



مجلة الرائد في الرياضيات



تمارين الحساب في البكالوريا بين يديك

الشعب :

تقني رياضي + رياضيات

$$2020 \equiv \dots [1440]$$

$$\text{PGCD}(2020; 1440) = \dots$$



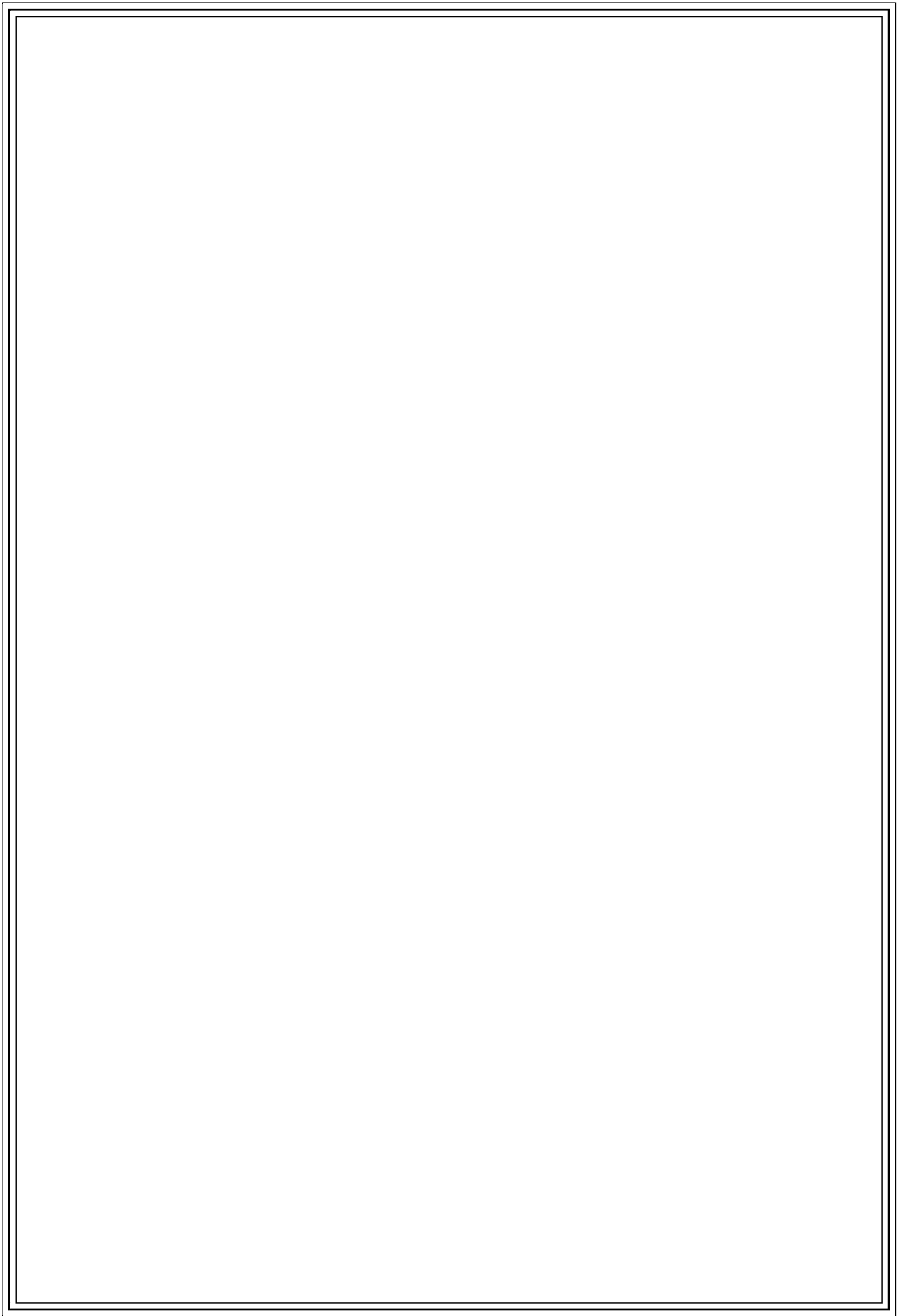
BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبدي محمد العربي



larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook



مجلة الرائد في الرياضيات

تمارين الحساب في البكالوريا بين يديك

الشعب : تقني رياضي + رياضيات

الجزء الاول

تدريبات متنوعة

الجزء الثاني

بكالوريات النظام الجديد

العلوم التجريبية + تقني رياضي + رياضيات
(1) المواضيع ، (2) الحلول (المجلة المرفقة)

الجزء الثالث

بكالوريات النظام القديم

علوم الطبيعة والحياة + علوم دقيقة

الجزء الرابع

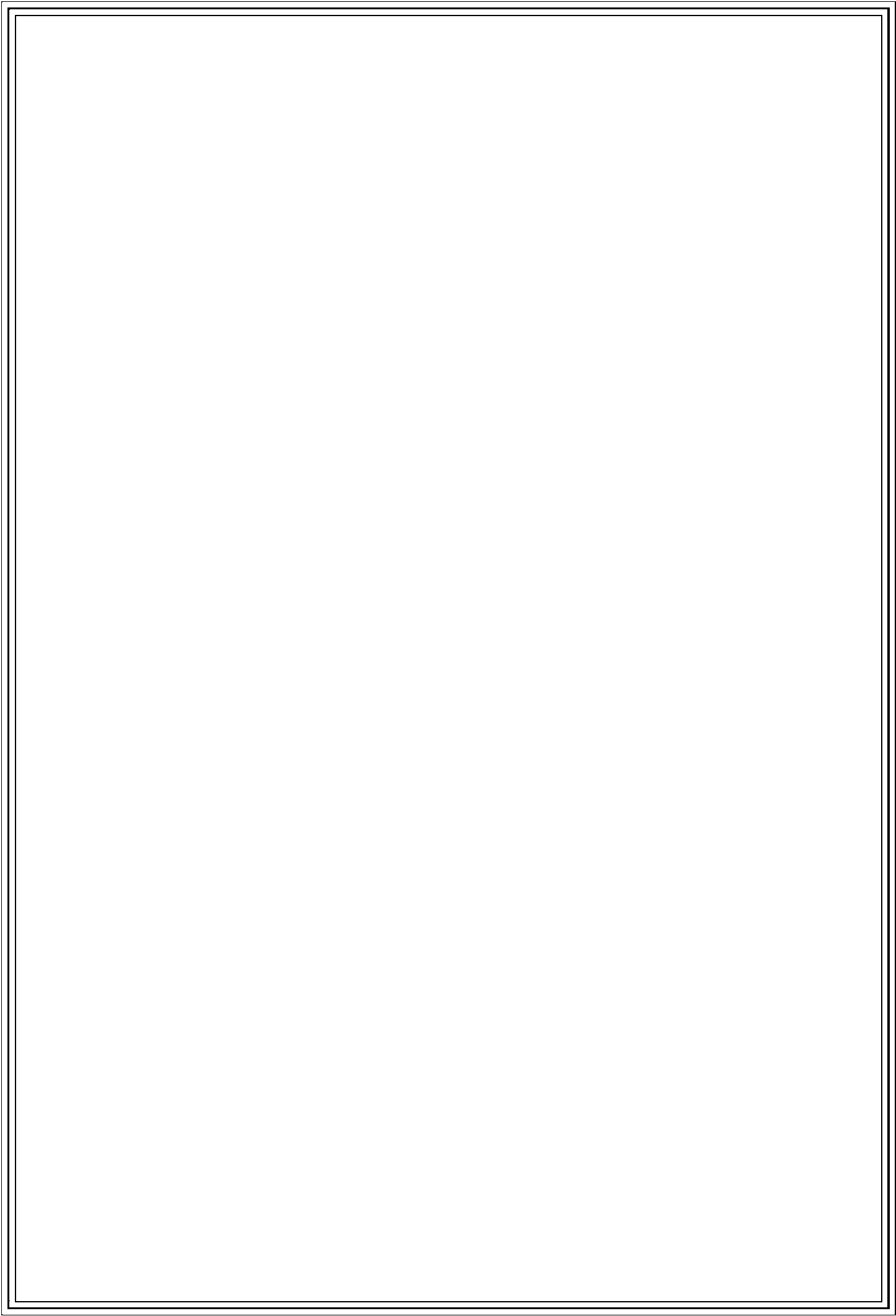
بكالوريات اجنبية

الجزء الخامس

تمارين مقترحة

BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي



الجزء الأول: تدريبات متنوعة

القسمة في المجموعة $\mathbb{Z}$

التمرين 01:

(1) عين مجموعة قواسم العدد 75

(2) عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث يكون $ab = 75$

استنتج كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية حيث يكون $(x-1)(y+1) = 75$.

التمرين 02:

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية في كل حالة :

$$(1) \quad x^2 - y^2 = 15 \quad (2) \quad x^2 = 4y^2 + 3 \quad (3) \quad xy = 3x + 2y \quad (4) \quad 5xy - y^2 = 49$$

التمرين 03:

عين كل الأعداد الصحيحة n في كل حالة من الحالات التالية :

(1) 13 قاسما للعدد $n+4$ و $|n| \leq 22$ (2) العدد $5n+7$ قاسما لـ 12 (3) $5n+6$ قاسما للعدد $n+8$

التمرين 04:

(1) عين القاسم المشترك الأكبر d للعددين: 1440 و 276

(2) استنتج مجموعة القواسم المشتركة للعددين: 1440 و 276

(3) انطلاقا من سلسلة القسمة المنجزة في خوارزمية إقليدس ، اوجد عددين صحيحين

$$u \text{ و } v \text{ بحيث : } 1440u + 276v = d$$

التمرين 05:

n عدد مكون من أربعة أرقام . باقي قسمة العدد 21685 على n هو 37 و باقي قسمة العدد

33509 على n هو 53 . عين العدد n .

التمرين 06:

عين في كل حالة الثنائيات a, b من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين :

$$(1) \quad \begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a,b)=9 \end{cases} (2) \quad \begin{cases} ab=360 \\ PGCD(a,b)=6 \end{cases} (3) \quad \begin{cases} a^2-b^2=600 \\ PGCD(a,b)=5 \end{cases} (3) \quad \begin{cases} 2a^2+b^2=2112 \\ PGCD(a,b)=8 \end{cases}$$

التمرين 07:

n عدد طبيعي . نضع $a = n(n^2 + 5)$. برهن بطريقتين مختلفتين في كل حالة :

(1) أن العدد a عدد زوجي . (2) أن العدد a مضاعف للعدد 3 .

استنتج مما سبق أن العدد a مضاعف للعدد 6 .

الموافقات في المجموعة $\mathbb{Z}$ وتطبيقاتها

التمرين 08:

- عين باقي القسمة الإقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل القيم من 0 إلى 4 للعدد الطبيعي k .
1. استنتج باقي القسمة الإقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل كل عدد طبيعي k .
 2. استنتج باقي قسمة 17^{4k} على 5.
 3. بين أن العدد $2^{4k+3} + 17^{4k+2} + 3$ يقبل القسمة على 5.
 - استنتج باقي قسمة $87^{49} + 61^{2008} - 2007^{1999}$ على 5.

التمرين 09:

- n عدد طبيعي (1. عين باقي قسمة العدد 6^{2n} على 7
- (2 ادرس تبعا لقيم n بواقي قسمة العدد 5^n على 7
- (3 عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $A_n = 3 + 6^{2n} + 5^n$ قابلا للقسمة على 7

التمرين 10:

- (1 ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 9
- (2 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^n + 3n - 1$ قابلا للقسمة على 9

التمرين 11:

- باستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$ برهن أن :
- 1/ من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ يقبل القسمة على 7.
 - 2/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العدد $2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1$ يقبل القسمة على 11
 - 3/ من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $n^2 - 1$

التمرين 12:

- أ. عين حسب قيم العدد الطبيعي x ، القيم التي توافق x^2 بترديد 5 .
- ب. استنتج أن المعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$ ذات المجهولين x و y ، لا تقبل حلا في $\mathbb{N}$.

التمرين 13:

- (1 عين كل الأعداد الطبيعية n بحيث يقبل العدد $2n^3 - n + 2$ القسمة على 7
- (2 اوجد قيم العدد الصحيح n التي تحقق : $n^2 + 3n - 6 \equiv 0 \pmod{11}$
- (3 اثبت انه من اجل كل عدد صحيح n يكون العدد $n^2 + 3n - 6$ غير قابل للقسمة على 121

التمرين 14:

- 1- أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n رقم احاد العدد 2^n ورقم احاد العدد 7^n

ب) استنتج رقم احاد العدد $3548^9 \times 2537^{31}$.

2- عين كل الأعداد الطبيعية n بحيث : $5^{4n} + 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$

التمرين 15:

1) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل كل واحدة من القيم: 1، 2، 3، 4، 5 و 6 للعدد الطبيعي n .

2) استنتج بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

3) عين باقي القسمة الأقليدية على 7 للعدد $(3^{2020} + 10^{1440} + 9^{3n+2})$.

أنظمة التعداد

التمرين 16:

1) يكتب العدد الطبيعي n في التعداد الثنائي 1101101.

ما هو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كما يلي: 214 ؟

2) في أي أساس تعداد يكون $51 = 13 + 35$ ؟ - أكتب المساواة السابقة في النظام الثنائي

التمرين 17:

أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من الأعداد الطبيعية تحقق المعادلة $45x - 28y = 130$ فإن x يكون زوجي و y يكون مضاعف للعدد 5.

ب) عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $2\alpha\alpha3$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $5\beta\beta6$ في النظام ذي الأساس 7.

التمرين 18:

في النظام ذي الأساس 9 يكتب عدد طبيعي n كما يلي : $n = 1271x$.

1) عين قيمة x حتى يكون n قابلاً للقسمة على 8.

2) عين قيمة x حتى يكون n قابلاً للقسمة على 11

التمرين 19:

1) x و y عددان طبيعيين غير معدومين.

أوجد الأعداد الطبيعية التي تكتب yx في النظام العشري و xy في النظام ذي الأساس 7.

التمرين 20:

1- نعتبر العددين الطبيعيين $a = 413^{(5)}$ و $b = 102^{(3)}$

أ) اكتب كلا من a و b في النظام العشري.

ب) احسب في النظام ذو الأساس 7 كلا من العددين : $a+b$ و $a \times b$

2- عين العدد الطبيعي x في الحالتين التاليتين:

أ) $\overline{xxx}^{(9)} = 52\alpha^{(11)}$ ب) $\overline{12}^{(x)} \times \overline{34}^{(x)} = \overline{452}^{(x)}$

الأعداد الأولية

التمرين 21:

- (1) نعتبر المعادلة 1 ذات المجهول x, y من $\mathbb{Z}^2$: $41x - 27y = 1$
 (أ) تحقق بواسطة نص مبرهنة من أن المعادلة 1 تقبل على الأقل حلا.
 (ب) جد باستعمال خوارزمية اقليدس حلا خاصا للمعادلة 1
 2- (أ) استنتج حلا خاصا للمعادلة : $41x - 27y = 5$ (ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة 2

التمرين 22:

- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية $2045x - 64y = 1$... (1)
 (1) عيّن $PGCD(2045, 64)$. استنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.
 (2). عيّن حلا خاصا للمعادلة (1). ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).

التمرين 23:

- لتكن S مجموعة الثنائيات x, y من الأعداد الصحيحة بحيث :
 $11x + 3y = 65$ 1
 1/ اوجد الثنائية x, y من S بحيث : $2x_0^2 - 3y_0 = 11$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة 1
 2/ عيّن كل الثنائيات x, y من S بحيث : $(x > -5 \text{ و } y > -5)$

التمرين 24:

- عين في كل حالة من الحالات التالية كل الثنائيات (x, y) التي تحقق الجملة المقترحة :
- (1) مع $x \leq y$ $\begin{cases} ppcm(x, y) = 60 \\ xy = 180 \end{cases}$. (2) مع $x \leq y$ $\begin{cases} ppcm(x, y) = 12p \gcd(x, y) \\ x + y = 105 \end{cases}$ مع $x \leq y$
- (3) $\begin{cases} 3ppcm(x, y) = xy \\ x^2 - y^2 = 405 \end{cases}$ ، (4) $\begin{cases} ppcm(x, y) = 100 \\ p \gcd(x, y) = 5 \end{cases}$

التمرين 25:

- (1) ليكن n عددا صحيحا . (أ) أثبت أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما .
 (ب) أثبت أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .
 (ج) استنتج أن $n+1$ و $6n^2 + 17n + 12$ أوليان فيما بينهما
 (2) n عدد طبيعي غير معدوم ؛ نضع $a = 2n^2 + 4n + 1$ و $b = n + 2$.
 باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

الجزء الثاني: تمارين البكالوريا

شعبة تقني رياضي

التمرين 26: دورة 2019

- (1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $5x - 3y = 1 \dots (E)$ حيث x و y عددان صحيحان
(أ) تحقق أن الثنائية $(6n + 2; 10n + 3)$ حلا للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي.
(ب) أستنتج أن العددين $10n + 3$ و $6n + 2$ أوليان فيما بينهما.
(2) نضع: $a = 10n + 3$ و $b = 3n + 5$ واليكن d القاسم المشترك للعددين a و b
(أ) بيّن أن: $d = 1$ أو $d = 41$.
(ب) بيّن أنه إذا كان $d = 41$ فإن $n \equiv 12[41]$.
(3) ليكن العددين الطبيعيين $A = 20n^2 + 36n + 9$ و $B = 6n^2 + 19n + 15$
(أ) بيّن أن العددين A و B يقبلان القسمة على $2n + 3$.
(ب) جد وبدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين 27: دورة 2017

- 1- بين أنه من أجل عدد طبيعي k : $4^{5k} \equiv 1[11]$.
2- استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.
3- بيّن أنه من أجل عدد طبيعي n العدد $(2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1)$ يقبل القسمة على 11
4- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد: $(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3)$ قابلا للقسمة على 11

التمرين 28: دورة 2017 الاستدراكية

- 1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.
2- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.
3- برهن أن: من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ مضاعف للعدد 5.
4- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(3^{4n} + 27^n - 4)$ قابلا للقسمة على 5.

