

## 1.1

أذكر صحة أم خطأ الجمل الآتية مع التعليل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3} = 2 \quad (2)$$

(3) إذا كانت  $f(x) = ax + b + g(x)$  فإن  $y = ax + b$

معادلة مستقيم مقارب مائل لبيان الدالة  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4x - 1}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad (4)$$

(5) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  فإن  $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$

(6) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  فإن  $f(x) \geq x^2$

(7) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  فإن  $f(x) \leq x - 1$

(8) الدالة  $f: x \mapsto \frac{1}{x}$  مستمرة على  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(9) الدالة  $f: x \mapsto x + \sqrt{x}$  مستمرة على  $[0; +\infty[$

(10) الدالة  $f: x \mapsto \frac{1}{x} - \sqrt{x}$  مستمرة على  $[0; +\infty[$

(11) الدالة  $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 4}$  مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

(12) إذا كانت الدالة  $f$  مستمرة على مجال  $[a; b]$  فإن المعادلة

$f(x) = 0$  تقبل على الأقل حلا في المجال  $]a; b[$ .

(13) إذا كانت  $f$  دالة مستمرة على المجال  $[1; 5]$  فإن الدالة  $f$  مستمرة

عند 3.

(14) إذا كانت  $f$  دالة مستمرة على مجال  $I$  فإن الدالة  $\frac{1}{f}$  مستمرة

على المجال  $I$ .

5 min Maths

Bac 2021

الاستمرارية الاشتقاقية

النهايات

الشعب العلمية

اعداد الأستاذ: شعبان أسامة

(3) خاطئة لأننا لا نعلم  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x)$  التي يجب أن تكون معدومة

لكي تكون الجملة صحيحة .

(4) خاطئة لأن  $x$  يؤول إلى 0 و ليس إلى  $-\infty + \infty$

$$(5) \text{ صحيحة لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x} \right) = 0$$

(6) صحيحة لأن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  و لدينا :  $f(x) \geq x^2$

(7) صحيحة لأن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-3) = -\infty$  و  $f(x) \leq x-3$

(8) خاطئة لأن الدالة  $f$  غير معرفة عند 0 و عليه فهي غير معرفة

على  $\square$  و من ثم غير مستمرة على  $\square$  .

(9) صحيحة لأن الدالة هي مجموع دالتين مستمرتان على  $[0; +\infty[$

هما :  $x \mapsto \sqrt{x}$  و  $x \mapsto x$

(10) خاطئة لأن الدالة غير معرفة عند 0 .

(11) صحيحة لأن الدالة هي مركب دالتين مستمرتان

الأولى :  $x \mapsto x^2 + 4$  مستمرة على  $\square$  و موجبة

الثانية :  $x \mapsto \sqrt{x}$  مستمرة على  $\square_+$  .

(12) خاطئة فمثلا الدالة  $f : x \mapsto x^2 - 1$  مستمرة على المجال

$[2 ; 4]$  لكن المعادلة  $x^2 - 1 = 0$  ليس لها حل في المجال

$[2 ; 4]$  و حتى تقبل حل أكيد يجب أن يكون  $f(a) \cdot f(b) < 0$  .

(13) صحيحة لأن الدالة  $f$  مستمرة عند كل قيمة من المجال  $]1 ; 5[$  .

(14) خاطئة إلا إذا كانت  $f$  غير معدومة على  $I$  .

(15) خاطئة . فمثلا الدالة  $f : x \mapsto -x^2 - 1$  سالبة تماما على  $\square$

لكن غير متناقصة تماما لأن :  $f'(x) = -2x$  و عليه فهي

متناقصة تماما من أجل  $x > 0$  و متزايدة تماما من أجل  $x < 0$  .

(15) إذا كانت الدالة  $f$  سالبة تماما على مجال  $I$  فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $I$  .

(16) إذا كانت الدالة  $f$  غير مستمرة عند عدد  $x_0$  فإنها غير معرفة عند  $x_0$  .

(17) إذا كانت الدالة  $f$  معرفة عند عدد  $x_0$  فإنها غير مستمرة عند  $x_0$  .

(18) إذا كانت  $f$  دالة مستمرة على مجال  $I$  فإن الدالة  $\sqrt{f}$  مستمرة على المجال  $I$  .

