

تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

شعبة : تقني رياضي

التمرين [1] [باك 2008] [م1] [ن7]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; 2]$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $4cm$)

(1) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2]$.

بـ أنشئ (C_f) .

جـ برهن أنه إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن $f(x) \in [0; 2]$.

(2) نعرف المتتالية العددية (u_n) على \mathbb{N} كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أبرز وجود المتتالية (u_n) ، ثم أحسب u_1 و u_2 .

بـ مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل وذلك بالاستعانة بـ (C_f) والمستقيم (D) ذو المعادلة : $y = x$.

جـ ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها إنطلاقاً من التمثيل السابق .

(3) أبرهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

بـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} > u_n$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب المتتالية (u_n) ؟

جـ تحقق أن : $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} (u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

عين عدداً حقيقياً k من المجال $]0; 1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |u_n - \sqrt{3}|$.

بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [2] [باك 2008] [م2] [ن8]

(1) f الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$.

و (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

أـ أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

بـ أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ بين أن المستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أرسم المنحنى (C_f) والمستقيم (D) .

د - بين أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$.

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أـ باستخدام (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x$ مثل u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل .

بـ خمن اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

جـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ ، وأن المتتالية (u_n) متزايدة .

استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التعريف [3] [باك 2011] [م1] [ن5]

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* كما يلي: $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

- (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج أن $u_n > 1$.
- (2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة، وأحسب نهايتها.
- (3) ليكن P_n الجداء المعرف كما يلي: $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$.
- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$.
- (4) (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N}^* بـ: $v_n = \ln u_n$.
- عبر بدلالة P_n عن S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التعريف [4] [باك 2013] [م2] [ن4]

(u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.

(v_n) المتتالية المعرفة على كما يلي: $v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$.

- (1) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم أحسب حدها الأول.
- (2) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- (3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- (4) أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

التعريف [5] [باك 2014] [م1] [ن4]

(I) f هي الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x-1)$.

- (1) حدد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$.
- (2) أدرس اتجاه تغير f .

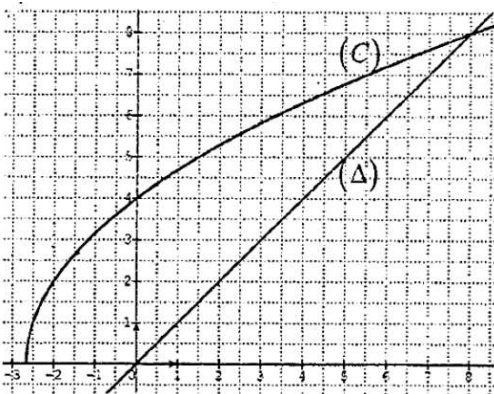
(3) بـ بين أنه إذا كان $x \in [2; e+1]$ فإن $f(x) \in [2; e+1]$.

(II) (u_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $u_0 = e+1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$.

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in [2; e+1]$.
- (2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها.

التعريف [6] [باك 2015] [م2] [ن4]

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$.



(1) h الدالة المعرفة على المجال $[-\frac{8}{3}; +\infty[$ بما يلي: $h(x) = \sqrt{6x+16}$.

- (2) (C) وتمثيلها البياني في المستوي المنسوب معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذوالمعادلة $y = x$. (أنظر الشكل)
- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها و موضعا خطوط الإنشاء)
- بـ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
- (2) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 8$.
- بـ بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$.

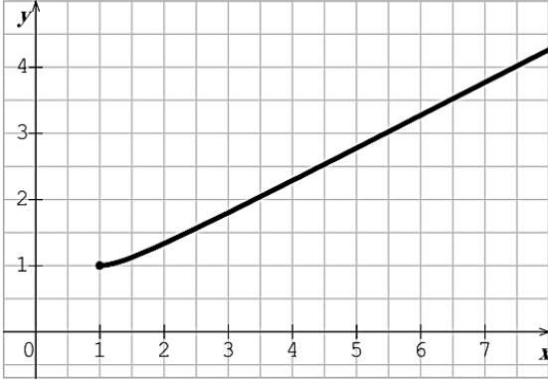
جـ- استنتج إتجاه تغيير (u_n) .

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [7] [باك 2016] [2م] [ن5]

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$. (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



(1) بين أن الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

(2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ : $u_0 = 6$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) .

على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

ب- أعط تخمينا حول إتجاه تغيير المتتالية (u_n) و تقاربها .

ج- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$.

د- أدرس إتجاه تغيير المتتالية (u_n) .

هـ- برز تقارب المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المرفقتين على \mathbb{N} بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$.

أ برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الأول .

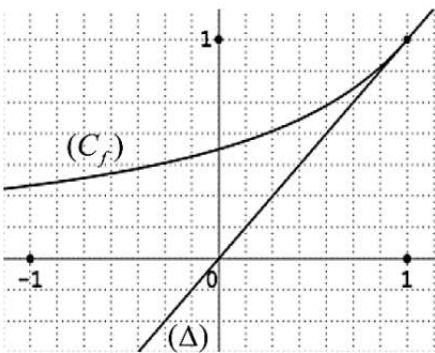
ب- أكتب w_n بدلالة n ، ثم v_n بدلالة n .

ج- بين أن : $u_n = 1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \dots + \frac{1}{w_n}$.

التمرين [8] [باك 2017] [1م] [ن4]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2-x}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و



المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة : $y = x$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول : $u_0 = -1$ و من أجل كل

عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3 مبرزاً خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغيير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(2) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$.

(3) أدرس إتجاه تغيير المتتالية (u_n) ثم أستنتج أنها متقاربة .

(4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كمايلي : $v_n = \frac{2}{1-u_n}$.

أ برهن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ، ثم عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب- استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

التعريف [9] [باك 2017] [2م] [د1] [4ن]

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n$ حيث α عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2.

(1) أ- بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n > 0$.
ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{\alpha n} u_n$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ و عين حدها الأول v_1 بدلالة α .

ب- جد بدلالة n و α عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_n}{n}$.

عين قيمة α حيث: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2016}$.

التعريف [10] [باك 2018] [1م] [4ن]

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{e.x+1}$ (e أساس اللوغاريتم النبيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول: $u_0 = \frac{5}{4e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) أ- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{1}{e}$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right)}{e.u_n + 1}$.

ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) و برز أنها متقاربة.

(2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$.

بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2، يطلب تعيين حدها الأول v_0 عبارة v_n بدلالة n .

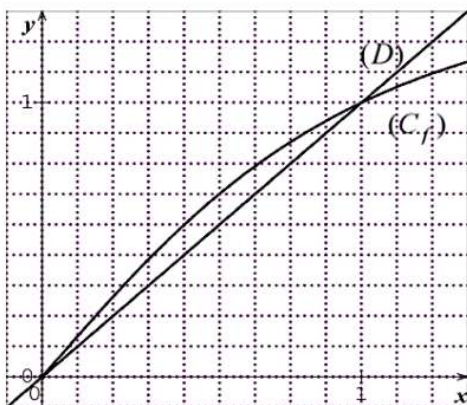
(3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد n من \mathbb{N} : $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$ و استنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ب- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

التعريف [11] [باك 2020] [1م] [4ن]

الدالة العددية f معرفة و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x+5}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ بحيث:

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) أ- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل

الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب- ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \frac{u_n^2}{1-u_n}$.

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

(4) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

بـ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

“The only way to learn mathematics is to do mathematics”

كتابة: خالد بخاخشة

نشر يوم 2021/01/20