التمرين 29: دورة جوان 2016 الموضوع 1

- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$: $6x - 7y = 19$ حيث x و y عددان صحيحان
(1) جد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0 = y_0$ ثم حل المعادلة (E)
(2) استنتج قيم العدد الصحيح λ التي تحقق $\begin{cases} \lambda \equiv 24[7] \\ \lambda \equiv 5[6] \end{cases}$ ثم عين باقي قسمة العدد λ على 42
(3) عين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x + y - 1| \leq 13$

4-أ) ادرس بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 7

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق:
$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020 [7] \\ n \equiv 1437 [6] \end{cases}$$

التمرين 30: دورة جوان 2015 الموضوع 1

- 1-أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 8^n على 13.
ب) استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد : $3 - 2014^{2007} + 42 \times 138^{2015}$ على 13.
2-أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n} [13]$
ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0 [13]$

التمرين 31: دورة جوان 2013 الموضوع 1

x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $11x + 7y = 1$.

- 1-أ) عيّن $(x_0; y_0)$ ، حلول المعادلة (E) الذي يحقق : $x_0 + y_0 = -1$.
ب- استنتج حلول المعادلة (E).

2) a و b عددان طبيعيان و S العدد الذي يحقق :
$$\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$$

أ) بيّن أن $(a; -b)$ حل للمعادلة (E).

ب) ماهو باقي القسمة الأقليدية للعدد S على 77

التمرين 32: دورة جوان 2012 الموضوع 1

- 1-أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 11
2- ماهو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 ؟
3- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد : $2011^{2012} + 4 \times 2011^{10n} + 4 \times 9^{15n+1}$ يقبل القسمة على 11
4- عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد : $2011^{2012} + 2n + 2$ يقبل القسمة على 11

التمرين 33: دورة جوان 2012 الموضوع 2

نسمي (S) الجملة التالية :
$$\begin{cases} x \equiv 3 [15] \\ x \equiv 6 [7] \end{cases}$$
 حيث x عدد صحيح

1- بيّن أن العدد 153 حل للجملة (S).

2- إذا كان x_0 حلا لـ (S) ، بين أن: x حلا لـ (S) ، يكافئ $\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases} \right)$

3- حل الجملة (S).

4- يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب و إذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.
إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصورة بين 500 و 600 كتابا ، ماعدد هذه الكتب ؟.

التمرين 34: دورة جوان 2011 الموضوع 2

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1-تحقق أن : $4 \equiv -3[7]$ ثم بيّن أن : $A_3 \equiv 6[7]$

2-أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 2^n و 3^n على 7

3- بيّن أنه إذا كان n فرديا فإن: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7.

واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.

4-ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7.

التمرين 35: دورة جوان 2010 الموضوع 1

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كمايلي :
 $n = \overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي .

1- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 .

2- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

استنتج العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15.

3- نأخذ : $\alpha = 4$ أكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 36: دورة جوان 2010 الموضوع 2

1-عين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 10^n على 13

2-تحقق أن : $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$.

3-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.

التمرين 37: دورة جوان 2009 الموضوع 2

1- حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$.

2-نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق : $f(0) = 1$. عين عبارة $f(x)$.

3- n عدد طبيعي . أ) أدرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n .

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$.

4- أ) أحسب بدلالة n ، المجموع $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7

التمرين 38: دورة جوان 2008 الموضوع 1

n عدد طبيعي أكبر من 5 .

1- a و b عددان طبيعيان حيث: $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$

أ- ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ب- بين لأن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ ضاعفا للعدد 7.

ج- عين قيم n التي من أجلها $\text{PGCD}(a; b) = 7$.

2- نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث: $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$

أ- بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$

ب- عين تبعا لقيم n وبدلالة n ، $\text{PGCD}(p; q)$.

التمرين 39: دورة جوان 2008 الموضوع 2

المعادلة ذات المجهول الصحيحين x و y : (1) $4x - 9y = 319$.

(1) تأكد أن الثنائية (82;1) حاد للمعادلة (1). ثم حل المعادلة (1)

(2) عين الثنائيات (a;b) الصحيحة حلول المعادلة: (2) $4a^2 - 9b^2 = 319$.

استنتج الثنائيات $(x_0; y_0)$ حلول المعادلة (1) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

شعبة الرياضيات

التمرين 40: دورة 2018

$$(1) \alpha \text{ و } \beta \text{ عددان طبيعيان بحيث: } \begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

عَيِّن العددين α و β ن ثم بيِّن أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

(2) عَيِّن كل الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ التي تحقق المعادلة : $1009x - 2017y = 1$.

$$(3) \text{ عَيِّن الأعداد الصحيحة } a \text{ التي تحقق الجملة: } \begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$$

(4-أ) n عدد طبيعي ، أدرس تبعا لقيم n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

(ب) L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كمايلي : $L = \underbrace{111\dots\dots 1}_{2018 \text{ مر}}$

عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

التمرين 41: دورة 2017 م

1-نعتبر المعادلة : $104x - 20y = 272 \dots (E)$ حيث x و y عددان صحيحان

أ-أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 ثم بيِّن أن المعادلة (E) تقبل حلوًا.

ب-بيِّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$ ثم استنتج حلول

المعادلة (E) $\lambda - 2$ عدد طبيعي يكتب $1\alpha\alpha\beta 01$ في النظام الذي أساسه 4 ، ويكتب $1\alpha\beta 01$ في النظام الذي أساسه 6 حيث α و β عددان طبيعان. عَيِّن α و β ثم أكتب λ في النظام العشري.

3-تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي ، ثم عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي

تحقق: $2m - d = 2017$ حيث: $d = \text{PGCD}(a; b)$ و $m = \text{PPCM}(a; b)$

التمرين 42: دورة 2017 م

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = 1$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 7u_n + 8$.

1- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$.

2-نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أ-احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بيِّن S'_n و S_n .

ب-أستنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

3-أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5

ب) عَيِّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

التمرين 43: دورة 2017 الاستدراكية

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الحقيقيين x و y حيث : $63x + 5y = 159 \dots (E)$.

1-تحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما ثم بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولاً.

2-برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)

3- λ عدد طبيعي يكتب $5\alpha 0\alpha$ في النظام ذي الأساس 7 ويكتب $\beta 10\beta 0$ في النظام ذي الأساس 5 جد العددين الطبيعيين α و β ثم اكتب العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.

4-أ-أدرس وحسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب-عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ القسمة على 5 حيث $(x; y)$ حلول للمعادلة (E) و x عدد طبيعي.

التمرين 44: دورة 2017 الاستدراكية

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = 4u_n + 1$

1-أ) بيّن أن: من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

ب) تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم العددين u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2-لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

ب) عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{3n}$.

3-عين من أجل كل عدد طبيعي n غير المعدوم القاسم المشترك الأكبر للعددين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$

4-أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية 4^n على 7.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n المعروف بـ: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ القسمة على 7

التمرين 45: دورة 2016 الموضوع 1

$\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$ متتالية هندسية متزايدة تماماً حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

1) أحسب u_1 و u_2 ، ثم استنتج قيمة الأساس q

2- نضع : $u_1 = e^4$ و $q = e^3$. أ) عبّر عن u_n بدلالة n

ب) نضع : $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$ احسب S_n بدلالة n

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n: a_n = n + 3$.

3-أ) بيّن أن : $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$.

(ب) عيّن القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$

(ج) عيّن قيم العدد الطبيعي بحيث: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$

(4) ادرس بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

(5) نضع: $b_n = 3n.a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$

عيّن قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون: $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

(6) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7

التمرين 46: دورة 2016 الموضوع 2

1- أدرس بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف لـ 11

2- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$: $7x - 3y = 8$ حيث x و y عددان صحيحان

(أ) حل المعادلة (E).

(ب) d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E).

- ما هي القيم الممكنة للعدد d .

- عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.

(ج) عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$

التمرين 47: دورة 2015 الموضوع 1

1- أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

(ب) استنتج باقي القسمة الأقليدية للعدد: $2015^{53} + 1954^{1962} + 1962^{1954}$ على 7.

2- أ) بيّن أن العدد 89 أولي. (ب) عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.

(ج) بيّن أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

(3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

عيّن x و y علما أن: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$

(4) a و b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c .

(أ) باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن a أولي مع $c \times b$.

(ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$\text{PGCD}(a; b^n) = 1$ (يرمز PGCD إلى القاسم المشترك الأكبر)

(ج) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962} .

التمرين 48: دورة 2014 الموضوع 1

- 1) نعتبر المعادلة (E): $2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عددان صحيحان.
 أ) أحسب $\text{PGCD}(2013; 1962)$. ب) استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً.
 ج) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0[6]$.
 د) استنتج حلاً خاصاً $(x_0; y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E).
 2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E).
 أ) ماهي القيم الممكنة للعدد d .
 ب) عيّن قيم العددين a و b حيث: $671a - 654b = 18$ و $\text{PGCD}(a; b) = 18$.

التمرين 49: دورة 2013 الموضوع 1

1. n عدد طبيعي. نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث: $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$
 أ- بيّن أن: $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; 10)$
 ب- ماهي القيم الممكنة للعدد $\text{PGCD}(\alpha; \beta)$.
 ج- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = 5$
 2. أ- ادرس، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11
 ب- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$$

التمرين 50: دورة 2013 الموضوع 3

1. أ- عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n + 27 \equiv 0[n+1]$
 ب- عيّن الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث: $(b - a)(a + b) = 24$
 ج- أستنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.
 2. α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل
 $\alpha = \overline{10141}$ و $\beta = \overline{3403}$.
 أ- اكتب العددين α و β في النظام العشري.

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases} \text{ ب-عَيِّن الثنائية } (a; b) \text{ من } \mathbb{N}^2 \text{ حيث:}$$

3.أ-جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 .

استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $2013x - 1434y = 27$

التمرين 51: دورة 2012 الموضوع 1

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : (1) $2011x - 1432y = 31$

1- أ-بيِّن أن العدد 2011 أولي .

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس ، عين حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) ، ثم حلا للمعادلة (1).

2-أ-عَيِّن تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة

الأقليدية للعدد $2^{1432 \cdot 2011}$ على 7.

ب-عَيِّن قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0 [7]$

3-N عدد طبيعي يكتب $2\gamma\alpha\beta$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α ، β و γ بهذا

الترتيب تشكل حدودا لمتتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (1).

عَيِّن α ، β و γ ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين 52: دورة 2011 الموضوع 1

1) نعتبر المعادلة : (E) $13x - 7y = -1$... حيث x و y عددان صحيحان . حل المعادلة (E).

2) عَيِّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a \equiv -1 [7] \\ a \equiv 0 [13] \end{cases}$

3) أدرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على كلا من 7 و 13

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب ، في نظام التعداد ذي الأساس 9 كمايلي : $\alpha 00\beta 086$

حيث α و β عددان طبيعيين و $\alpha \neq 0$.

عَيِّن α و β حتى يكون b قابلا القسمة على 91.

التمرين 53: دورة 2010 الموضوع 1

- 1- برهن أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13
- 2- أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13.
- 3- عيّن حسب قيم n باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 13 واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13
- 4- نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$
- أ- من أجل $p = 3n$ ، عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد A_p على 13
- ب- برهن أنه من أجل $p = 3n + 1$ ، فإن A_p يقبل القسمة على 13
- ج- عيّن باقي القسمة الإقليدية لـ A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$
- 5- يكتب العددين a و b في نظام العدد ذي الأساس 3 كمايلي:
 $a = \overline{1001001000}$ و $b = \overline{1000100010000}$
- أ- تحقق أن a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري
- ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من a و b على 13.

التمرين 54: دورة 2010 الموضوع 2

- 1- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: (1) $7x + 65y = 2009$
- أ- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7.
- ب- حل المعادلة (1).
- 2- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.
- 3- عيّن قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9.
- 4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{6n} - 1$.
- أ- تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.
- ب- حل المعادلة: (2) $(7u_1)x + (u_2)y = 126567$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عددان صحيحان.
- ج- عيّن الثنائية $(x_0; y_0)$ حل المعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيين مع $y_0 \geq 25$.

التمرين 55: دورة 2009 الموضوع 1

x عدد طبيعي أكبر تماماً من 1 و y عدد طبيعي .

$A = \overline{5566}$ عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس x بالشكل: $A = \overline{5566}$

1-أ- أنشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x و y

إذ علمت أن: $A = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$.

ب- أحسب x و y إذا علمت أن x أولي و أصغر من 12.

ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

2-أ- عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق:

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$$

التمرين 56: دورة 2008 الموضوع 2

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x - 21y = 78 \dots (E)$

1-أ- بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

ب) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$.

استنتج حلول المعادلة (E) .

2-أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب- عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (E) وتحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

الجزء الثالث: بكالوريات النظام القديم

التمرين 57: دورة 1997 ع. دقيقة

- 1) جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 2905 و 32785 و 2490
- 2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $7x + 6y = 79$ (لاحظ $72+7=79$)
- 3) اشترى نادي كرة يد ملابس رياضية للاعبيه ، إذا علمنا أن ثمن بذلة اللاعب هو 2905 دج و ثمن بذلة اللاعب هو 2490 دج وعلمنا ان النادي دفع في المجموع 32785 دج ما هو عدد اللاعبين واللاعبات؟.

التمرين 58: دورة 2001 ع. طبيعية

- 1) أثبت أن العددين 993 ، 170 أوليان فيما بينهما.
- 1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ذات المجهولين x و y حيث : $993x - 170y = 143 \dots (1)$
أ- عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) حيث: $x_0 + y_0 = 6$
ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)
- 3) جد أصغر عدد طبيعي A بحيث يكون باقي قسمة $(A-1)$ على كل من العددين 1986 و 340 هو 14 و 300 على التوالي

التمرين 59: دورة 1998 ع. طبيعية

- 1) عين مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث: $3x - 5 \equiv 0 [11]$
- 2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x - 11y = 5 \dots (1)$
• حل هذه المعادلة (يمكن استعمال نتيجة السؤال الأول) .
- 3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y
ماهي القيم الممكنة للعدد d إذا كان $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1)
- 4) عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) حيث: $d = 5$

التمرين 60: دورة 2008 ع. طبيعية

- لتكن في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $13x - 11y = 23 \dots (1)$
- 1- عين حلاً خاصاً $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) حيث: $x_0 - y_0 = 1$ - استنتج مجموعة حلول المعادلة (1).
- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول (1) بحيث يكون: $-10 < x < 40$
- 2- نفرض أن x و y موجبان و d قاسمهما المشترك الأكبر - ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟.
- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون: $d = 23$
- أستنتج عندئذ الثنائية $(x; y)$ التي يأخذ من أجلها العدد x أصغر قيمة.

التمرين 61: دورة 1995ع. طبيعية

- أ- حلل العدد 1995 إلى جداء عوامل أولية .
ب- عيّن كل الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث: $x + 7y = 1995$ و $\text{PGCD}(x; y) = 19$

التمرين 62: دورة 1996ع. دقيقة

- a, b, c أعداد طبيعية حيث: $1 \leq a \leq b \leq c$.
عيّن a, b, c والجداء abc علما أنّ في النظام ذي الأساس a يكون $b + c = \overline{46}$ و $bc = \overline{555}$.