(19) الدالة  $\sqrt{f}$  مستمرة على  $I$  .

(20) الدالة :  $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$  مستمرة على  $\square$  لأن :

الدالة  $x \mapsto x^2 - 1$  مستمرة على  $\square$

و الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}$  مستمرة على  $\square$  .

(19) الدالة :  $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$  مستمرة على  $\square$

لأن الدالة  $x \mapsto x^2 - 1$  مستمرة على  $\square$

و الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}$  مستمرة على  $\square$  .

(20) المعادلة  $x \sin x = 1$  تقبل على الأقل حلا في المجال  $\left[ 0 ; \frac{\pi}{2} \right]$  .

الحل:

(1) صحيحة لأن  $+\infty \rightarrow -x \rightarrow -\infty$  و عليه :  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{-x} = +\infty$

$$(2) \text{ صحيحة لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( 2 - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} = 2$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(3x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 4) = 7$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 4) = 7$

(2) لدينا :  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 \neq 0\}$

نحل المعادلة :  $x^2 - 5x + 6 = 0$  فنجد :  $x = 2$  أو  $x = 3$

ومنه :  $D_f = \mathbb{R} - \{2; 3\}$

أي :  $D_f = ]-\infty; 2[ \cup ]2; 3[ \cup ]3; +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

لحساب بقية النهايات : نكتب جدول إشارة المقام

$x$	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	○	-	○	+

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 3} = -4$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x - 3} = -4$

نلاحظ أن  
اليسط  
هومتطابقة  
شهيرة نقوم  
بتحليله

(16) خاطئة . فمثلا الدالة  $f$  حيث :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

معرفة عند 1 ( $f(1) = 3$ ) لكنها غير مستمرة عند 1 لكون :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

(17) صحيحة . لأنه حتى تكون دالة مستمرة عند  $x_0$  يجب أن تكون :

معرفة عند  $x_0$  وتحقق  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  .

(18) خاطئة لأنه قد تكون  $f$  سالبة و عليه فالدالة  $\sqrt{f}$  غير معرفة.

(19) خاطئة إلا إذا كانت  $x^2 - 1 > 0$  وهذا غير محقق في  $\mathbb{R}$  .

(20) صحيحة لأن الدالة  $f$  حيث :  $f(x) = x \sin x$  مستمرة

على  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  و  $1 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

## 2.

عين مجموعة تعريف كل دالة فيما يلي ثم احسب النهايات عند أطرافها.

(1)  $f(x) = \frac{3x^3 + x - 4}{x - 1}$  (2)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

(3)  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$  (4)  $f(x) = \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3}$

الحل:

(1) لدينا :  $f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$

- $D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$$

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \longrightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \xrightarrow{<} 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$$

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \longrightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \xrightarrow{>} 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$f(x) = \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} \quad \text{(4) لدينا :}$$

$$\bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 4x - 3 \neq 0\}$$

$$\text{نحل المعادلة : } 4x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \text{نجد : } x = -\frac{1}{2} \text{ أو } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{ومنه : } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\}$$

$$D_f = ]-\infty; -\frac{1}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}[ \cup ]\frac{3}{2}; +\infty[ \quad \text{أي :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(2x^3+1)}{(2x+1)(2x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^3+1}{2x-3} = \frac{\frac{3}{4}+1}{-4} = \frac{-3}{16}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \longrightarrow 5 \\ x^2 - 5x + 6 \xrightarrow{<} 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = +\infty$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \longrightarrow 5 \\ x^2 - 5x + 6 \xrightarrow{>} 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} \quad \text{(3) لدينا :}$$

$$\bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 3 \neq 0\}$$

$$\text{نحل المعادلة } x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \text{فنجد } x = -3 \text{ أو } x = -1$$

$$\text{إن : } D_f = \mathbb{R} - \{-3; -1\}$$

$$D_f = ]-\infty; -3[ \cup ]-3; -1[ \cup ]-1; +\infty[ \quad \text{وعليه :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2-4)}{(x+3)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{-5}{2}$$

إشارة المقام لحساب النهايات :

