



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

⑥

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 26

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	...	...	1	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	...	0	-		0	+
$f(x)$		$-\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$				$+\infty$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) علما أن الدالة f فردية:

أ/ عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب/ بيّن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$ و $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$

ج/ أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.

(2) نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$.

أ/ مثّل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحني (C_f) . نأخذ: $f(\sqrt{3}) \cong 3$ و $\sqrt{3} \cong 1.7$

(3) نفرض أن عبارة الدالة f هي من الشكل:

$$f(x) = ax + b + \ln\left(c + \frac{2}{x-1}\right)$$

حيث: a, b, c أعداد حقيقية.

- باستعمال نتائج الجدول أعلاه، بيّن أن: $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$.

(4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0 \dots (E)$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \ln(f(x))$$

- ادرس تغيرات الدالة g .

(I)

1) أ/ تعيين إشارة $f'(x)$ مع التبوير:

نضع α, β, γ حيث:

x	$-\infty$	α	β	1	$\sqrt{3}$	γ
$f'(x)$	...	0	-		0	+

لدينا الدالة f فردية ، معناه:

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

ومنه:

$$-f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

لدينا من جدول التغيرات (المُعطى):

$$x \in]\alpha; \beta[\text{ لما } f'(x) < 0$$

$$\text{لما } -x \in]\alpha; \beta[\quad \text{لما } \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} < 0 \quad \Leftarrow$$

$$\text{لما } x \in]-\beta; -\alpha[\quad \text{لما } f'(x) < 0 \quad \Leftarrow$$

ولدينا كذلك:

$$x \in]\sqrt{3}; \gamma[\text{ لما } f'(x) > 0$$

$$\text{لما } -x \in]\sqrt{3}; \gamma[\quad \text{لما } \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} > 0 \quad \Leftarrow$$

$$\text{لما } x \in]-\gamma; -\sqrt{3}[\quad \text{لما } f'(x) > 0 \quad \Leftarrow$$

$$\text{ولدينا: } x = \sqrt{3} \text{ لما } f'(x) = 0 \quad \text{معناه} \quad -x = \sqrt{3} \text{ لما } f'(-x) = 0 \quad \text{ومنه } x = -\sqrt{3}$$

$$\text{ومنه: } \alpha = -\sqrt{3} \quad \text{و} \quad \beta = -1 \quad \text{و} \quad \gamma = +\infty$$

اذن:

$$x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[\quad \text{لما: } f'(x) > 0$$

$$x \in]-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}[\quad \text{لما: } f'(x) < 0$$

$$\text{ب/ تبين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty \quad \text{لدينا من الجدول السابق:}$$

$$\text{نضع } x = -t \quad \text{(الدالة } f \text{ فردية أي: } f(-t) = -f(t))$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{-t \rightarrow -\infty} [f(-t)]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(-t)] \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} [-f(t)] \\
&= - \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] \\
&\quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty \\
&= -(+\infty) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

- تبين أن: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$

بنفس الفكرة السابقة (نضع $x = -t$) نجد: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$

- تبين أن: $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$

لدينا:

$$\begin{aligned}
\underbrace{f(-\sqrt{3})}_{f(-\sqrt{3}) = -f(\sqrt{3})} &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\
\Rightarrow -f(\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\
\Rightarrow f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

ج/ اكمال جدول تغيرات الدالة f السابق:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$		$+\infty$	$\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$	$+\infty$

(2) التمثيل البياني:

قبل أن نشرع في التمثيل البياني، نستخرج من جدول التغيرات المستقيمات المقاربة

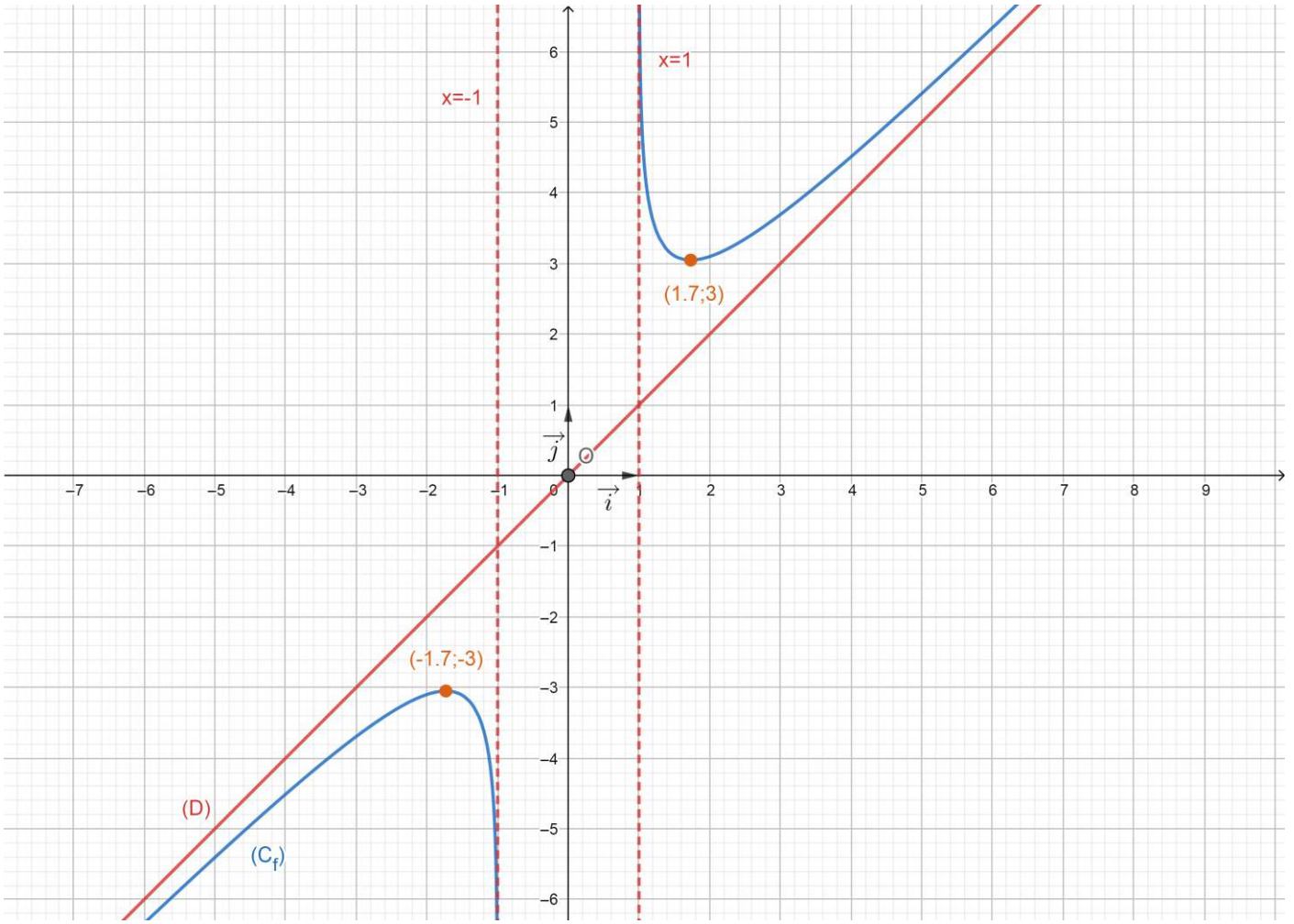
لدينا:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$.

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = -1$ و $x = 1$
- نرسم المقارب المائل (D)
- نعين النقط الحدية

- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(3) تبين أن: $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= a + \frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{c + \frac{2}{x-1}} \\
 &= a - \frac{\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{c(x-1) + 2}{x-1}} \\
 &= a - \frac{\frac{2}{x-1}}{c(x-1) + 2} \\
 &= a - \frac{2}{c(x-1)^2 + 2(x-1)}
 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f'(\sqrt{3}) = 0 \\ f'(-\sqrt{3}) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \\ a - \frac{2}{c(-\sqrt{3}-1)^2 + 2(-\sqrt{3}-1)} = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \dots (*) \\ a - \frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} = 0 \dots (**) \end{cases} \end{aligned}$$

ب طرح (*) من (**): نجد:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} + \frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} &= 0 \\ \Rightarrow c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1) &= c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1) \\ \Rightarrow c(4 + 2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} - 2 &= c(4 - 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2 \\ \Rightarrow c(4 + 2\sqrt{3}) - c(4 - 2\sqrt{3}) - 4\sqrt{3} &= 0 \\ \Rightarrow c(4\sqrt{3}) &= 4\sqrt{3} \\ \Rightarrow \boxed{c = 1} \end{aligned}$$

نعوض قيمة c في (*) نجد:

$$\begin{aligned} a - \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 &\Rightarrow a = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} \\ &\Rightarrow \frac{2}{4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2} \\ &\Rightarrow a = \frac{2}{4 - 2} \\ &\Rightarrow \boxed{a = 1} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{3} + b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right) = \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b = \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2\sqrt{3} - 2 + 3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 0}$$

4) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0 \Rightarrow \frac{xe^m - xe^x - e^m - e^x}{e^m - e^x} = 0$$

$$\Rightarrow xe^m - xe^x - e^m - e^x = 0$$

$$\Rightarrow e^m(x - 1) - e^x(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow e^m(x - 1) = e^x(x + 1)$$

$$\Rightarrow e^m = e^x \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$$

$$\Rightarrow m = \ln\left[e^x \times \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow m = \ln(e^x) + \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(\frac{x + 1 + 1 - 1}{x - 1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$ ومنه:

لما	$m < f(-\sqrt{3})$	أي	$m \in]-\infty; f(-\sqrt{3})[$	للمعادلة حلان سالبان
لما	$m = f(-\sqrt{3})$			للمعادلة حل مضاعف هو $x = -\sqrt{3}$
لما	$f(-\sqrt{3}) < m < f(\sqrt{3})$	أي	$m \in]f(-\sqrt{3}); f(\sqrt{3})[$	للمعادلة لا تقبل حلول
لما	$m = f(\sqrt{3})$			للمعادلة حل مضاعف هو $x = \sqrt{3}$
لما	$m > f(\sqrt{3})$	أي	$m \in]f(\sqrt{3}); +\infty[$	للمعادلة حلان موجبان

(II) دراسة تغيرات الدالة g :

لدينا: $g(x) = \ln(f(x))$

نلاحظ أن: $g(x) = k \circ f = k(f(x))$ حيث: $k(x) = \ln x$

- حساب النهايات:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x)] = +\infty$

اذن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [g(x)] = +\infty$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x)] = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

لدينا: $f(x) > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\sqrt{3})$	$+\infty$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