التمرين 63: دورة 1997ع. دقيقة

- (1) عين القاسم المشترك الأكبر لإعداد 1497 و 2994
(2) لتكن المعادلة (1) $1996x - 1497y = 3994$ حيث x و y عدنان صحيحان .
- أثبت أنّ x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2، ثم عين حلول المعادلة (1) .
- عين الحلول $(x; y)$ للمادلة (1) بحيث يكون: $x.y = 1950$

التمرين 64: دورة 1992ع. دقيقة

- (1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1885 و 580
(2) α عدد صحيح . نعتبر المعادلة (1) $1885x - 580y = \alpha$.
- أوجد الشرط اللازم والكافي الذي يحققه α حتى تقبل المعادلة (1) حلو لا في $\mathbb{Z}^2$.
(3) نفرض أنّ: $\alpha = 1305$ - حل المعادلة (1) . - أوجد الحلول $(x; y)$ بحيث يكون x قاسما للعدد y .

التمرين 65: دورة 1992ع. دقيقة

- (1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $18x + 4y = 84$.
ماهي الحلول $(x; y)$ لهذه المعادلة التي تحقق $x.y > 0$
(2) n عدد طبيعي يكتب $30\alpha\beta\gamma$ في النظام ذي الأساس 5 ويكتب $55\alpha\beta$ في النظام ذي الأساس 7 .
عيّن الأعداد الطبيعية α, β و γ ثم اكتب n في النظام العشري

التمرين 66: دورة 1990ع. دقيقة

- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $5x - 6y = 3$.
(1) أثبت أنه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف لـ 3 ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (1) .
(2) حل المعادلة (1) ثم استنتج حلول الجملة التالية $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$
(3) من بين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التي هي حلول للمعادلة (1)
ماهي الثنائيات $(x; y)$ التي تحقق $(x^2 - y^2) < 56$.

التمرين 67: دورة 1996ع. دقيقة

- (1) x و y عددان طبيعيين أوليان فيما بينهما. أثبت أن العددين $(x+y)$ ، xy أوليان فيما بينهما
 (2) α ، β عددان طبيعيين أوليان فيما بينهما. عين α ، β حتى يكون: $15\alpha^2 - 229\beta = 30\beta$
 (3) x و y عددان طبيعيين أوليان فيما بينهما.
 عين مجموعة الثنائيات $(x; y)$ التي تحقق: $15(x^2 + y^2) = 229(x + y)$

التمرين 68: دورة 1997ع. دقيقة

- (1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x'; y')$: $9x' - 14y' = 13$ علماً أن $(3, 1)$ حلا لها.
 (2) نعتبر $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $45x - 28y = 130$
 أ) بين أنه إذا كان $(x; y)$ حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5.
 ب) حل هذه المعادلة.
 (3) N عدد طبيعي يكتب $2\alpha\alpha 3$ في نظام تعداد أساسه 9 و $5\beta\beta 6$ في نظام تعداد أساسه 7.
 عين α و β ثم أكتب N في النظام العشري

التمرين 69: دورة 2005ع. دقيقة

- α و β عددان حيث: $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$ حيث $n \in \mathbb{N}$
 أ-1) برهن أن: $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; n)$
 ب) استنتج القيم الممكنة للعدد $\text{PGCD}(\alpha; \beta)$
 2- a و b عددان طبيعيين يكتبان في نظام التعداد ذي الأساس n كما يلي: $a = \overline{3520}$ و $b = \overline{384}$
 أ) برهن أن العدد $3n + 2$ هو قاسم مشترك للعددين a و b
 ب) استنتج تبعا لقيم n أن: $\text{PGCD}(a; b) = 3n + 2$ أو $\text{PGCD}(a; b) = 2(3n + 2)$
 ج) عين α و β إذا علمت أن: $\text{PGCD}(a; b) = 41$.

التمرين 70: دورة 2007ع. دقيقة

- $n > 2$ عدد طبيعي حيث $a = 2n + 1$ ، $b = 4n + 3$ ، $c = 2n + 3$
 (1) أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما و استنتج أن الأعداد a ، b ، c أولية فيما بينها.
 (2) عين تبعا لقيم n قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c
 عين قيمة n بحيث يكون: $\text{PGCD } b, c = 3$ و $\text{PPCM } b, c = 1305$
 (3) اكتب b^2 في نظام أساسه a .

التمرين 71: دورة 1994ع. دقيقة

- 1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10

ب- استنتج رقم أحاد العدد 1994^{1414}

$u_n = 2^n$ المتتالية المعرفة بمجدها العام : u_n $n \in \mathbb{N}^*$ /2

أ) تحقق من أن u_n $n \in \mathbb{N}^*$ متتالية هندسية

نضع لكل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = 5 + 2^1 + 5 + 2^2 + \dots + 5 + 2^n$

ب- اوجد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا للقسمة على 10

التمرين 72: دورة 2004ع. طبيعية

- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 10 .
استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $(7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3})$ يقبل القسمة على 10
- من أجل كل عدد طبيعي ، نضع : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$
- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4} \equiv S_n [10]$.
- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي السمة الأقليدية للعدد S_n على 10 .

التمرين 73: دورة 1980ع. دقيقة

- اوجد أعدادا طبيعية مربع كل منها يقسم العدد 1980
- عين الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق : $m^2 - 5d^2 = 1980$
حيث $d = \text{PGCD } a, b$ و $m = \text{PPCM } a, b$

التمرين 74: دورة 2007ع. طبيعية

- نعتبر المعادلة : $(E) : 4862x - 1430y = 2002 \dots$ حيث x و y عدنان صحيحان .
- احسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 2002 ، 1430 ، 4862 .
 - أ- بين أن E تقبل حلوها في $\mathbb{Z}^2$.
ب- حل المعادلة E .
 - a و b عدنان طبيعيان حيث (a, b) حل للمعادلة E ، $d = \text{PGCD } a, b$.
أ- عين القيم الممكنة لـ d .
ب- عين الثنائيات (a, b) عندما $d = 7$

التمرين 75: دورة 2009ع. طبيعية

- عدد طبيعي n (1) عين باقي قسمة 4^{2n} على 5
- أدرس بواقي قسمة 3^n على 5
- ما هو باقي قسمة العدد 1429^{2009} على 5 ؟
- ليكن العدد الطبيعي $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$
- عين قيم n بحيث A_n يقبل القسمة على 5

الجزء الرابع: بكالوريات اجنبية

التمرين 76: دورة 2003 أسيا

1. أ) n عدد طبيعي ، انشر العبارة $3n^2 - 9n + 16$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3 - 11n + 48$ قابلاً للقسمة على $n + 3$.
 ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .
2. بيّن أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c تكون المساواة التالية صحيحة: $\text{PGCD } a; b = \text{PGCD } bc - a; b$
3. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 ، تكون المساواة التالية صحيحة :
 $\text{PGCD } 3n^3 - 11n; n + 3 = \text{PGCD } 48; n + 3$
4. أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48
 ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A = \frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ عدداً طبيعياً

التمرين 77: دورة 2005 لبنان

1. نعتبر المعادلة (E) : $109x - 226y = 1$ حيث x و y عددان صحيحان .
 أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226. ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص المعادلة (E) ؟
 ب) برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(141 + 226k; 68 + 109k)$ ، حيث k عدد صحيح .
 ج) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم d أصغر من أو يساوي 226؛ ويوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم e يحقق $109d = 1 + 226e$ (يطلب تعيين قيمتي d و e) .
2. برهن أن 227 عدد أولي .
3. نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a حيث $a \leq 226$. نعتبر الدالتين f و g للمجموعة A في نفسها f ترفق بكل عدده ، باقي قسمة a^{109} على 227 ؛ g ترفق بكل عدده ، باقي قسمة a^{141} على 227 .
 أ) تحقق من أن $g[f(0)] = 0$.
 ب) برهن أنه من أجل كل $a \in A - \{0\}$ ، $a^{226} \equiv 1 [227]$. ج) استنتج من 1 .
 ب) أنه من أجل كل $a \in A - \{0\}$ ، $g[f(a)] = a$ ، ما القول عن $g[f(a)] = a$ ؟

التمرين 78: دورة 1981 فرنسا

- a عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر العددين a و b حيث : $a = 11n + 3$ و $b = 13n - 1$
 1) برهن أن كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم أيضاً للعدد 50

(2) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة: $50x - 11y = 3$

(3) استنتج قيم n التي يكون من أجلها يكون 50 القاسم المشترك الأكبر للعديدين a و b عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 25 القاسم المشترك الأكبر للعديدين a و b

التمرين 79: دورة 2008 رياضيات-تونس

(1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E): $3x - 8y = 5$ برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(8k - 1; 3k - 1)$ ، حيث k عدد صحيح .

(2-أ) x, n و y ثلاثة أعداد صحيحة بحيث: $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$ برهن أن الثنائية (x, y) حل للمعادلة (E)

(ب) نعتبر الجملة (S): $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ حيث n عدد صحيح

برهن أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n \equiv 23[24]$

(3-أ) k عدد طبيعي . برهن أن باقي قسمة 2^{2k} على العدد 3 هو باقي قسمة 7^{2k} على العدد 8

(ب) تحقق أن 1991 حل للجملة (S) وبين أن العدد الطبيعي $1991^{2008} - 1$ يقبل القسمة على 24.

التمرين 80: دورة 2008 علوم-تونس

(1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث $11x - 5y = 2$.

أ- تأكد أن الثنائية $(2; 4)$ حلا للمعادلة (E).

ب- أثبت أن الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان: $11(x - 2) = 5(y - 4)$.

ج- استنتج حلول المعادلة (E).

(2) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . نضع: $a = 5n + 2$ و $b = 7n + 5$.

أ- احسب $5b - 7a$ ثم استنتج أن $\text{PGCD } a; b = 1$ أو $\text{PGCD } a; b = 11$.

ب- عين ، باستعمال السؤال (1) ، الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $\text{PGCD } a; b = 11$.

التمرين 81: دورة 2011 علوم-المغرب

ليكن العدد الصحيح الطبيعي $N = \underbrace{111 \dots 11}_{2010 \text{ مرة } 1 \text{ مرة}}$ الممثل في نظام التعداد العشري .

1- بين أن العدد N يقبل القسمة على 11

2-أ) تحقق أن العدد 2011 أولي و أن: $10^{2010} - 1 = 9N$

ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$.

ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N

3- بين أن العدد N يقبل القسمة على 22121.

التمرين 82: دورة 2008 علوم-كالدونيا الجديدة

نرمز بـ $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\alpha,\beta$ إلى أرقام النظام ذي الأساس 12.

1. أ- N_1 عدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12 كما يلي : $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$

عين كتابة N_1 في النظام العشري

ب- N_2 عدد مكتوب في النظام العشري كما يلي : $N_2 = 1131$

اكتب العدد N_2 في النظام ذي الأساس 12

2. في كل مايلي عدد طبيعي N يكتب بشكل عام كما يلي : $N = \overline{a_n \dots a_1 a_0}^{12}$

3. أ- برهن أن : $N \equiv a_0 [3]$ استنتج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد طبيعي مكتوب في النظام 12

ب- انطلاقاً من الكتابة في النظام ذي الأساس 12 ، حدد إذا كان N_2 يقبل القسمة على 12
ثم تحقق من صحة ذلك بكتابه في النظام العشري .

4. أ- برهن أن : $N \equiv a_n + \dots + a_1 + a_0 [11]$ ثم استنتج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد طبيعي مكتوب في النظام 12.

ب- انطلاقاً من الكتابة في النظام ذي الأساس 12 ، حدد إذا كان N_1 يقبل القسمة على 11
ثم تحقق من صحة ذلك بكتابه في النظام العشري .

4. N عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 12 كما يلي : $\overline{x 4 y}^{12}$.

عين الأعداد الطبيعية x و y حتى يكون العدد N يقبل القسمة على 33

التمرين 83: دورة 2001 علوم-Antilles Guyane

1. a و b عددان طبيعيين غير معدومين بحيث : $PGCD(a+b; ab) = p$ حيث p عدد أولي

أ) برهن أن p يقسم a^2 (يمكنك ملاحظة : $a^2 = a(a+b) - ab$)

ب) استنتج أن p يقسم a ، و استنتج أن p يقسم b

ج) برهن أن : $PGCD(a;b) = p$

2. a و b عددان طبيعيين غير معدومين بحيث $a \leq b$

أ) حل الجملة التالية : $\begin{cases} PGCD(a;b) = 5 \\ PPCM(a;b) = 170 \end{cases}$ ، ب) استنتج حلول الجملة : $\begin{cases} PGCD(a+b; ab) = 5 \\ PPCM(a;b) = 170 \end{cases}$

التمرين 84: دورة 2011 علوم-Antilles Guyane

I - نعتبر المعادلة (E) : $11x - 7y = 5$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) تحقق بواسطة نص مبرهنة أنه توجد ، على الأقل ، ثنائية $(u; v)$ بحيث : $11u - 7v = 5$

- أوجد ثنائية $(u; v)$. ب) استنتج حلول المعادلة (E) . ج) استنتج حلول المعادلة (E) .

(د) في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر المستقيم (D) المعرف بالمعادلة الديكارتية: $11x - 7y - 5 = 0$. نسمي $\mathcal{S}$ مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوى بحيث: $0 \leq x \leq 50$ و $0 \leq y \leq 50$.

عَيِّن عدد النقط من المستقيم (D) و التي تنتمي للمجموعة $\mathcal{S}$ والتي إحداثياتها أعداد صحيحة
 -II: نعتبر المعادلة (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$ حيث x و y عدنان صحيحان .
 أ) برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (F) فإن: $x^2 \equiv 2y^2 [5]$
 ب) لكن x و y أعداد صحيحة . أنقل ثم أكمل الجدولين التاليين :

$y \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2y^2 \equiv$						[5]

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$x^2 \equiv$						[5]

-ما هي القيم الممكنة لباقي القسمة الإقليدية للعدد x^2 و للعدد $2y^2$ على العدد 5 ؟
 ج) استنتج أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (F) فإن x و y من مضاعفات 5.
 -III بين أنه إذا كان العددين x و y من مضاعفات 5 فإن الثنائية $(x; y)$ ليست حل للمعادلة (F)
 ماذا تستنتج بالنسبة للمعادلة (F)

التمرين 85: دورة 2011 علوم (Polynésie)

نذكر بالنتيجة المسماة بـ « المبرهنة الصغيرة لـ فيرما Fermat ». « إذا كان p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $a^{p-1} - 1$ »

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = 10u_n + 21$

1- احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

2- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n = 10^{n+1} - 7$

ب) استنتج من أجل كل عدد طبيعي n ، كتابة العدد u_n في النظام العشري .

3- برهن أن u_2 عدد أولي .

نقترح فيما يلي دراسة قابلية القسمة للحدود u_n على بعض الأعداد الأولية

4- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n لا يقبل القسمة على كل من الأعداد 2 ، 3 و 5

5- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n \equiv 4 - (-1)^n [11]$ ،

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n لا يقبل القسمة على 11 .

6- أ) برهن أن : $10^{16} \equiv 1 [17]$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، u_{16k+8} يقبل القسمة على 17 .

الجزء الخامس: تمارين متنوعة مقترحة

التمرين 86: مقترح وزاري 2008

- (1) أثبت أن العدد 251 عدد أولي.
- (2) حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية .
- (أ) استنتج كل الأعداد الأولية التي مكعب كل منها يقسم العدد 2008.
- (ب) عين الأعداد الطبيعية a و b بحيث: $m^3 + 35d^3 = 2008$ و $m = \text{PPCM}(a; b)$ و $d = \text{PGCD}(a; b)$. علما أن:

التمرين 87:

- 1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
- 2- أ- نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$. بين أن : $4S_n = 5^{n+1} - 1$.
ب- ليكن a عدد طبيعي ، بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$.
ج- أستنتج باقي قسمة S_{2016} على 7.

3. نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلتين : $(E_0): 5^n x - S_n y = 0$ و $(E): 5^n x - S_n y = 7$
أ- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون S_n و 5^n أوليان فيما بينهما ثم حل المعادلة (E_0)
ج- بين أن حلول (E) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث : $x = 35 + kS_n$ و $y = 28 + k5^n$ و $k \in \mathbb{Z}$
ثم حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ الجملة
$$\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ \text{PGCD}(x, y) = 7 \end{cases}$$

التمرين 88:

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11
استنتج باقي قسمة العدد : $10 \times 1434^{31} - 2015^{10n+4}$ على 11
- (2) عين الأعداد الصحيحة x التي تحقق : $x^2 + 2x + 9 \equiv 0[11]$
- استنتج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد : $5 \times 9^{4n+1} + 2^{2n+1} - 2$ مضاعفا لـ 11
- (3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $17^{4n+1} + 3 \times 9^{2n}$ يقبل القسمة على 5 .
استنتج باقي القسمة على 55 للعدد : $187 \times 17^{4n} + 11 \times 3^{4n+1} + 60 \times 4^{5n-1}$

التمرين 89:

- n عدد طبيعي ، نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث $a = 8n + 1$ و $b = 7n + 1$.