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$	
$3x^2+4x+3$	+	○	-	○	+

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+5-9)(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4})}{[x - (2x-4)](\sqrt{x+5} + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4})}{-(x-4)(\sqrt{x+5} + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}}{-(\sqrt{x+5} + 3)} = \frac{2+2}{-(3+3)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - 6)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)\sqrt{x-2}}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+3)\sqrt{x-2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}][\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}]}{(x-1)[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - (2x-1)}{(x-1)[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}]}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\sqrt{x+1} + 1]}{[\sqrt{x+1} - 1][\sqrt{x+1} + 1]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\sqrt{x+1} + 1]}{(x+1) - 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \xrightarrow{<} 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4x^2 - 4x - 3$	+	○	○	+

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = +\infty$$

$$\begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \xrightarrow{>} 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

3

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x} - 2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{x-1} \quad (3)$$

الحل:

حساب النهايات :

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}}$$

نضرب ونقسم  
على مرافق كل  
من البسط و  
المقام

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x+5} - 3)(\sqrt{x+5} + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2x-4})(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4})(\sqrt{x+5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[ 2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right]}{x \left[ 1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = \frac{2 - 1}{1 - 2} = -1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 \left( 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}}{-4x - \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x - \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[ -1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right]}{x \left[ -4 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left[ \sqrt{x+1} + 1 \right]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + 1 = 2$$

.4

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{x^2 + 1}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{4x^2 + x}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \sqrt{x} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 1} - x \right] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{-x - \sqrt{x^2 + 4}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} \quad (5)$$

الحل:

حساب النهايات :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x - \sqrt{x^2 \left( 4 + \frac{1}{x} \right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x - \sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x - x \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}$$

5.

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \quad (4)$$

باستعمال  
العدد  
المشتق

الحل:

حساب النهايات :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} \times \cos x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}} \times \cos x = 2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1 - 2}{-4 + 1} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 1} - x][\sqrt{x^2 + 1} + x]}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} [-x + \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} [-\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (-\sqrt{x} + 1) = -\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2}][\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}]}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - (x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}} = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{-x - \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(-x + \sqrt{x^2 + 4})}{[-x - \sqrt{x^2 + 4}][ -x + \sqrt{x^2 + 4}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(-x + \sqrt{x^2 + 4})}{x^2 - (x^2 + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{4} [-x + \sqrt{x^2 + 4}] = -\infty$$

الحل:

حساب النهايات :

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

بوضع :  $x - \frac{\pi}{2} = z$  أي  $x = \frac{\pi}{2} + z$

لما  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  فإن  $z \rightarrow 0$  وعليه :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3z\right)}{-\sin z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos\frac{3\pi}{2} \cos 3z - \sin\frac{3\pi}{2} \sin 3z}{-\sin z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 3z}{-\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{\sin 3z}{3z}}{-\frac{\sin z}{z}} = -3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x}$$

بوضع  $x - \frac{\pi}{4} = z$  أي  $x = \frac{\pi}{4} + z$

لما  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  فإن  $z \rightarrow 0$  وعليه

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + z\right)}{1 + \cos 4\left(\frac{\pi}{4} + z\right)}$$

تغيير المتغير

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = 2$$

.6

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \cos 4x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z + \sin z}{1 - \cos z - \sin z} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{z}{2}\right) + 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}}{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{z}{2}\right) - 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{z}{2} + 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}}{2\sin^2 \frac{z}{2} - 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{z}{2} \left[ \sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2} \right]}{2\sin \frac{z}{2} \left[ \sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2} \right]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2}} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

### 7.7

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} \quad \text{تعتبر الدالة } f:$$

(C) تمثيلها البياني .

1- عين مجموعة تعريف الدالة ثم أحسب النهايات عند أطرافها.

2- بين أنه يمكن كتابة  $f(x)$  على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \left[ \sin \frac{\pi}{4} \cos z + \cos \frac{\pi}{4} \sin z \right]^2}{1 + \cos(\pi + 4z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos z + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin z \right)^2}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \times \frac{1}{2} (\cos z + \sin z)^2}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2 z + \sin^2 z + 2 \sin z \cos z)}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + 2 \sin z \cos z)}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2 \sin z \cdot \cos z}{1 - \cos 4z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2 \sin z \cdot \cos z}{1 - (1 - 2 \sin^2 2z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2 \sin z \cdot \cos z}{2 \sin^2 2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z \cdot \cos z}{(2 \sin z \cdot \cos z)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z \cdot \cos z}{4 \sin^2 z \cdot \cos^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \sin z \cdot \cos z} \end{aligned}$$

