجبري ، ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (γ) .

3- نعتبر نقطة E من (γ) لاحتقتها z_E حيث أحد أقياس الزاوية $(\overline{\Omega I}, \overline{\Omega E})$ هو $\frac{\pi}{4}$.

أ) حدد الطويلة وعمدة لـ: $z_E + \frac{1}{2}$ ب) استنتج أن: $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$

4- نعتبر R التحويل التقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(z + \frac{1}{2} \right)$

أ) حدد طبيعة التحويل R وعناصره المميزة.

ب) نعتبر النقطة K لاحتقتها $z_K = 2$

عين حسابيا صورة K بالتحويل R ، ثم بين كيف يمكن تعيين هذه النتيجة هندسيا.

التمرين 132: دورة 2004-الهند

الجزء الأول:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية: $z^2 - 2z + 4 = 0$

نرمز للحلين بـ: z_1 و z_2 لحلي المعادلة حيث الجزء التخيلي لـ: z_1 موجب.

2- عين القيمة المضبوطة للعدد $(z_1)^{2004}$ على الشكل الاسي ثم على الشكل الجبري.

الجزء الثاني:

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (الوحدة $2cm$)

نعتبر النقطتين A و B لاحتقتها على الترتيب $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{3}$

1- بين أن النقطتين A و B تنتميان إلى نفس الدائرة ذات المركز O ، يطلب تعيين نصف قطرها.
- ارسم الدائرة، ثم أنشئ النقطتين A و B .

2- نعتبر النقطة O' صورة O بالدوران R_1 مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، والنقطة B' صورة B

بالدوران R_2 مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- احسب لاحتقي النقطتين O' و B' ، ثم أنشئهما.

3- نعتبر النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[OB]$

أ) ماذا يمكن التخمين عن المستقيم (AI) بالنسبة للمثلث AOB' .

ب) احسب لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AI}$ ، ثم بين أن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OB'}$ هي: $3\sqrt{3} - i$

ج) هل تخمينك في السؤال (3- أ) صحيح؟