1) بين أن العددين a و b أوليين فيما بينهما.

2) نعتبر المعادلة : $23x - 26y = 1$ (E) حيث x و y عددان صحيحان.

أ) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E).

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E).

3) استنتج الأعداد الطبيعية a حيث : $\begin{cases} 0 \leq a \leq 25 \\ 23a \equiv 1[26] \end{cases}$

التمرين 90:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 10u_n + 81$.

$u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 10u_n + 81$.

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 10^{n+1} - 9$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n + 8 = 9 + 9 \times 10 + 9 \times 10^2 + \dots + 9 \times 10^n$.

ج) استنتج من أجل كل عدد طبيعي n ، كتابة العدد u_n في النظام العشري.

3. أ) بين أن u_2 عدد أولي.

ب) بين أن u_n لا يقبل القسمة على كل من 2 و 3 و 5.

4. عين قيم العدد الطبيعي n ، التي يقبل من أجلها العدد u_n القسمة على 7.

5. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \equiv 2 - (-1)^n [11]$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n لا يقبل القسمة على 11.

التمرين 91:

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x - 2y = 1$ (E)

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم أ) بين أن الثنائية $(14n + 3; 21n + 4)$ حلا للمعادلة (E).

ب) استنتج أن العددين $14n + 3$ و $21n + 4$ أوليان فيما بينهما.

3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n + 1$ و $21n + 4$.

أ) بين أن $d = 1$ أو $d = 13$. ب) بين أن $n \equiv 6 [13]$ يكافئ $d = 13$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n و $n \geq 2$

نضع : $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.

أ) بين أن A و B قابلا للقسمة على $(n-1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين 92:

1. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 580 ، 1885
2. α عدد صحيح . نعتبر المعادلة $1885x - 580y = \alpha$ 1
- أوجد الشرط اللازم والكافي الذي يحققه α حتى تقبل المعادلة 1 حولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
3. نفرض فيما يلي أن : $\alpha = 1305$
- حل المعادلة 1
- أوجد الحلول x, y بحيث يكون العدد x قاسما للعدد y .

التمرين 93:

- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $32x - 7y = 185$ (E) .
- (1) بين أنه من أجل كل حل $(x; y)$ للمعادلة (E) : $4x \equiv 3[7]$.
 - (2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .
 - (3) n عدد طبيعي يكتب $2\alpha 8\beta$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $5\alpha\beta\beta$ في النظام ذي الأساس 7
(أ) عين العددين α و β .
(ب) أكتب n في النظام العشري .
(4) (أ) تحقق أن العدد 2017 أولي .
(ب) عين العدد الطبيعي a بحيث يكون العدد $(a^2 - 2017)$ مربعا لعدد طبيعي يطلب تعيينه

التمرين 94:

- (1) عيّن الثنائيات $(a; b)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث : $PGCD(a; b) = 48$ و $PPCM(a; b) = 2160$.
- (2) عيّن الأعداد الحقيقة x التي تحقق : $9x \equiv 17[5]$.
- (3) إستنتج مما سبق حلول المعادلة $432x - 240y = 816$ ، حيث x و y عددان صحيحان .
- (4) n عدد طبيعي باقي قسمته على 9 هو 2 ، و باقي قسمته على 5 هو 3 :
(أ) بيّن أن باقي قسمة n على 45 هو 17 .
(ب) إستنتج قيمة n علما أنه محصور بين 1980 و 2025 .
- (5) (أ) حلل 2016 إلى جداء عوامل أولية ، ثم جد الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2016
(ب) في أي نظام تعداد يكتب 2018 على الشكل : $\overline{1202}^x$.

التمرين 95:

- (1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x - 2y = 1$ (E) (E)
- (2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . (أ) بين أن الثنائية $(14n + 3; 21n + 4)$ حلا للمعادلة (E) .
(ب) استنتج أن العددين $14n + 3$ و $21n + 4$ أوليان فيما بينهما .

- (3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$.
 (أ) بين أن $d=1$ أو $d=13$. (ب) بين أن $n \equiv 6 [13]$ يكافئ $d=13$.
 (4) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ نضع : $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$ و $A = 21n^2 - 17n - 4$.
 (أ) بين أن A و B قابلان للقسمة على $(n-1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.
 (ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين 96:

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 3^n على 5 .
 استنتج بواقي القسمة الإقليدية للعددين $(1439)^{2018}$ و $(1962)^{1954}$ على 5 .
 (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن العدد :
 $(1439)^{2018} + (1962)^{1954} - 2 \times (2018)^{4n+3}$ مضاعف لـ 5
 (3) عين الأعداد الطبيعية n حتي يقبل العدد $3^{4n+1} + 2017^n - 6$ القسمة على 5 .

التمرين 97:

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .
 (2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0 [10]$.
 (3) عين الأعداد الطبيعية n حيث : $7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0 [10]$ و $10 < n \leq 25$.
 (4) A عدد مكتوب بـ : $\overline{xx0xx02}$ في النظام ذي الأساس 3 و مكتوب بـ : $\overline{y612}$ في النظام ذي الأساس 7
 أ- عين كلا من x و y . ب- أحسب العدد A في النظام العشري .
 ج- أكتب العدد A في النظام ذي الأساس 9 .

التمرين 98:

نعتبر الأعداد الصحيحة N التي تحقق الجملة : $(S) \begin{cases} N \equiv 5 [13] \\ N \equiv 1 [17] \end{cases}$

- (1) تحقق أن العدد 239 حل للجملة (S) .
 (2) أثبت أن العدد N يكتب على الشكل $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ ، حيث x و y عددان صحيحان نسبيا يحققان $17x - 13y = 4$.
 (3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $17x - 13y = 4$ ، للمجهولين الصحيحين x و y .
 (4) استنتج أنه يوجد عدد صحيح k يحقق $N = 18 + 221k$ ، ثم استنتج حلول الجملة (S) .

مجلة الرائد في الرياضيات

الحلول

الجزء الثاني

تقني رياضي

الجزء الثالث

رياضيات

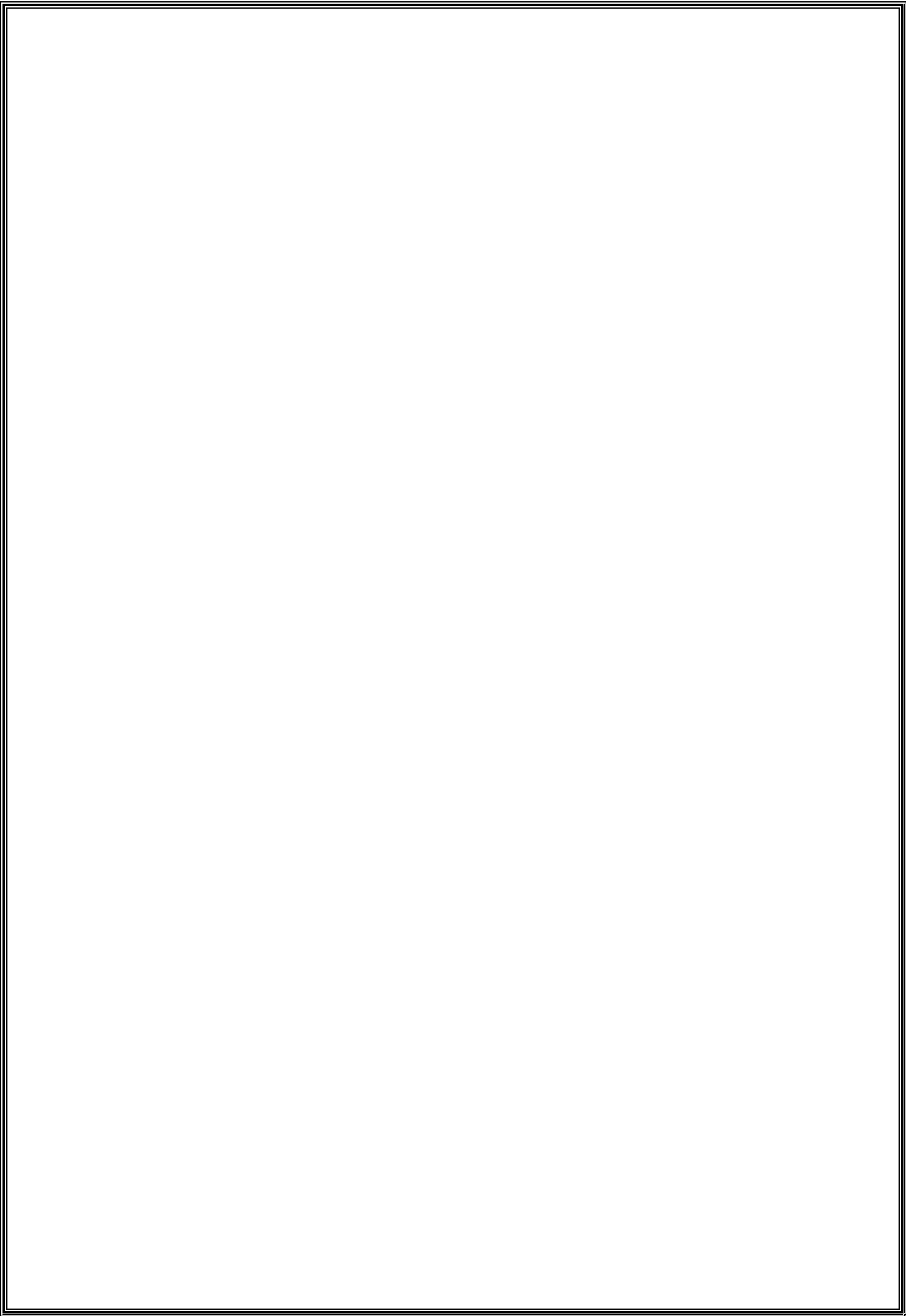
إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

BAC2020

الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi @ gmail.com

العربي الجزائري Facebook



الجزء الثاني: تمارين البكالوريا النظام الجديد

شعبة تقني رياضي

التمرين 26: دورة 2019

1- أ) التحقق أن الثنائية $(6n + 2; 10n + 3)$ حاد للمعادلة (E)

الثنائية $(6n + 2; 10n + 3)$ حاد للمعادلة (E) لأن $5(6n + 2) - 3(10n + 3) = 1$.

ب) استنتاج أن العددين $6n + 2$ و $10n + 3$ أوليان فيما بينهما.

العلاقة $5(6n + 2) - 3(10n + 3) = 1$ تعني أن $6n + 2$ و $10n + 3$ أوليان فيما بينهما (مبرهنة بيزو)

2- أ) تبين أن : $d = 1$ أو $d = 41$.

لدينا $\text{PGCD}(a; b) = d$ حيث : $a = 10n + 3$ و $b = 3n + 5$

يجب إيجاد علاقة بين a و b مستقلة عن n

لدينا : $3a - 10b = 10(3n + 5) - 3(10n + 3) = 41$ أي $3a - 10b = 41$

ولدينا : d يقسم a ومنه d يقسم $3a$ (1)

d يقسم b ومنه d يقسم $10b$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن d يقسم $3a - 10b$ وعليه d يقسم 41

لكن 41 عدد أولي أي يقبل قاسمان هما : 1 و 41

ب) تبين أنه إذا كان $d = 41$ فإن $n \equiv 12[41]$.

لدينا : $d = 41$ معناه $\begin{cases} a \equiv 0[41] \\ b \equiv 0[41] \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} 10n + 3 \equiv 0[41] \\ 3n + 5 \equiv 0[41] \end{cases}$ بالجمع طرف طرف نجد :

$7n - 2 \equiv 0[41]$ وعليه $7n \equiv 2[41]$ ومنه $42n \equiv 12[41]$ (بضرب الطرفين في 6)

ومنه $n \equiv 12[41]$ لأن $42 \equiv 1[41]$.

3- أ) تبين أن العددين A و B يقبلان القسمة على $2n + 3$.

لدينا : $A = 20n^2 + 36n + 9$ و $B = 6n^2 + 19n + 15$

ولدينا : $A = 20n^2 + 36n + 9 = (2n + 3)(10n + 3)$ ومنه A يقبل القسمة على $2n + 3$

$B = 6n^2 + 19n + 15 = (2n + 3)(3n + 5)$ ومنه B يقبل القسمة على $2n + 3$

ب) إيجاد وبدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

نضع : $\text{PGCD}(A; B) = (2n + 3)\text{PGCD}(a; b)$ خاصية

نميز حالتان هما : $d = 1$ أو $d = 41$.

إذا كان $d = 41$ فإن $\text{PGCD}(A; B) = 41(2n + 3)$ حيث $n \equiv 12[41]$

إذا كان $d = 1$ فإن $\text{PGCD}(A; B) = (2n + 3)$ حيث $n \not\equiv 12[41]$ مع $k \in \mathbb{N}$

التمرين 27: دورة 2017

1) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $k: 4^{5k} \equiv 1[11]$

لدينا: $4^5 = 1024 = 11 \cdot 93 + 1$ أي $4^5 \equiv 1[11]$ وعليه ومن أجل كل عدد طبيعي k يكون لدينا: $4^{5k} \equiv 1[11]$ خاصية.

2) استنتاج بواقي قسمة العدد 4^n على 11

لتعيين بواقي قسمة 4^n على 11 نشكل الجدول التالي:

من الجواب السابق نستنتج أن بواقي قسمة 4^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وهي

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$4^n \equiv$	1	4	5	9	3

3) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 0[11]$

لدينا: $2017^{5n+3} \equiv 4^{5n+3} [11] \equiv 9[11]$ و $1438^{10n} \equiv (8)^{10n} [11] \equiv 1[11]$

ومنه: $2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 2 \times 9 + 3 \times 1 + 1[11]$

أي $2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 22[11] \equiv 0[11]$ إذن

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $2 \times 2017^{5n+2} + n - 3 \equiv 0[11]$ قابلاً للقسمة على 11

$2 \times 2017^{5n+2} + n - 3 \equiv 0[11]$ معناه

لدينا: $2017^{5n+2} \equiv 4^{5n+2} [11] \equiv 5[11]$

ومنه $2 \times 2017^{5n+2} + n - 3 \equiv 0[11]$ تكافئ $n + 7 \equiv 0[11]$ أي $n = 11p + 4$ حيث $p \in \mathbb{N}$

التمرين 28: دورة 2017 الاستدراكية

1) تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

لدينا: $3^0 \equiv 1[5]$, $3^1 \equiv 3[5]$, $3^2 \equiv 4[5]$, $3^3 \equiv 2[5]$, $3^4 \equiv 1[5]$.

بواقي قسمة 3^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n \equiv$	1	3	4	2

2) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.

لدينا: $1437 \equiv 2[5]$ أي $1437 \equiv (-3)[5]$ أي $1437^{2017} \equiv (-3)^{2017} [5]$

لكن $1437^{2017} \equiv (-3)^{2017} \equiv (-1)^{2017} \cdot 3^{4(504)+1} [5]$ ومنه $1437^{2017} \equiv (-3)[5]$

لأن $3^{4(504)+1} \equiv 3[5]$ و $(-1)^{2017} = -1$ (عدد فردي)

$1437^{2017} \equiv (-3)[5]$ تكافئ $1437^{2017} \equiv 2[5]$ لأن $(-3) \equiv 2[5]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5 هو 2

3) البرهان أن: من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ مضاعف للعدد 5

العدد $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ مضاعف للعدد 5 معناه $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1) \equiv 0[5]$
 لدينا: $48 \equiv 3[5]$ ومنه $48^{4n+3} \equiv 3^{4n+3}[5]$ أي $48^{4n+3} \equiv 2[5]$ حسب الجدول.
 $9^{2n+1} = 3^{4n+2} \equiv 4[5]$ حسب الجدول.

ومنه: $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1) \equiv 2 - 2 \times 4 + 1[5] \equiv -5[5]$ أي $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1) \equiv 0[5]$ لأن $(-5) \equiv 0[5]$.

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(3^{4n} + 27^n - 4)$ قابلا للقسمة على 5.

العدد $(3^{4n} + 27^n - 4)$ قابلا للقسمة على 5 معناه $(3^{4n} + 27^n - 4) \equiv 0[5]$

لدينا: $27 \equiv (3)^{3n}[5]$ ولدينا أيضا: $3^{4n} \equiv 1[5]$ حسب الجدول.