وعليه :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \sin z \cdot \cos z} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \sin z \cdot \cos z} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x}$$

$$\text{بوضع } x - \frac{\pi}{2} = z \quad \text{نجد } x = \frac{\pi}{2} + z$$

$$\text{وعليه : لما } x \longrightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{فإن } z \longrightarrow 0$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x + 1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (a + b)x + b + c}{x + 1}$$

باستعمال  
المطابقة

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -4 \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{إذن :} \quad f(x) = x - \frac{4}{x + 1}$$

-3 تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

فإن :  $x = -1$  معادلة مستقيم مقارب.

$$\text{و بما أن :} \quad f(x) = x - \frac{4}{x + 1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x + 1} = 0$$

فإن :  $y = x$  معادلة المستقيم المقارب المائل عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$ .

-4 دراسة الوضع النسبي لـ  $(\Delta)$  و  $(C)$  :

$$f(x) - y = \frac{-4}{x + 1}$$

ومنه :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$x + 1$	-		+
$f(x) - y$	+		-

إذن  $(\Delta)$  لا يقطع  $(C)$ .

لما  $x \in ]-\infty; -1[$   $(C)$  يقع فوق  $(\Delta)$

لما  $x \in ]1; +\infty[$   $(C)$  يقع تحت  $(\Delta)$

-3 عين معادلات المستقيمات المقاربة.

-4 نفرض  $(\Delta)$  المستقيم المقارب المائل.

ادرس الوضع النسبي للمنحني  $(C)$  و المستقيم  $(\Delta)$ .

الحل:

-1 مجموعة التعريف :

$$D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[ \quad ; \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

- النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} = +\infty$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 4 \longrightarrow -4 \\ x + 1 \xrightarrow{<} 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} = -\infty$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 4 \longrightarrow -4 \\ x + 1 \xrightarrow{>} 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

(2) تبين أنه يمكن كتابة  $f(x)$  على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

$$\text{إذن :} \quad f(x) = \frac{(ax + b)(x + 1) + c}{x + 1}$$

$f$  دالة معرفة بالعلاقة :  $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$

1- احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- احسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$  ثم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$

3- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C_f)$ .

الحل:

حساب النهايات :

$$D_f = ]-\infty ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

2- حساب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} - 3x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(-x - \sqrt{x^2 + 1})}{-x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{-x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{-x - \sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-x - \sqrt{x^2 + 1}} = 0 \end{aligned}$$

3- تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 0 \quad \text{بما أن :}$$

فإن :  $y = 3x$  معادلة مستقيم مقارب مائل عند  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0 \quad \text{بما أن :}$$

فإن :  $y = x$  معادلة مستقيم مقارب مائل عند  $-\infty$ .

9.

تعتبر الدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \frac{4 + \sin x}{x^2}$

1- عين عدنان حقيقيان  $a$  و  $b$  بحيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$a \leq 4 + \sin x \leq b$$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$  يكون :

حيث  $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$  و  $v$  و  $u$  دالتان يطلب تعيينهما.

3- استنتج النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

الحل:

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

• إذا كان  $\alpha - 1 = 0$  أي  $\alpha = 1$  :  $f(x) = -\frac{1}{3}$

وعليه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

• إذا كان :  $\alpha^2 - 1 = 0$  و  $\alpha - 1 \neq 0$  أي  $\alpha + 1 = 0$   
ومنه :  $\alpha = -1$ .

$$f(x) = \frac{-2x + 1}{-3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$$

• إذا كان  $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\alpha - 1)x}{(\alpha^2 - 1)x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x}{(\alpha^2 - 1)x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

### 11.

فردالة عددية معرفة كما يلي :

1- تعيين a و b :

لدينا :  $-1 \leq \sin x \leq 1$  ومنه :  $3 \leq 4 + \sin x \leq 5$

2- تبيان أن :  $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$

لدينا :  $3 \leq 4 + \sin x \leq 5$

وعليه :  $\frac{3}{x^2} \leq \frac{4 + \sin x}{x^2} \leq \frac{5}{x^2}$

ومنه :  $\frac{3}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{5}{x^2}$

3- استنتاج النهايات :

• بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

• بما أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

فإن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

4-  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + \sin x}{x^2} = +\infty$

### 10.

فردالة معرفة بالعلاقة :  $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x + 1}{(\alpha^2 - 1)x - 3}$

حيث  $\alpha$  عدد حقيقي .

احسب النهايات التالية :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

الحل:

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ : ومنه } f(1) = \frac{(1)^2}{(1)^2 + 1} \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x^2} + 1 = 0$$

إذن  $f$  غير مستمرة عند 1 لأنها لا تقبل نهاية عند 1.

13.

$f$  دالة معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 4} , & x > 0 \\ f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} , & x \leq 0 \end{cases}$$

عين العدد الحقيقي  $b$  بحيث تكون الدالة  $f$  مستمرة عند 0

الحل:

تعيين  $b$  بحيث تكون  $f$  مستمرة عند 0 :

$$\text{لدينا : } f(0) = \sqrt{2(0)^2 + 1} \text{ ومنه : } f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + b}{x^2 + 4} = \frac{b}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2x^2 + 1} = 1$$

حتى تكون  $f$  مستمرة عند 0 يجب أن يكون :

$$\frac{b}{4} = 1 \text{ ومنه } b = 4$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} ; & x \neq 1 , x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

1- عين مجموعة تعريف الدالة  $f$

2- ادرس استمرارية  $f$  عند -1 .

الحل:

1- تعيين مجموعة التعريف :

$$D_f = ]-\infty ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ \text{ : أي } D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

2- دراسة الاستمرارية عند -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$$

وعليه :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$  ومنه  $f$  مستمرة عند -1 .

12.

$f$  دالة معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} , & x \geq 1 \\ f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1 , & x < 1 \end{cases}$$

أدرس استمرارية الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  .

الحل:

- دراسة الاستمرارية على  $\mathbb{R}$  للدالة  $f$  :

• من أجل  $x \in ]1 ; +\infty[$  : الدالة  $f$  مستمرة لأنها دالة ناطقة .

• من أجل  $x \in ]-\infty ; 1[$  : الدالة  $f$  مستمرة لأنها دالة كثيرة حدود .

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{|x-1|}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{دالة معرفة بالعبرة :}$$

1- عين مجموعة التعريف

2- أدرس استمرارية الدالة  $f$  على مجموعة تعريفها

الحل:

(1) مجموعة التعريف :  $D_f = \mathbb{R}$

(2) دراسة الاستمرارية على  $D_f$  :

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{x-1}{x-1} ; x > 1 \\ f(x) = x - \frac{x-1}{x-1} ; x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 ; x > 1 \\ f(x) = x - 1 ; x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

• الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $]-\infty ; 1[$  لأنها دالة كثيرة الحدود

• الدالة  $f$  مستمرة على  $]1 ; +\infty[$  لأنها دالة كثيرة حدود .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

ومنه  $f$  غير مستمرة عند 1 وبالتالي  $f$  غير مستمرة على  $D_f$  .

دالة معرفة بجدول تغيراتها كما يلي :

$x$	$-\infty$	$3^-$	$2^-$	$3$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$-3$	$+4$	$3$

ما هو عدد حلول المعادلة  $f(x) = 0$  في  $\mathbb{R}$  .

الحل:

تعيين عدد حلول المعادلة :  $f(x) = 0$

(1) في المجال :  $]-\infty ; -3[$  لدينا :  $f$  مستمرة و متزايدة تماما

و لدينا :  $f(-3) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ومنه للمعادلة  $f(x) = 0$  حل وحيد في المجال  $]-\infty ; -3[$  .

(2) في المجال  $]-3 ; -2[$  : الدالة  $f$  مستمرة و متناقصة تماما

ولدينا  $f(-3) = 1$  و  $f(-2) = -3$  ومنه حسب نظرية القيم

المتوسطة للمعادلة  $f(x) = 0$  حل وحيد في المجال  $]-3 ; -2[$  .