وعليه $(3^{4n} + 27^n - 4) \equiv 0[5]$ تكافئ $(3^{3n}) \equiv 3[5]$

من الجدول نستنتج أن $3n \equiv 1[4]$ أي $n \equiv 3[4]$ وأخيرا $n = 4p + 3$ حيث $p \in \mathbb{N}$

التمرين 29: دورة جوان 2016 الموضوع 1

1) إيجاد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E)

$(x_0; y_0)^*$ حلا خاصا للمعادلة (E) بحيث $x_0 = y_0$ معناه $6x_0 - 7x_0 = -19$ أي $x_0 = y_0 = -19$

لدينا:
$$\begin{cases} 6x - 7y = 19 \\ 6x_0 - 7x_0 = 19 \end{cases}$$
 بطرح المعادلتين طرف لطرف نجد:

ومنه: $6(x - x_0) - 7(y - y_0) = 0$ وتكافئ $6(x - x_0) = 7(y - y_0) \dots (1)$

من (1) نستنتج أن 6 يقسم $7(y - y_0)$ ومنه 6 يقسم $(y - y_0)$ لأن 6 أولي مع 7 (حسب غوص)

وعليه يكون لدينا: $(y - y_0) = 6k$ ومنه $y = 6k - 19$

بتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد: $x = 6k - 19$

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $(x; y) = (7k - 19; 6k - 19)$ حيث k عدد صحيح

2) استنتاج قيم العدد الصحيح λ التي تحقق $\begin{cases} \lambda \equiv 24[7] \\ \lambda \equiv 5[6] \end{cases}$ ، ثم تعيين باقي قسمة العدد λ على 42

لدينا:
$$\begin{cases} \lambda \equiv 24[7] \\ \lambda \equiv 5[6] \end{cases}$$
 تكافئ $\begin{cases} \lambda = 7\alpha + 24 \\ \lambda = 6\beta + 5 \end{cases}$ وتكافئ $6\beta - 7\alpha = 19 \dots (E')$

بالمطابقة بين المعادلتين (E) و (E') نستنتج أن: $\beta = x = 7k - 19$

وعليه يكون لدينا: $\lambda \equiv 6(7k - 19) + 5$ أي $\lambda \equiv 42k - 119$

$\lambda \equiv 42k - 119^*$ تكافئ $\lambda \equiv 42k + 7$ لأن $-119 \equiv 7[42]$

ومنه باقي قسمة العدد λ على 42 هو 7.

3) تعيين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x + y - 1| \leq 13$

لدينا: $(x; y) = (7k - 19; 6k - 19)$ و $|x + y - 1| \leq 13$ ومنه: $|7k + 6k - 39| \leq 13$ وتكافئ $|13k - 39| \leq 13$ أي $|k - 3| \leq 1$ أي $2 \leq k \leq 4$ ومنه: $k \in \{2; 3; 4\}$ ومنه الثنائيات $(x; y)$ هي: $(-5; -7)$ ، $(-1; 2)$ و $(5; 9)$

4-أ) دراسة بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 7

لدينا: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$ بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

$n =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3

ب) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020[7] \\ n \equiv 1437[6] \end{cases}$

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020[7] \\ n \equiv 1437[6] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} n - 5^n \equiv 4[7] \\ n \equiv 3[6] \end{cases} \text{ وتكافئ } \begin{cases} 6k + 3 \equiv 5^{6k+3} + 4[7] \\ n \equiv 6k + 3 \end{cases}$$

$$\text{وتكافئ } \begin{cases} k \equiv 0[7] \\ n \equiv 6k + 3 \end{cases} \text{ وتكافئ } \begin{cases} k \equiv 7p \\ n \equiv 6k + 3 \end{cases} \text{ ومنه } n = 42p + 3 \text{ حيث } p \text{ عدد طبيعي.}$$

التمرين 30: دورة جوان 2015 الموضوع 1

1-أ) تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد 8^n على 13.

لدينا: $8^0 \equiv 1[13]$ ، $8^1 \equiv 8[13]$ ، $8^2 \equiv 12[13]$ ، $8^3 \equiv 5[13]$ ، $8^4 \equiv 1[13]$ بواقي قسمة 8^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$
$8^n \equiv$	1	8	12	5

ب) استنتاج باقي القسمة الأقليدية للعدد $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13.

لدينا: $42 \equiv 3[13]$ و $138 \equiv 8[13]$ ومنه $138^{2015} \equiv 8^{2015}[13]$ لكن $2015 \equiv 3[4]$ ومنه $8^{2015} \equiv 5[13]$ أي $138^{2015} \equiv 5[13]$ لدينا: $2014 \equiv 12[13]$ أي $2014 \equiv -1[13]$ لأن $12 \equiv -1[13]$. ومنه: $2014^{2037} \equiv (-1)^{2037}[13] \equiv -1[13]$ أي $2014^{2037} \equiv (-1)[13]$ لأن 2037 عدد فردي. وعليه: $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 \equiv 3 \times 5 - 1 - 3[13] \equiv 11[13]$

إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13 هو 11.

2-أ) تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n + 6) \times 8^{2n}[13]$

لدينا: $64^n = 8^{2n}$ و $5 \equiv -8[13]$ ومنه $5^{2n+3} \equiv (-8)^{2n+3}[13]$

لكن $[13] 8^3 \cdot (-1)^{2n+3} \equiv (-8)^{2n+3} \equiv (-8)^{2n} \cdot (-8)$ أي $[13] 8^3 \cdot (-1)^{2n+3} \equiv (-8)^{2n+3}$

ومنه : $[13] (5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+1) \times 8^{2n} + 5 \times 8^{2n}$

أي : $[13] (5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6) \times 8^{2n}$

ب) تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون : $[13] (5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0$

من الجواب السابق لدينا : $[13] (5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6) \times 8^{2n}$

ومنه : $[13] (5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0$ تكافئ $[13] (5n+6) \times 8^{2n} \equiv 0$

وتكافئ $[13] (5n+6) \equiv 0$ لأن 8^{2n} أولي مع 13 وعليه 8^{2n} أولي مع 13 (خاصية)

$[13] (5n+6) \equiv 0$ تكافئ $[13] 5n \equiv -6$ وتكافئ $[13] 5n \equiv 20$ لأن $-6 \equiv 20 [13]$

$[13] 5n \equiv 20$ تكافئ $[13] n \equiv 4$ أي $n = 13p + 4$ حيث p عدد طبيعي.

التمرين 31 دورة جوان 2013 الموضوع 1

1- أ) تعيين $(x_0; y_0)$ ، حلول المعادلة (E) الذي يحقق : $x_0 + y_0 = -1$.

لدينا: الثنائية $(x_0; y_0)$ تحقق الجملة التالية : $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ -7x_0 - 7y_0 = 7 \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ x_0 + y_0 = -1 \end{cases}$

بالجمع طرف لطرف نجد : $4x_0 = 8$ ومنه : $x_0 = 2$ ولدينا : $y_0 = -1 - x_0 = -3$

ومنه الثنائية $(x_0; y_0) = (2; -3)$.

ب- استنتاج حلول المعادلة (E).

لدينا: الثنائية $(x_0; y_0) = (2; -3)$ حل خاص للمعادلة (E)

ومنه : $\begin{cases} 11x + 7y = 1 \\ 11(2) + 7(-3) = 1 \end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد : $11(x - 2) + 7(y + 3) = 0$

ولدينا : $11(x - 2) + 7(y + 3) = 0$ تكافئ (*) $11(x - 2) = 7(-y - 3)$

المعادلة (*) تعني أن $7 / 11(x - 2)$ ومنه $7 / (x - 2)$ لأن 7 أولي مع 11 حسب مبرهنة غوص.

أي : $x - 2 = 7k$ إذن $x = 7k + 2$ حيث k عدد صحيح.

بتعويض قيمة x في المعادلة (*) نجد : $11(7k) = 7(-y - 3)$ أي $y = -11k - 3$

ومنه حلول المعادلة (E) هي : $(x; y) = (7k + 2; -11k - 3)$

2- أ) تبين أن $(a; -b)$ حل للمعادلة (E).

لدينا : $\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$ وتكافئ $11a + 1 = 7b + 2$ وتكافئ $11a + 7(-b) = 1$

العلاقة $11a + 7(-b) = 1$ تعني أن الثنائية $(a; -b)$ حلا للمعادلة (E).

ب) تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد S على 77

من الجواب السابق لدينا: $(a; -b) = (7k + 2; -11k - 3)$ (E) ومنه: $(a; -b) = (7k + 2; -11k - 3)$ أي: $a = 7k + 2$ بتعويض قيمة a في المعادلة $S = 11a + 1$ نجد: $S = 11(7k + 2) + 1 = 77k + 23$ العلاقة $S = 77k + 23$ تعني أن 23 هو باقي قسمة S على 77.

التمرين 32: دورة جوان 2012 الموضوع 1

1-دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي قسمة 9^n على 11
لدينا: $9^0 \equiv 1[11]$ ، $9^1 \equiv 9[11]$ ، $9^2 \equiv 4[11]$ ، $9^3 \equiv 3[11]$ ، $9^4 \equiv 5[11]$ ، $9^5 \equiv 1[11]$
بواقي قسمة 9^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وحسب الجدول التالي

$n =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$	
$9^n \equiv$	1	9	4	3	5	[11]

2-تعيين باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 .

لدينا: $2011 \equiv 9[11]$ ومنه $2011^{2012} \equiv 9^{2012}[11]$
لكن: $2012 \equiv 2[5]$ ومنه $2011^{2012} \equiv 4[11]$ لأن $9^{2012} = 9^{5k+2} \equiv 4[11]$ انظر الجدول.
ومنه باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 هو 4

3-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد: $4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012}$ يقبل القسمة على 11

لدينا: $9^{15n+1} = (9^{5n})^3 \times 9 \equiv 9[11]$ لأن $9^{5n} \equiv 1[11]$
ولدينا: $2011^{10n} \equiv (9^{5n})^2[11] \equiv 1[11]$ ومنه $2011^{10n} \equiv 1[11]$ لأن $9^{5n} \equiv 1[11]$.
ولدينا: $2011^{2012} \equiv 4[11]$ من الجواب السابق.

وعليه: $4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012} \equiv 4 \times 9 + 4 \times 1 + 4[11] \equiv 0[11]$
أي $4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012} \equiv 0[11]$ لأن: $4 \times 9 + 4 \times 1 + 4 = 44 = 4 \times 11$

4-تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد: $2011^{2012} + 2n + 2$ يقبل القسمة على 11

$2011^{2012} + 2n + 2 \equiv 0[11]$ يقبل القسمة على 11 معناه $2011^{2012} + 2n + 2 \equiv 0[11]$
لدينا: $2011^{2012} + 2n + 2 \equiv 0[11]$ تكافئ $4 + 2n + 2 \equiv 0[11]$ لأن $2011^{2012} \equiv 4[11]$
تكافئ $2n \equiv -6[11]$ أي $n \equiv -3[11]$
ومنه: $n \equiv 8[11]$ إذن $n = 11\alpha + 8$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.

التمرين 33: دورة جوان 2012 الموضوع 2

1-تبين أن العدد 153 حل للجملة (S).

لدينا: $\begin{cases} 153 = 15 \times 10 + 3 \\ 153 = 7 \times 21 + 6 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 153 \equiv 3[15] \\ 153 \equiv 6[7] \end{cases}$ أي أن 153 حل للجملة (S)

2-تبين أن: (x) حل لـ (S)، يكافئ $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$

1) نبرهن أنه إذا كان x_0 حلا لـ (S) و x حلا للجملة (S) فإن: $\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{array} \right\}$

لدينا (1).... $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{array} \right\}$ و x حلا لـ (S) معناه (2).... $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{array} \right\}$

من (1) و (2) نستنتج أن $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv x_0[15] \\ x \equiv x_0[7] \end{array} \right\}$ ومنه: $\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{array} \right\}$

2) نبرهن أنه إذا كان $\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{array} \right\}$ و x_0 حلا لـ (S) فإن x حلا للجملة (S)

لدينا: (2).... $\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{array} \right\}$ و (1).... $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{array} \right\}$

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد: $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{array} \right\}$ ومعناه أن x حلا للجملة (S)

3- حل الجملة (S).

لدينا: $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{array} \right\}$ تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} 7x \equiv 21[105] \text{.....(1)} \\ 15x \equiv 90[105] \text{.....(2)} \end{array} \right\}$ وتكافئ نجد: $x \equiv 153[105]$ من الجواب 1

وأخيرا $x \equiv 48[105]$ لأن $153 \equiv 48[105]$ إذن $x = 105k + 48$ حيث k عدد صحيح.

4- تعيين عدد الكتب

نفرض أن عدد الكتب هو x

ولدينا: استعمل علما تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب معناه $x = 15\alpha + 3$

و إذا استعمل علما تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب معناه $x = 7\beta + 6$

ومنه x يحقق الجملة (S) حيث $500 < x < 600$

لدينا من الجواب 3) أن $x = 105k + 48$ ومنه $500 < 105k + 48 < 600$

لدينا: $500 < 105k + 48 < 600$ تكافئ $452 < 105k < 552$ أي $\frac{452}{105} < k < \frac{552}{105}$ ومنه $k = 5$

بتعويض قيمة k في المعادلة $x = 105k + 48$ نجد: $x = 573$

التمرين 34: دورة جوان 2011 الموضوع 2

1- التحقق أن: $4 \equiv -3[7]$ ثم تبين أن: $A_3 \equiv 6[7]$

لدينا: $7 \equiv 0[7]$ ومنه $4 + 3 \equiv 0[7]$ إذن $4 \equiv -3[7]$

لدينا: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ ومنه $A_3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$

ولدينا: $4 \equiv -3[7]$ و $5 \equiv -2[7]$ و $6 \equiv -1[7]$

ومنه : $A_3 \equiv 2^3 + 3^3 + (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 [7]$

ومنه $A_3 \equiv 2^3 + 3^3 - (3)^3 - (2)^3 - (1)^3 [7]$ لان الأس فردي

إذن: $A_3 \equiv -1[7]$ ومعناه $A_3 \equiv 6[7]$ لأن $-1 \equiv 6[7]$.

2-دراسة، وحسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 2^n و 3^n على 7

دراسة بواقي قسمة قسمة 2^n على 7

لدينا: $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$ ،

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$2^n \equiv$	1	2	4

دراسة بواقي قسمة قسمة 3^n على 7

لدينا: $3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ، $3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ و $3^6 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 3^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

$n =$	$6k'$	$6k' + 1$	$6k' + 2$	$6k' + 3$	$6k' + 4$	$6k' + 5$
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5

3- تبيان أنه إذا كان n فرديا فإن: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7.

لدينا: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ حيث n عدد فردي أي $n = 2p + 1$

نعلم أن: $(-a)^{2p+1} = -a^{2p+1}$

ومنه : $A_n + 1 \equiv 0[7]$ وعليه $A_n = 2^{2p+1} + 3^{2p+1} - 3^{2p+1} - 2^{2p+1} - 1^{2p+1} = -1$

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.

بما أن العدد 2011 عدد فردي فإن $A_{2011} + 1 \equiv 0[7]$ أي $A_{2011} \equiv 6[7]$ ومنه الباقي هو 6

4- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7.

لدينا: $A_{1432} = 2^{1432} + 3^{1432} + 4^{1432} + 5^{1432} + 6^{1432}$

نعلم أن: $(-a)^{2p} = a^{2p}$ ومنه : $A_{1432} = 2^{1432} + 3^{1432} + 3^{1432} + 2^{1432} + 1^{1432} = 2^{2864} + 2 \cdot 3^{1432} + 1$

ولدينا: $2864 = 3(954) + 2$ من الشكل $3k + 2$ و $1432 = 6(238) + 4$ من الشكل $6k' + 4$

ومنه: $A_{1432} = 2^{2864} + 2 \cdot 3^{1432} + 1 \equiv 4 + 2 \cdot 4 + 1[7] \equiv 6[7]$ أي $A_{1432} \equiv 6[7]$ ومنه الباقي هو 6.

التمرين 35: دورة جوان 2010 الموضوع 1

1- تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 .

n العدد الطبيعي الذي يكتب في نظام العددي الأساس 7 كمايلي :

$$n = \overline{11\alpha 00} \text{ حيث } \alpha \text{ عدد طبيعي و } 0 \leq \alpha \leq 6$$

ومنه: $n = \overline{11\alpha 00} = 1.7^4 + 1.7^3 + \alpha.7^2 + 0.7 + 0.7^0 = 49\alpha + 2744$ في النظام العشري

* العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 معناه $\alpha \equiv 0[3]$

$$49\alpha + 2744 \equiv 0[3] \text{ معناه } \alpha \equiv 0[3] \text{ لأن } 49 \equiv 1[3] \text{ و } 2744 \equiv 2[3]$$

$$\alpha + 2 \equiv 0[3] \text{ تكافئ } \alpha \equiv 1[3] \text{ أي } \alpha = 3k + 1 \text{ ومنه } \alpha = 4 \text{ لأن: } 0 \leq \alpha \leq 6$$

2- تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5 .

* العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5 معناه $\alpha \equiv 0[5]$

$$49\alpha + 2744 \equiv 0[5] \text{ معناه } \alpha \equiv 0[5] \text{ لأن } 49 \equiv -1[5] \text{ و } 2744 \equiv -1[5]$$

$$\alpha + 1 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } \alpha \equiv 4[5] \text{ أي } \alpha = 5k + 4 \text{ ومنه } \alpha = 4 \text{ لأن: } 0 \leq \alpha \leq 6$$

استنتاج العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15.

العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15 معناه n قابلا للقسمة على 5 وعلى 3 معا (خاصية)

ومنه : $\alpha = 4$ حسب الجواب 1 و 2 السابقين.

3- نأخذ : $\alpha = 4$ كتابة العدد n في النظام العشري.

$$\text{لدينا: } n = 49\alpha + 2744 = 2940 \text{ في النظام العشري ومنه : } n = 49(4) + 2744 = 2940$$

التمرين 36: دورة جوان 2010 الموضوع 2

1- تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 10^n على 13

$$10^0 \equiv 1[13], 10^1 \equiv 10[13], 10^2 \equiv 9[13], 10^3 \equiv 12[13], 10^4 \equiv 3[13], 10^5 \equiv 4[13] \text{ و } 10^6 \equiv 1[13]$$

بواقي قسمة 10^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

$n =$	$6k'$	$6k'+1$	$6k'+2$	$6k'+3$	$6k'+4$	$6k'+5$
$10^n \equiv$	1	10	9	12	3	4

2- التحقق أن : $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$.

$$\text{لدينا: } 2008 = 6(334) + 4 \text{ من الشكل } 6k' + 4 \text{ ومنه } 10^{2008} \equiv 3[13] \text{ حسب الجدول}$$

$$\text{ومنه: } (10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 3^2 + 3 + 1[13] \text{ أي } (10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 13[13]$$

$$\text{أي } (10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$$

3- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.

لتعيين قيم العدد الطبيعي n شكل الجدول التالي

$n =$	$6k'$	$6k'+1$	$6k'+2$	$6k'+3$	$6k'+4$	$6k'+5$
$10^n \equiv$	1	10	9	12	3	4
$10^{2n} \equiv$	1	9	3	1	9	3
$10^{2n} + 10^n + 1 \equiv$	3	7	0	1	0	7

من الجدول السابق نستنتج ان: $n = 6k' + 2$ أو $n = 6k' + 4$ حيث k' عدد طبيعي

التمرين 37: دورة جوان 2009 الموضوع 2

1- حل المعادلة التفاضلية: $y' = (\ln 2)y$.

تذكير: حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو $y = c.e^{ax} - \frac{b}{a}$

وعليه حلول المعادلة التفاضلية: $y' = (\ln 2)y$ هو $y = c.e^{x \ln 2} = c.2^x$ حيث c عدد حقيقي ثابت

2- تعيين الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق: $f(0) = 1$. عين عبارة $f(x)$.

لدينا: $y = f(x) = c.2^x$ و $f(0) = 1$ ومنه: $c.2^0 = 1$ أي $c = 1$ إذن: $f(x) = 2^x$.

3- أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n .

لدينا: $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$ ،

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n \equiv$	1	2	4

ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$.

لدينا: $f(2009) = 2^{2009}$ ولدينا: $2009 = 3(669) + 2$ من الشكل $3k + 2$

ومنه: $f(2009) - 4 \equiv 2^{3k+2} - 4[7]$ أي $f(2009) - 4 \equiv 0[7]$ لأن: $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$ هو 0

4- أ) حساب بدلالة n ، المجموع S_n

لدينا: $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) = 2^0 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$

ومنه S_n هو مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 2

وعليه: $S_n = 1 \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7

S_n يقبل القسمة على 7 معناه $S_n \equiv 0[7]$

$S_n \equiv 0[7]$ معناه $2^{n+1} \equiv 1[7]$ ومنه $n + 1 = 3k$ حسب الجدول ومنه $n = 3k - 1$ مع $k \in \mathbb{N}^*$.

أ- تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

نضع: $d = \text{PGCD}(a; b)$ نلاحظ أن: $b - 2a = 7$

لدينا: d يقسم a ويقسم b ومنه d يقسم الفرق $b - 2a$ وعليه d يقسم 7 ومنه: $d = 1$ أو $d = 7$

ب- تبين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ ضاعفا للعدد 7.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2n + 3 \equiv 0[7] \dots (1) \\ n - 2 \equiv 0[7] \dots (2) \end{array} \right. \text{ ويكافئ } \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[7] \end{array} \right. \text{ معناه } b \text{ و } a \text{ من مضاعفات 7}$$

بطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد $n + 5 \equiv 0[7]$ ويكافئ $n + 5$ ضاعفا للعدد 7.

ج- تعيين قيم n التي من أجلها $\text{PGCD}(a; b) = 7$.

$$\text{PGCD}(a; b) = 7 \text{ معناه } \left\{ \begin{array}{l} 2n + 3 \equiv 0[7] \dots (1) \\ n - 2 \equiv 0[7] \dots (2) \end{array} \right. \text{ ومعناه } n + 5 \equiv 0[7] \text{ حسب الجواب السابق}$$

$$n + 5 \equiv 0[7] \text{ تكافئ } n + 5 = 7k \text{ أي } n = 7k + 2 \text{ حيث } k \text{ عدد طبيعي أكبر من } 0$$

أ- تبين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$

$$\text{لدينا: } p = 2n^2 - 7n - 15 = (n - 5)(2n + 3) \text{ ومنه } p \text{ مضاعف للعدد } n - 5$$

$$q = n^2 - 7n + 10 = (n - 5)(n - 2) \text{ ومنه } q \text{ مضاعف للعدد } n - 5$$

ب- تعيين تبعاً لقيم n وبدلالة n ، $\text{PGCD}(p; q)$.

$$\text{لدينا: } p = 2n^2 - 7n - 15 = (n - 5)b \text{ و } q = n^2 - 7n + 10 = (n - 5)a$$

$$\text{ومنه: } \text{PGCD}(p; q) = (n - 5)\text{PGCD}(a; b) \text{ خاصية}$$

ولدينا: $\text{PGCD}(a; b) = 1$ أو $\text{PGCD}(a; b) = 7$ حسب الجواب أ، ومنه نميز حالتين هما:

الحالة 1: $\text{PGCD}(a; b) = 1$ ومنه $\text{PGCD}(p; q) = (n - 5)$ حيث n أكبر من 5 مع $n \neq 7k + 2$

الحالة 2: $\text{PGCD}(a; b) = 7$ ومنه $\text{PGCD}(p; q) = 7(n - 5)$ حيث n أكبر من 5 مع $n = 7k + 2$

1) التأكد أن الثنائية (82;1) حلا للمعادلة (1). ثم حل المعادلة (1)

*الثنائية (82;1) حلا للمعادلة (1) لأن: $4(82) - 9(1) = 319$

*لدينا:
$$\begin{cases} 4x - 9y = 319 \dots (1) \\ 4(82) - 9(1) = 319 \dots (2) \end{cases}$$
 بطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد: $4(x - 82) - 9(y - 1) = 0$

ومنه: $4(x - 82) = 9(y - 1) \dots (*)$

من (*) نستنتج أن: 9 يقسم $4(x - 82)$ ومنه 9 يقسم $(x - 82)$ لأن 9 أولي مع 4 (حسب مبرهنة غوص)

ومنه: $(x - 82) = 9k$ أي $x = 9k + 82$ وبعد تعويض قيمة x في (*) نجد: $y = 4k + 1$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (9k + 82; 4k + 1)$ مع أن k عدد صحيح.

2) تعيين الثنائيات $(a; b)$ الصحيحة حلول المعادلة: $4a^2 - 9b^2 = 319 \dots (2)$

لدينا: $4a^2 - 9b^2 = 319 \dots (2)$ تكافئ $(2a - 3b)(2a + 3b) = 319$

نبحث عن قواسم العدد 319

لدينا: $319 = 11 \times 29$ ومنه عدد القواسم هو $4 = (1+1)(1+1)$ ومنه: $D_{319} = \{1; 11; 29; 319\}$

ملاحظة 1: إذا كانت الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (2) فإن الثنائية $(-a; -b)$ حلا أيضا.

ومنه يمكن البحث عن الحلول الموجبة فقط .

ملاحظة 2: $2a - 3b > 2a + 3b$

الحالة 1: $(2a - 3b)(2a + 3b) = 1 \times 319$ وتكافئ:
$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \dots (1) \\ 2a + 3b = 319 \dots (2) \end{cases}$$
 بجمع (2) و (1) طرف

لطرف نجد: $4a = 320$ ومنه: $a = 80$ وبعد تعويض قيمة a في (1) نجد: $b = 53$

الحالة 2: $(2a - 3b)(2a + 3b) = 11 \times 29$ وتكافئ:
$$\begin{cases} 2a - 3b = 11 \dots (1) \\ 2a + 3b = 29 \dots (2) \end{cases}$$
 بجمع (2) و (1) طرف

لطرف نجد: $4a = 40$ ومنه: $a = 10$ وبعد تعويض قيمة a في (1) نجد: $b = 3$ ومنه الثنائيات $(a; b)$ هي:

$(80; 53)$ ، $(-80; 53)$ ، $(-80; -53)$ ، $(80; -53)$ ، $(10; 3)$ ، $(-10; 3)$ ، $(-10; -3)$ و $(10; -3)$

استنتاج الثنائيات $(x_0; y_0)$ حلول المعادلة (1) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

$4a^2 - 9b^2 = 319 \dots (2)$ تكافئ $4x_0 - 9y_0 = 319 \dots (2)$ حيث $x_0 = a^2$ و $y_0 = b^2$

ومنه الثنائيات $(x_0; y_0)$ حلول المعادلة (1) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين هي:

$(640; 2809)$ و $(100; 9)$

شعبة الرياضيات :

التمرين 40: دورة 2018

(1) تعيين العددين α و β ن ثم بين أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \text{ لدينا: } \alpha \text{ و } \beta \text{ عددان طبيعيان بحيث:}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2018 \\ \beta = \alpha - 1 = 2017 \end{cases} \text{ وتكافئ } \begin{cases} 2\alpha = 4036 \\ \alpha = 1 + \beta \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

** العددان $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما معناه $\frac{\alpha}{2}x_0 + \beta y_0 = 1$ حيث $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$ حسب بيزو

لدينا: $1009x_0 + 2017y_0 = 1$ حيث $(x_0; y_0) = (2; -1)$ وعليه العددان $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما

ملاحظة: يمكن اثبات ان $\text{PGCD}(\beta; \frac{\alpha}{2}) = 1$

(2) تعيين كل الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ التي تحقق المعادلة : $1009x - 2017y = 1$.

من الجواب السابق لدينا: $1009(2) + 2017(-1) = 1$ والتي تكافئ $1009(2) - 2017(1) = 1$
 $1009x - 2017y = 1 \dots (1)$ حل خاص للمعادلة $1009x - 2017y = 1$ تعني أن الثنائية $(2; -1)$ حل خاص للمعادلة

$$\begin{cases} 1009x - 2017y = 1 \\ 1009(2) - 2017(1) = 1 \end{cases} \text{ لدينا: بطرح المعادلتين طرف لطرف نجد:}$$

ومنه: $1009(x - 2) - 2017(y - 1) = 0$ وتكافئ $1009(x - 2) = 2017(y - 1) \dots (1)$
 من (1) نستنتج أن: 1009 يقسم $2017(y - 1)$ ومنه 1009 يقسم $(y - 1)$ لأن 2017 أولي مع 1009
 وعليه يكون لدينا: $(y - 1) = 1009k$ ومنه $y = 1009k + 1$
 بتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد: $x = 2017k + 2$

ومنه حلول المعادلة هي: $(x; y) = (2017k + 2; 1009k + 1)$ حيث k عدد صحيح

(3) تعيين الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة: $\begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$

$$\text{الجملة: } \begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a \equiv 2[2017] \\ a \equiv 1[1009] \end{cases} \text{ لأن } 2019 \equiv 2[2017] \text{ و } 2019 \equiv 1[1009]$$

$$\text{وعليه } \begin{cases} a = 2017\alpha + 2 \\ a = 1009\beta + 1 \end{cases} \text{ ومنه } 1009\beta - 2017\alpha = 1 \dots (2)$$

بمطابقة المعادلتين (1) و (2) نستنتج أن: $\alpha = y = 1009k + 1$ و $\beta = x = 2017k + 2$

ومنه: $a = 2017(1009k + 1) + 2 = 2035153k + 2019$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

4-أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

لدينا: $7^3 \equiv 1[9]$ ، $7^2 \equiv 4[9]$ ، $7^1 \equiv 7[9]$ ، $7^0 \equiv 1[9]$

بواقي قسمة 7^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$7^n \equiv$	1	7	4

ب) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

لدينا L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كمايلي: $L = \overline{111...1}$

ومنه: $L = \overline{111...1} = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{2017}$

L هو مجموع متتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 7 وعليه: $L = \frac{7^{2018} - 1}{6}$

$L = \frac{7^{2018} - 1}{6}$ تكافئ $42L = 7^{2019} - 7$ وذلك بعد ضرب الطرفين في 42

$7^{2019} - 7 \equiv 0[9]$ لأن $7^{2019} \equiv 7[9]$

التمرين 41: دورة 2017 م 1

1-أ) حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 ثم تبين أن المعادلة (E) تقبل حولا

* لحساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 نستعمل طريقة خوارزمية أقليدس أو طريقة جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين.

الطريقة 1: $104 = 20 \times 5 + 4$ و $20 = 4 \times 5 + 0$

ومنه القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 هو 4 آخر باقي غير معدوم

الطريقة 2: $104 = 2^3 \times 13$ و $20 = 2^2 \times 5$

ومنه القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 هو $2^2 = 4$ العوامل المشتركة وبأصغر أس.

* لدينا: (E) $104x - 20y = 272....$

المعادلة (E) تقبل حولا لأن الق.م أ للعددين 104 و 20 يقسم العدد 272 لأن: $272 = 4 \times 68$

ب- تبين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$

لدينا المعادلة (E) تكافئ (E') $26x - 5y = 68....$ وذلك بعد تقسيم طرف المعادلة (E) على 4

ولدينا أيضا (E') تكافئ $26x = 68 + 5y$ أي $26x \equiv 68[5]$

ومنه $x \equiv 3[5]$ لأن $26 \equiv 1[5]$ و $68 \equiv 3[5]$.

استنتاج حلول المعادلة (E)

المعادلتين (E) و (E') لهما نفس الحلول لأنهما متكافئتين

وعليه ومن الجواب السابق لدينا: $x \equiv 3[5]$ ومعناه $x = 5k + 3$ حيث k عدد صحيح.

من المعادلة (E') لدينا $5y = -68 + 26x$ وبعد تعويض قيمة x نجد:

$$y = 21k + 2 \text{ أي } 5y = -68 + 26(5k + 3) = 5(21k + 2)$$

والخلاصة حلول المعادلة (E) هي: $(x; y) = (5k + 3; 21k + 2)$ حيث k عدد صحيح.

(2) تعيين α و β ثم كتابة λ في النظام العشري.

* لدينا: λ يكتب $1\alpha\alpha\beta 01$ في النظام الذي أساسه 4 .

$$\lambda = 1 \times 4^5 + \alpha \times 4^4 + \alpha \times 4^3 + \beta \times 4^2 + 1 = 1025 + 320\alpha + 16\beta \dots (1) \text{ ومنه:}$$

ولدينا أيضا λ يكتب $1\alpha\beta 01$ في النظام الذي أساسه 6

$$\lambda = 1 \times 6^4 + \alpha \times 6^3 + \beta \times 6^2 + 1 = 1267 + 216\alpha + 36\beta \dots (2) \text{ ومنه:}$$

$$\text{من (1) و (2) نجد: } 1025 + 320\alpha + 16\beta = 1267 + 216\alpha + 36\beta$$

$$\text{وبعد التبسيط نجد: } 104\alpha - 20\beta = 272 \text{ حيث } 0 \leq \alpha \leq 3 \text{ و } 0 \leq \beta \leq 3$$

$$\text{بمطابقة المعادلة } 104\alpha - 20\beta = 272 \text{ مع المعادلة (E) } 104x - 20y = 272 \dots$$

$$\text{نسنتج أن: } \alpha = x = 5k + 3 \text{ و } \beta = y = 21k + 2$$

$$\text{وبما أن } 0 \leq \alpha \leq 3 \text{ و } 0 \leq \beta \leq 3 \text{ نستنتج أن: } k = 0 \text{ وعليه يكون: } (\alpha; \beta) = (3; 2)$$

$$\text{* لدينا: } \lambda = 1025 + 320\alpha + 16\beta \text{ حيث } (\alpha; \beta) = (3; 2) \text{ ومنه } \lambda = 2017 .$$

(3) التحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي

$$\text{لدينا: } \sqrt{2017} = 44,91 \text{ و } \sqrt{1009} = 31,76$$

العدد 2017 أوي لأنه لا يقبل القسمة على كلا من الأعداد الأولية الأصغر من 43

العدد 1009 أوي لأنه لا يقبل القسمة على كلا من الأعداد الأولية الأصغر من 31

تعيين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m - d = 2017$

$$\text{لدينا: } d = \text{PGCD}(a; b) \text{ و } m = \text{PPCM}(a; b)$$

$$\text{ونعلم أن: } d = \text{PGCD}(a; b) \text{ تكافئ } a = a'.d \text{ و } b = b'.d \text{ حيث } \text{PGCD}(a'; b') = 1$$

$$\text{ونعلم أن: } m \times d = a \times b \text{ أي } m = d \times a' \times b'$$

$$\text{بعد تعويض قيمة } m = d \times a' \times b' \text{ في العلاقة } 2m - d = 2017 \text{ نجد: } (*) \dots 2a' \times b' - 1 = \frac{2017}{d}$$

من العلاقة (*) نستنتج أن: d يقسم العدد 2017 أي $d = 1$ أو $d = 2017$ لأن 2017 أوي

الحالة 1: من أجل $d = 1$ العلاقة (*) تكافئ $a' \times b' = 1009$

وعليه $(a'; b') = (1; 1009)$ أو $(a'; b') = (1009; 1)$ لأن 1009 أوي

الحالة 2: من أجل $d = 2017$ العلاقة (*) تكافئ $a' \times b' = 1$

لا توجد قيم للعددين a' و b'

من الحالة 1 نستنتج أن: $(a; b) = (1; 1009)$ أو $(a; b) = (1009; 1)$

التمرين 42: دورة 2017 م

1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$.