(3) في المجال  $]-2 ; 3[$  : الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما

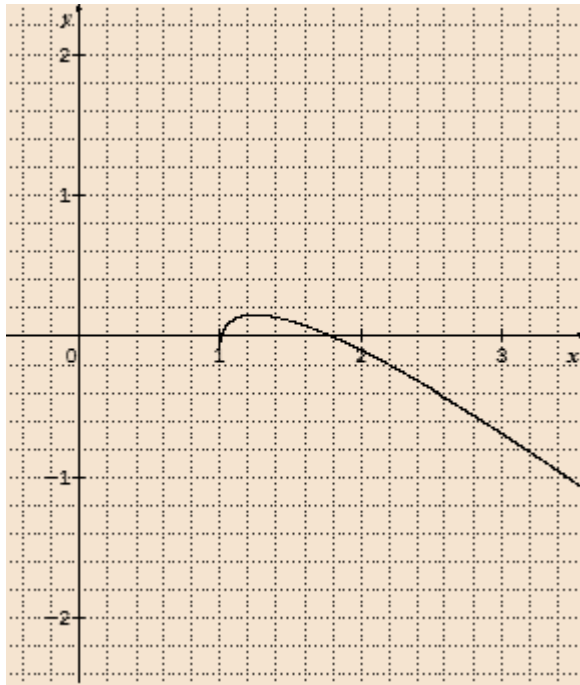
ولدينا :  $f(-2) = -3$  و  $f(3) = 4$  ومنه حسب نظرية القيم

المتوسطة للمعادلة  $f(x) = 0$  حل وحيد في المجال  $]-2 ; 3[$  .

وبالتالي : عدد حلول المعادلة  $f(x) = 0$  على  $\mathbb{R}$  هي ثلاث حلول.

الحل:

تم انشاء هذا التمثيل البياني باستعمال المبرمج (Sin qua non)



المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا محصور في  $[1,78 ; 1,79]$  .

18.

أثبت أن المعادلة :  $2x - \cos x = 0$

تقبل على الأقل حلا في المجال :  $0 ; \frac{\pi}{6}$

الحل:

إثبات أن المعادلة :  $2x - \cos x = 0$  تقبل على الأقل حلا في المجال

$$\left[ 0 ; \frac{\pi}{6} \right]$$

16.

إليك جدول التغيرات لدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	$-4$	$4$	$-2$

ما هو عدد حلول المعادلة  $f(x) = 2$  في  $\square$  .

الحل:

تعيين عدد حلول المعادلة  $f(x) = 2$

(1) في المجال  $]-\infty ; 0]$  : الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما و تأخذ قيمها في المجال  $]-4 ; 4]$  و بما أن  $2 \in ]-4 ; 4]$  فإن للمعادلة  $f(x) = 2$  حل وحيد حسب نظرية القيم المتوسطة .

(2) في المجال  $[0 ; +\infty[$  : الدالة  $f$  مستمرة و متناقصة تماما و تأخذ قيمها في المجال  $]-2 ; 4[$  و بما أن  $2 \in ]-2 ; 4[$  فإن للمعادلة  $f(x) = 2$  حل وحيد حسب نظرية القيم المتوسطة .

إذن للمعادلة  $f(x) = 2$  حلين في  $\square$  .

17.

$f$  دالة معرفة على المجال  $[1 ; +\infty[$  بالعلاقة :

$$f(x) = -x + \sqrt{x-1} + 0,9$$

أنشئ التمثيل البياني للدالة  $f$  باستعمال آلة بيانية . ثم استنتج عدد حلول

المعادلة :  $f(x) = 0$  مع إعطاء حصرا لكل منها بتقريب  $10^{-2}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 2
 \end{aligned}$$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  وعليه  $f$  مستمرة عند 0 .

-2 دراسة الاستمرارية على  $D_f$  :

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \text{ لدينا}$$

ولدينا:  $x \mapsto x \sin x$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  لأنها جداء دالتين مستمرتين على  $\mathbb{R}$  .

ولدينا:  $x \mapsto 1 - \cos x$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  لأنها مجموع دالتين مستمرتين على  $\mathbb{R}$  .

إذن الدالة  $f$  هي حاصل قسمة دالتين مستمرتين على  $\mathbb{R}$  فهي مستمرة على

$$\left[ -\frac{\pi}{2}; 0 \right] \cup \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] \text{ ومنه الدالة } f \text{ مستمرة على } D_f .$$

• الدالة  $f$  هي مجموع دالتين و منه فهي مستمرة على  $\mathbb{R}$  لأن الدالتين مستمرتين على  $\mathbb{R}$  .

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و عليه : } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} \cdot$$

$$\text{إذن : } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} \text{ و عليه : } f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$$

$$f(0) = 2(0) - \cos 0 \text{ و عليه : } f(0) = -1$$

$$\text{إذن : } f\left(\frac{\pi}{6}\right), f(0) < 0$$

وحسب نظرية القيم المتوسطة للمعادلة  $f(x) = 0$  حل على الأقل في المجال  $\left] 0; \frac{\pi}{6} \right[$  .

19

$f$  دالة معرفة على المجال  $\left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$  كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x}, x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

-1 ادرس استمرارية الدالة  $f$  عند 0

-2 ادرس استمرارية  $f$  على مجموعة التعريف .

الحل:

-1 دراسة الاستمرارية عند 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}$$

فدالة معرفة و مستمرة على المجال  $[0 ; 1]$  ز تأخذ قيمها في المجال  $[0 ; 1]$ .

- 1- برهن على وجود عدد  $\alpha$  من المجال  $[0 ; 1]$  بحيث :  $f(\alpha) = \alpha$ .
- 2- فسر هندسيا هذه النتيجة .
- 3- هل تبقى النتائج السابقة صحيحة على مجال  $[a ; b]$  حيث  $a < b$ .

الحل:

1- البرهان على وجود  $\alpha$  :

نعرف الدالة  $g$  كمايلي :  $g(x) = f(x) - x$  على المجال  $[0 ; 1]$

• الدال  $g$  مستمرة على  $[0 ; 1]$  لأنها مجموع دالتان مستمرتان على  $[0 ; 1]$ .

• ولدينا  $g(0) = f(0) - 0$  و  $g(1) = f(1) - 1$

بما أن  $f(x)$  تنتمي إلى المجال  $[0 ; 1]$  فإن  $0 \leq f(x) \leq 1$

أي أن :  $0 \leq f(0) \leq 1$  و عليه  $0 \leq g(0) \leq 1$

إذن  $g(0) \geq 0$  .

وكذلك  $0 \leq f(1) \leq 1$  و عليه  $-1 \leq f(1) - 1 \leq 0$

إذن  $g(1) \leq 0$  و منه :  $g(1) \cdot g(0) \leq 0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد  $\alpha$  من المجال  $[0 ; 1]$

بحيث  $g(\alpha) = 0$

أي  $f(\alpha) - \alpha = 0$  و عليه :  $f(\alpha) = \alpha$

2- التفسير الهندسي للنتيجة :

العدد  $\alpha$  هو حل للمعادلة  $f(x) = x$  و منه التمثيل البياني للدالة  $f$

يتقاطع مع المنصف الأول :  $y = x$  في نقطة فاصلتها  $\alpha$  .

3- لندرس صحة النتائج السابقة في المجال  $[a ; b]$ .

لتكن الدالة  $g$  حيث :  $g(x) = f(x) - x$

• الدالة  $g$  مستمرة على  $[a ; b]$  لأنها مجموع دالتان مستمرتان على  $[a ; b]$

•  $g(a) = f(a) - a$  و  $g(b) = f(b) - b$

لدينا :  $a \leq f(x) \leq b$  و عليه :  $a \leq f(a) \leq b$

ومنه :  $0 \leq f(a) - a \leq b - a$  وبالتالي :  $f(a) - a \geq 0$

أي أن :  $g(a) \geq 0$

وكذلك :  $a \leq f(b) \leq b$  و عليه :  $g(b) \leq 0$

إذن :  $g(a) \cdot g(b) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد  $\alpha$  من المجال

$[a ; b]$

بحيث  $f(\alpha) - \alpha = 0$  و عليه  $f(\alpha) = \alpha$

و عليه  $(C_r)$  يتقاطع مع المنصف الأول في نقطة فاصلتها  $\alpha$  .

إذن تبقى النتائج السابقة صحيحة

21.

برهن أن كل كثير حدود درجته فردية ينعدم على الأقل مرة في  $\mathbb{R}$  .

الحل:

نعتبر دالة كثيرة حدود من الدرجة  $n$  ودرجته فردية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث  $a_n \neq 0$  و  $n$  عدد فردي نفرض  $a_n > 0$

• الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  .

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = -\infty$$

وعليه حسب نظرية القيم المتوسطة للمعادلة  $f(x) = 0$  حل على الأقل في  $\square$ .

أي أن  $f(x)$  ينعدم مرة واحدة على الأقل.