(u_n) معرفة بحدّها الأول: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 7u_n + 8$.
*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $3u_0 = 3$ محققة لأن $u_0 = 1$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $3u_n = 7^{n+1} - 4$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 7u_n + 8$ ومنه $3u_{n+1} = 7(3u_n) + 24$

ولدينا من فرضية التراجع $3u_n = 7^{n+1} - 4$ وعليه $3u_{n+1} = 7(7^{n+1} - 4) + 24$

أي $3u_{n+1} = 7 \cdot 7^{n+1} - 28 + 24$ وأخيرا $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

ومنه الخاصية $3u_n = 7^{n+1} - 4$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

2) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n .

$S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$ هو مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 7

$$\text{ومنّه: } S_n = 1 \left(\frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} \right) = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

إيجاد علاقة بين S_n و S'_n .

لدينا: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ولدينا أيضا $3u_n = 7^{n+1} - 4$

ومنّه: $3S'_n = 3u_0 + 3u_1 + \dots + 3u_n$

$$\text{أي } 3S'_n = [(7 - 4) + (7^2 - 4) + \dots + (7^{n+1} - 4)] = 7(1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n) - 4(n+1)$$

$$\text{إذن } 3S'_n = 7S_n - 4(n+1)$$

ب- استنتاج أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

من الجواب السابق لدينا $3S'_n = 7S_n - 4(n+1)$ بضرب طرفي هذه العلاقة في 6 نجد

$$18S'_n = 7(6S_n) - 24(n+1) \text{ لكن لدينا } S_n = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

$$\text{ومنّه } 18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31 \text{ إذن } 18S'_n = 7 \left(6 \frac{7^{n+1} - 1}{6} \right) - 24(n+1)$$

3-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5

لدينا: $7^0 \equiv 1[5]$, $7^1 \equiv 2[5]$, $7^2 \equiv 4[5]$, $7^3 \equiv 3[5]$, $7^4 \equiv 1[5]$.

بواقي قسمة 7^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$7^n \equiv$	1	2	4	3

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S'_n قابلا القسمة على 5.

S'_n قابلا القسمة على 5 معناه $S'_n \equiv 0[5]$ تكافئ $18S'_n \equiv 0[5]$ (ضرب الطرفين في 18)
وتكافئ $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 0[5]$ وتكافئ $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$

لتعين قيم العدد الطبيعي نميز عدة حالات هي:

- (1) $n = 4k$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 3[5]$ وعليه $n = 20k' + 12$ ($k' \in \mathbb{N}$)
- (2) $n = 4k + 1$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 3[5]$ وعليه $n = 20k' + 13$ ($k' \in \mathbb{N}$)
- (3) $n = 4k + 2$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 2[5]$ وعليه $n = 20k' + 10$ ($k' \in \mathbb{N}$)
- (4) $n = 4k + 3$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 4[5]$ وعليه $n = 20k' + 19$ ($k' \in \mathbb{N}$)

التمرين 43: دورة 2017 الاستدراكية

1) التحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما.

لإثبات أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما معناه $\text{PGCD}(63; 5) = 1$
الطريقة: $\text{PGCD}(63; 5) = 1$

لدينا: $63 = 5 \cdot 12 + 3$ و $5 = 3 \cdot 1 + 2$ و $3 = 2 \cdot 1 + 1$

آخر باقي غير معدوم في القسمة المتتالية لخوارزمية إقليدس هو 1 ومنه $\text{PGCD}(63; 5) = 1$
ملاحظة: يمكن استعمال مبرهنة بيزو

تبيان أن المعادلة (E) تقبل حولا.

تذكير: المعادلة $ax + by = c$ تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$ معناه $\text{PGCD}(a; b)$ يقسم العدد c

لدينا : (E) $63x + 5y = 159$

المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$ لأن $\text{PGCD}(63; 5) = 1$ يقسم 159

2) البرهان أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$.

لدينا : (E) $63x + 5y = 159$ تكافئ: $63x = 159 - 5y$ أي $63x \equiv 159[5]$

ومنه $3x \equiv 9[5]$ لأن $63 \equiv 3[5]$ و $159 \equiv 9[5]$

ومنه أيضا $3x \equiv 9[5]$ تكافئ $x \equiv 3[5]$ لأن 3 أولي مع 5

استنتاج حلول المعادلة (E)

من الجواب السابق لدينا: $x \equiv 3[5]$ وعليه $x = 5k + 3$ حيث k عدد صحيح.

لدينا: (E) $63x + 5y = 159$ تكافئ $5y = 159 - 63x$

بتعويض قيمة $x = 5k + 3$ في المعادلة $5y = 159 - 63x$ نجد:

$-5y + 159 = 63(5k + 3)$ أي $-5y = 30 + 63 \times 5k$ إذن $y = -63k - 6$

الخلاصة: حلول المعادلة (E) هي المجموعة: $\{(x; y) = (5k + 3; -63k - 6); k \in \mathbb{Z}\}$

3) إيجاد العددين الطبيعيين α و β .

لدينا: λ عدد طبيعي يكتب $5\alpha 0\alpha$ في النظام ذي الأساس 7

$$\lambda = \overline{5\alpha 0\alpha}^7 = \alpha + 7^2\alpha + 7^3.5 = 50\alpha + 1715 \dots (1) \text{ ومنه:}$$

ولدينا: λ يكتب $\beta 10\beta 0$ في النظام ذي الأساس 5

$$\lambda = \overline{\beta 10\beta 0}^5 = 5\beta + 1.5^3 + 5^4\beta = 630\beta + 125 \dots (2) \text{ ومنه:}$$

من (1) و (2) نجد: $630\beta + 125 = 50\alpha + 1715$ وتكافئ (3) $63\beta + 5(-\alpha) = 159 \dots$

بمطابقة المعادلتين (3) و (E) نجد أن: $(\beta; -\alpha) = (x; y) = (5k + 3; -63k - 6)$

أي $(\beta; \alpha) = (5k + 3; 63k + 6)$ ولدينا أيضا: $0 \leq \alpha \leq 6$ و $0 \leq \beta \leq 4$

ومعناه $0 \leq 5k + 3 \leq 6$ و $0 \leq 63k + 6 \leq 4$ أي $k = 0$ وعليه: $(\beta; \alpha) = (3; 6)$

كتابة العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.

من العلاقة (1) لدينا: $\lambda = 50\alpha + 1715$ ومنه $\lambda + 2 = 50\alpha + 1717$ حيث $\alpha = 6$

$$\lambda + 2 = 50(6) + 1717 = 2017$$

ملاحظة: نحصول على نفس النتيجة باستعمال العلاقة (2)

4-أ) دراسة باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 وذلك حسب قيم العدد الطبيعي n

$$\text{لدينا: } 3^4 \equiv 1[5], 3^3 \equiv 2[5], 3^2 \equiv 4[5], 3^1 \equiv 3[5], 3^0 \equiv 1[5]$$

بواقي قسمة 3^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$
$3^n \equiv$	1	3	4	2

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ القسمة على 5

$$\text{العدد } 3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \text{ يقبل القسمة على 5 معناه } 3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0[5]$$

لدينا: $(x; y) = (5k + 3; -63k - 6)$ حيث x عدد طبيعي

$$\text{ومنه } (x - y) = (68k + 9) \text{ وعليه } 3^{x-y} = 3^{68k+9} = 3.3^{68k+8} \equiv 3[5] \text{ لأن } 3^{68k+8} \equiv 1[5]$$

$$\text{ولدينا: } 1428 \equiv 3[5] \text{ ومنه } 1428^{2017} \equiv 3^{2017}[5] \text{ أي } 1428^{2017} \equiv 3[5] \text{ لأن } 1428^{2017} \equiv 3[5]$$

$$\text{وعليه يكون لدينا: } 3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0[5] \text{ تكافئ } 3 + 4n + 3 \equiv 0[5]$$

$$3 + 4n + 3 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } 4n \equiv 4[5] \text{ إذن } n \equiv 1[5] \text{ ومعناه } n = 5p + 1 \text{ حيث } p \in \mathbb{N}$$

التمرين 44: دورة 2017 الاستدراكية

1-أ) تبيان أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

لدينا المتتالية (u_n) معرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = 4u_n + 1$

لإثبات $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ من أجل كل عدد طبيعي n نستعمل البرهان بالتراجع

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 = \frac{1}{3}(4^0 - 1) = 0$ محققة لأن $u_0 = 0$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

لدينا: $u_{n+1} = 4u_n + 1$ لكن $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ من فرضية التراجع

ومنه: $u_{n+1} = 4\left(\frac{1}{3}(4^n - 1)\right) + 1 = \frac{4}{3} \cdot 4^n - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{3} \cdot 4^{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$ أي $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

ومنه الخاصية $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب) التحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم العدان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما
تذكير: مبرهنة بيزو:

العدان a و b أوليان فيما بينهما معناه وجود ثنائية $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$ تحقق المعادلة $ax_0 + by_0 = 1$

لدينا: $u_{n+1} = 4u_n + 1$ تكافئ $u_{n+1} - 4u_n = 1$

الثنائية $(1; -4)$ تحقق المعادلة: $u_{n+1} - 4u_n = 1$ معناه العدان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما

2- البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها وحدها الأول v_0

المتتالية (v_n) هندسية أساسها q معناه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = q \cdot v_n$

لدينا: المتتالية (v_n) معرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

لدينا: $v_n = u_n + \frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3} = 4(u_n + \frac{1}{3}) = 4v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الاول $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

ب) التعبير بدلالة n عن المجموع S_n

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{3n}$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

ومنه: $S_n = v_0 \left[\frac{q^{3n+1} - 1}{q - 1} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{(4)^{3n+1} - 1}{4 - 1} \right] = \frac{1}{9} (4^{3n+1} - 1)$

3) تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$

لدينا: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ ومنه لدينا: $3u_n = 4^n - 1$ ومنه أيضا: $3u_{n+1} = 4^{n+1} - 1$

وعليه $\text{PGCD}(3u_{n+1}; 3u_n) = 3\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n)$ خاصية

ومنه: $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1; 4^n - 1) = 3 \cdot 1 = 3$ لأن $\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n) = 1$ حسب 1-ب)

4-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية 4^n على 7.

لدينا: $4^3 \equiv 1[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^0 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 4^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

n =	3k	3k + 1	3k + 2
$4^n \equiv$	1	4	2

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل A_n

لدينا: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$

A_n يقبل القسمة على 7 معناه $A_n \equiv 0[7]$

$9S_n - 6n - 3^{6n+4} \equiv 0[7]$ معناه $A_n \equiv 0[7]$

لدينا: $9S_n = (4^{3n+1} - 1)$ ومنه $9S_n \equiv 3[7]$ لأن: $4^{3n+1} \equiv 4[7]$

ولدينا كذلك: $3^{6n+4} \equiv [(-4)^2]^{3n+2} [7] \equiv 4[7]$ أي $3^{6n+4} \equiv [(4)^{3n+2}]^2 \equiv 4[7]$

نسنتج أن: $9S_n - 6n - 3^{6n+4} \equiv 0[7]$ تكافئ $3 - 6n - 4 \equiv 0[7]$ أي $6n \equiv 6[7]$

وأخيرا $n \equiv 1[7]$ لأن 6 أولي مع 7 إذن: $n = 7p + 1$ حيث $p \in \mathbb{N}$.

التمرين 45: دورة 2016 الموضوع 1

1) حساب u_1 و u_2 واستنتاج الأساس q

لدينا: (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها حيث: $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$

*الجملة $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} \ln(u_1) \cdot (u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} (u_1) \cdot (u_2) = e^{11} \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$

الحدان u_1 و u_2 هما حلا المعادلة: $x^2 - Sx + P = 0$ حيث: $S = e^4(1+e^3)$ و $P = e^{11}$
حلل المعادلة $x^2 - Sx + P = 0$ هما: $x = u_1 = e^4$ أو $x' = u_2 = e^7$.

*لدينا: $u_2 = q \cdot u_1$ ومنه: $q = \frac{u_2}{u_1} = e^3$

2-أ) التعبير عن u_n بدلالة n

لدينا $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ ومنه: $u_n = e^4(e^3)^{n-1} = e^{3n+1}$

ب) حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$

ومنه: $S_n = \ln(u_0) \cdot (u_1) \cdot \dots \cdot (u_n) = \ln \left[(u_0)^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}} \right] = (n+1) \ln((u_0) \cdot q^{\frac{n}{2}})$

تطبيق عددي: لدينا: $u_0 = e$ و $q = e^3$ ومنه: $S_n = (n+1) \ln((e) \cdot e^{\frac{3n}{2}}) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$

3-أ) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

لدينا: $2S_n = (n+1)(3n+2) = 3n^2 + 5n + 2$ و $a_n = n+3$

يمكن كتابة $2S_n - a_n(3n-4) = 14$ ومنه: $2S_n = (n+3)(3n-4) + 14 = a_n(3n-4) + 14$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

ب) تعيين القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$

من الجواب السابق لدينا: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

ومنه $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$ هي قواسم العدد 14 وهي: 1، 2، 7 و 14

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي بحيث: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$

$\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$ معناه $\text{PGCD}(a_n; 14) = 7$ ومعناه $\text{PGCD}(n+3; 14) = 7$ مع $n+3 = 7k$

وعليه يكون $\text{PGCD}(n+3; 14) = 7$ تكافئ $\text{PGCD}(7k; 14) = 7$ أي $\text{PGCD}(k; 2) = 1$

$\text{PGCD}(k; 2) = 1$ تعني أن k أولي مع 2 أي أن k يكون عدد فردي أي $k = 2k' + 1$

ولدينا: $n+3 = 7k$ أي $n = 7k - 3$ وبعد تعويض $k = 2k' + 1$ نجد: $n = 14k' + 4$ حيث $k' \in \mathbb{N}$

4) دراسة بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

$$2^3 \equiv 1[7], 2^2 \equiv 4[7], 2^1 \equiv 2[7], 2^0 \equiv 1[7]$$

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية

دورية ودورها 3 وحسب الجدول المقابل

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$2^n \equiv$	1	2	4

5) تعيين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون:
 $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

لدينا: $b_n = 3n.a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1 = 3n^2 + 9 - (3n^2 + 5n + 2) + 1437^{2016} + 1$

ولدينا: $1437^{2016} \equiv 2^{2016}[7] \equiv 1[7]$ لأن: $1437 \equiv 2[7]$ و $2016 \equiv 1[3]$

وعليه: $b_n \equiv -5n + 9[7]$ أي $5n - 9 \equiv 0[7]$ وتكافئ $15n \equiv 6[7]$ أي $n \equiv 6[7]$

ومنه: $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} 5n \equiv 0[35] \\ 7n \equiv 0[35] \end{cases}$ بالطرح نجد $2n \equiv 0[35]$

أي $n \equiv 0[35]$ وأخيرا $n = 35k'$ حيث k' عدد طبيعي.

6) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7

العدد: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$ معناه $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$

لدينا: $1437^{9n+1} \equiv (2^{3n})^3 \cdot 2 \equiv 2[7]$ و $4^{12n+1} \equiv (4^{3n})^4 \times 4 \equiv 4[7]$ و $52 \equiv 3[7]$

وعليه: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 2 - 3 \cdot 4 + 3[7]$ ومنه: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv -7[7]$

أي: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$

التمرين 46: دورة 2016 الموضوع 2

1-أ) دراسة بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

$$3^5 \equiv 1[11], 3^4 \equiv 4[11], 3^3 \equiv 5[11], 3^2 \equiv 9[11], 3^1 \equiv 3[11], 3^0 \equiv 1[11]^*$$

بواقي قسمة 3^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وهي حسب الجدول التالي

n	5k	5k + 1	5k + 2	5k + 3	5k + 4
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4

$$7^6 \equiv 4[11], 7^5 \equiv 10[11], 7^4 \equiv 3[11], 7^3 \equiv 2[11], 7^2 \equiv 5[11], 7^1 \equiv 7[11], 7^0 \equiv 1[11]^*$$

$$7^{10} \equiv 1[11] \text{ و } 7^9 \equiv 8[11], 7^8 \equiv 9[11], 7^7 \equiv 6[11]$$

بواقي قسمة 7^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 10 وهي حسب الجدول التالي

n	10k'	10k' + 1	10k' + 2	10k' + 3	10k' + 4
$7^n \equiv$	1	7	5	2	3
n	10k' + 5	10k' + 6	10k' + 7	10k' + 8	10k' + 9
$7^n \equiv$	10	4	6	9	8

ب) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف لـ 11

لدينا: $1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4} [11]$ ومنه $1437^{10n+4} \equiv 3[11]$ و $2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4} [11] \equiv 4[11]$

وعليه: $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 2 \cdot 4 + 3 [11] \equiv 0[11]$ أي $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11]$

2-أ) حل المعادلة $7x - 3y = 8$.

$7x - 3y = 8$ تكافئ $7x = 3y + 8$ ومنه $7x \equiv 8[3]$ أي $x \equiv 2[3]$ إذن $x = 3k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$

بتعويض قيمة $x = 3k + 2$ في المعادلة $7x = 3y + 8$ نجد: $y = 7k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$

ومنه حلول المعادلة $7x - 3y = 8$ هي الثنائيات $(x; y) = (3k + 2; 7k + 2)$ مع $k \in \mathbb{N}$

ب) تعيين القيم الممكنة للعدد d.

لدينا: d هو القاسم المشترك الأكبر لـ x و y حيث $(x; y)$ حلول المعادلة $7x - 3y = 8$

لدينا: d/x ومنه $d/7x$ و d/y ومنه $d/3y$ و $d/8$ أي: $d \in D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$

من (1) و (2) نستنتج أن: $d/7x - 3y$ ومنه $d/8$ أي: $d \in D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$

تعيين الحلول من أجل $d=4$.

لدينا: $\text{PGCD}(3k + 2; 7k + 2) = 4$ تكافئ $\text{PGCD}(k - 2; 8) = 4$

ولدينا: $k - 2 = 4\alpha$ ومنه $\text{PGCD}(4\alpha; 8) = 4$

أي $\text{PGCD}(\alpha; 2) = 1$ أي $\alpha = 2m + 1$ لأن α أولي مع 2 حيث m عدد طبيعي

ومنه $k = 8m + 6$ وبعد تعويض قيمة k في الحلول نجد: $(x; y) = (24m + 20; 56m + 44)$

ج) تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$

لدينا: $1437^{3y} \equiv 7^{3y} [11]$ و $2016^{7x} \equiv 3^{7x} [11]$

وعليه: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0 [11]$ تكافئ $3^{7x} + 7^{3y} \equiv 0 [11]$ حيث $(x; y) = (3k + 2; 7k + 2)$ بعد التبسيط نجد: $3^{7x} + 7^{3y} \equiv 0 [11]$ تكافئ $3^k + 7^k \equiv 0 [11]$ وبعد عملية توحيد الدورين 5 و 10 ولإيجاد الثنائيات المطلوبة نستعمل الجدول التالي:

k	10p	10p + 1	10p + 2	10p + 3	10p + 4
$3^k \equiv$	1	3	9	5	4
$7^k \equiv$	1	7	5	2	3
$3^k + 7^k \equiv$	2	10	3	7	7
k	10p + 5	10p + 6	10p + 7	10p + 8	10p + 9
$3^k \equiv$	1	3	9	5	4
$7^k \equiv$	10	4	6	9	8
$3^k + 7^k \equiv$	0	7	4	4	1

توجد حالة وحيدة تحقق هي من أجل $n = 10p + 5$ ومن الحلول هي $(x; y) = (30p + 17; 70p + 37)$ حيث p عدد طبيعي

التمرين 47: دورة 2015 الموضوع 1

(1-أ) تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

لدينا: $2^0 \equiv 1 [7]$ ، $2^1 \equiv 2 [7]$ ، $2^2 \equiv 4 [7]$ ، $2^3 \equiv 1 [7]$.

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول المقابل

n =	3k	3k + 1	3k + 2
$2^n \equiv$	1	2	4

(ب) استنتاج باقي القسمة الأقليدية للعدد $2015^{53} - 1954^{1962} + 1962^{1954}$ على 7.

لدينا: $1962 \equiv 2 [7]$ و $1962^{1954} \equiv 2^{1954} [7]$

لكن $1954 \equiv 1 [3]$ ومنه $2^{1954} \equiv 2 [13]$ أي $1962^{1954} \equiv 2 [7]$

لدينا: $1954 \equiv 1 [7]$ ومنه $1954^{1962} \equiv 1 [7]$.

ولدينا: $2015 \equiv 6 [7]$ أي $2015 \equiv -1 [7]$

ومنه $2015^{53} \equiv (-1)^{53} [7]$ أي $2015^{53} \equiv (-1) [7]$ لأن 53 عدد فردي

وعليه: $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 2 - 1 - 1 [7]$

ومنه: $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 0 [7]$.

إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}$ على 7 هو 0.

(2-أ) تبين أن العدد 89 أولي.

$\sqrt{89} = 9,4$ نبين أن العدد لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأولية الأصغر من 9

الباقي	الحاصل	القاسم الأولي	العدد
1	44	2	89
2	29	3	89
4	17	5	89
5	12	7	89

من الجول السابق أن العدد 89 أولي.

(ب) تعيين كل قواسم العدد الطبيعي 7832.

لدينا: تحليل العدد 7832 هو $7832 = 2^3 \times 11 \times 89$

ومنه عدد قواسم العدد 7832 يساوي $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$

لإيجاد قواسم العدد 7832 نستعمل الجدولين التاليين:

$\times$	11^0	11^1		$\times$	1	11	89	979
89^0	1	11		2^0	1	11	89	979
89^1	89	979		2^1	2	22	178	1958
				2^2	4	44	356	3916
				2^3	8	88	712	7832

نستنتج قواسم العدد 7832 هي:

$$D_{7832} = \{1; 2; 4; 8; 11; 22; 44; 88; 89; 178; 376; 712; 979; 1958; 3916; 7832\}$$

(ج) تبين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما معناه $\text{PGCD}(977; 981) = 1$

لدينا: $981 = 977 \times 1 + 4$
 $977 = 4 \times 244 + 1$

ومنه العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

(3) تعيين العددان الطبيعيان x و y.

لدينا: $\text{PGCD}(x; y) = 2$ معناه $x = 2x'$ و $y = 2y'$ و $\text{PGCD}(x'; y') = 1$

$$\begin{cases} (x' - y')(x' + y') = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \\ \text{PGCD}(x'; y') = 1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x'^2 - y'^2 = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \\ \text{PGCD}(x'; y') = 1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \\ \text{PGCD}(x; y) = 2 \end{cases}$$

نستنتج أن الفرق $x' - y' = 11k + 4$ وهو قاسم للعدد 7832

الحالة الوحيدة التي تحقق هي:

$$\begin{cases} x = 2x' = 1962 \\ y = 2y' = 1954 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} x' = 981 \\ y' = 977 \end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{cases} x' - y' = 11k + 4 = 4 \\ x' + y' = 1958 \end{cases}$$

(4) البرهان أن a أولي مع $b \times c$

لدينا: a أولي مع كلا من b و c معناه وجود الثنائيتان $(x_0; y_0)$ و $(x'_0; y'_0)$ من الاعداد الصحيحة يحققان $ax_0 + by_0 = 1 \dots (1)$ و $ax'_0 + cy'_0 = 1 \dots (2)$ ونبرهن أن a أولي مع $b \times c$ معناه وجود الثنائية $(u; v)$ حيث $au + (bc)v = 1$ بضرب (1) و (2) طرف لطرف نجد: $(ax_0 + by_0)(ax'_0 + cy'_0) = 1$ ومنه: $a^2x_0x'_0 + acx_0y'_0 + abx'_0y_0 + bcy_0y'_0 = 1$ أي: $a(x_0x'_0 + cx_0y'_0 + bx'_0y_0) + bc(y_0y'_0) = 1$ ومنه: $u = x_0x'_0 + cx_0y'_0 + bx'_0y_0$ و $v = y_0y'_0$

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $\text{PGCD}(a; b^n) = 1$

من أجل $n = 1$ فإن: $\text{PGCD}(a; b) = 1$ محققة من الفرضية.

نفرض أن: $\text{PGCD}(a; b^n) = 1$ ونبرهن أن $\text{PGCD}(a; b^{n+1}) = 1$

لدينا: $\text{PGCD}(a; b^n) = 1$ فرضية التراجع و $\text{PGCD}(a; b) = 1$

ومنه $\text{PGCD}(a; b^{n+1}) = 1$ حسب الجواب 4-أ).

ج) استنتاج القاسم المشترك الأكبر للعديدين 1962^{1954} و 1954^{1962}

لدينا: $\text{PGCD}(981^{1954}; 977) = 1$ و $\text{PGCD}(981^{1954}; 977^{1962}) = 1$ و $\text{PGCD}(981^{1954}; 2^8) = 1$

من 4-أ ينتج $\text{PGCD}(981^{1954}; 977^{1962} \cdot 2^8) = 2^{1954}$. $\text{PGCD}(1962^{1954}; 1954^{1962}) = 2^{1954}$

التمرين 48: دورة 2014 الموضوع 1

1- أ) حساب $\text{PGCD}(2013; 1962)$.

لدينا: $2013 = 3 \times 671$ و $1962 = 3 \times 654$ ومنه $\text{PGCD}(2013; 1962) = 3 \text{PGCD}(671; 654)$

لدينا $\text{PGCD}(671; 654) = 1$ يمكن استعمال خوارزمية إقليدس أو مبرهنة بيزو

ومنه: $\text{PGCD}(2013; 1962) = 3$

ب) استنتاج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً.

لدينا: (E): $2013x - 1962y = 54$

ولدينا: 2013 يقسم $2013x$ ومنه $2013x$ يقسم 1962 ومنه $1962y$ يقسم $1962y$

ومنه: $2013x - 1962y$ الفرق يقسم 54 ومنه المعادلة (E) تقبل حلولاً.

ج) تبين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0[6]$.

لدينا: (E): $2013x - 1962y = 54$ تكافئ $671x - 654y = 18$ وذلك بقسمة طرفي (E) على 3

$671x - 654y = 18$ تكافئ $671x = 654y + 18$ وتكافئ $671x = 6(109y + 3)$

ومنه: $671x \equiv 0[6]$ أي $x \equiv 0[6]$ لأن 671 أولي مع 6.

د) استنتاج حلاً خاصاً $(x_0; y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E).

* من الجواب السابق لدينا: $x_0 \equiv 0[6]$ و $74 < x_0 < 80$ ومنه $x_0 = 78$

* من أجل $x_0 = 78$ نجد $y_0 = 80$ وذلك بعد تعويض قيمة $x_0 = 78$ في المعادلة $671x - 654y = 18$

ومنه الثنائية $(78; 80)$ حل خاص للمعادلة $671x - 654y = 18$

وعليه نحصل على الجملة التالية $\begin{cases} 671x - 654y = 18 \dots (1) \\ 671(78) - 654(80) = 18 \dots (2) \end{cases}$ بطرح (2) من (1) طرف لطرف

$$671(x - 78) = 654(y - 80) \dots (*) \text{ ومنه: } 671(x - 78) - 654(y - 80) = 0$$

من (*) نستنتج أن: 671 يقسم $654(y - 80)$ ومنه 671 يقسم $(y - 80)$ لأن 671 أولي مع 654 (م غوص) ومنه: $(y - 80) = 671k$ أي $y = 671k + 80$ وبعد تعويض قيمة y في (*) نجد: $x = 654k + 78$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (654k + 78; 654k + 80)$ مع أن k عدد صحيح.

2- أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d.

d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حلا للمعادلة (E).

لدينا: d يقسم x ومنه d يقسم $671x$ و d يقسم $654y$ ومنه d يقسم $654y$

ومنه: d يقسم الفرق $671x - 654y$ أي d يقسم الطرف الثاني 18 إذن: $d \in D_{18} = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 18\}$

ب) تعيين قيم العددين a و b.

لدينا: الثنائية $(a; b)$ تحقق: الشرطين: $671a - 654b = 18$ و $\text{PGCD}(a; b) = 18$.

$$\text{ومنه: } \begin{cases} a \equiv 0[18] \\ b \equiv 0[18] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 654k + 78 \equiv 0[18] \\ 671k + 80 \equiv 0[18] \end{cases} \text{ بالطرح طرف لطرف نجد: } 17k + 2 \equiv 0[18]$$

ولدينا: $-k \equiv -2[18]$ أي $k \equiv 2[18]$ إذن: $k = 18p + 2$ حيث $p \in \mathbb{N}$

بتعويض قيمة $k = 18p + 2$ في حلول المعادلة نجد: $(a; b) = (11772p + 1386; 12078p + 1422)$

التمرين 49: دورة 2013 الموضوع 1

1- أ- تبين أن: $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; 10)$

تذكير: $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$

حيث: $a = b.q + r$ علما أن q و r هما حاصل وباقي قسمة a على b

لدينا: $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$

باستعمال القسمة الأقليدية للعدد α على β نجد: $\alpha = (2n^2 - 6n + 4)\beta + (-10)$

ومنه: $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; |-10|)$ أي $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; 10)$

ب- تعيين القيم الممكنة للعدد $\text{PGCD}(\alpha; \beta)$.

نفرض أن: $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = d$ ومنه $\text{PGCD}(\beta; 10) = d$ ومنه d يقسم 10

إذن: $d \in D_{10} = \{1; 2; 5; 10\}$

ج- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = 5$

$\text{PGCD}(\alpha; \beta) = 5$ تكافئ $\text{PGCD}(\beta; 10) = 5$ وتكافئ $\beta \equiv 0[5]$ ومنه $n + 3 = 5k$

ومنه: $\text{PGCD}(5k; 5.2) = 5$ أي $5\text{PGCD}(k; 2) = 5$ وعليه $\text{PGCD}(k; 2) = 1$

إذن: k عدد فردي أي $k = 2p + 1$ ومنه: $n = 5(2p + 1) - 3$ وأخير $n = 10p + 2$ مع $p \in \mathbb{N}$ لدينا: $\beta = 0[5]$ تكافئ $n + 3 = 0[5]$ أي $n = 5k - 3$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم

2.أ- دراسة، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

لدينا: $4^5 \equiv 1[11]$ ، $4^4 \equiv 3[11]$ ، $4^3 \equiv 9[11]$ ، $4^2 \equiv 5[11]$ ، $4^1 \equiv 4[11]$ ، $4^0 \equiv 1[11]$ بواقي قسمة 4^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وحسب الجدول التالي

$n =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$	
$4^n \equiv$	1	4	5	9	3	[11]

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$

لدينا: $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} (4^{5p+1})^5 + (4^{5p+1})^2 + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 10p + 2 \end{cases}$

من الجدول لدينا: $4^{5p+1} \equiv 4[11]$ ومنه: $(4^{5p+1})^2 \equiv 5[11]$ و $(4^{5p+1})^5 \equiv 1[11]$

وعليه الجملة $\begin{cases} (4^{5p+1})^5 + (4^{5p+1})^2 + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 10p + 2 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n \equiv 5[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$

لدينا: $\begin{cases} n \equiv -6[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 10n \equiv -60[110] \\ 11n \equiv 22[110] \end{cases}$ بالطرح نجد: $n \equiv 82[110]$

إذن: $n \equiv 110\alpha + 82$ حيث α عدد طبيعي.

التمرين 50: دورة 2013 الموضوع 3

1.أ- تعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n + 27 \equiv 0[n + 1]$

لدينا: $2n + 27 \equiv 0[n + 1]$ تكافئ $2n + 2 + 25 \equiv 0[n + 1]$ وتكافئ $25 \equiv 0[n + 1]$

$25 \equiv 0[n + 1]$ تعني أن $n + 1$ يقسم 25 ومنه: $n + 1 \in D_{25} = \{1; 5; 25\}$

$n + 1 \in \{1; 5; 25\}$ تكافئ $n \in \{0; 4; 24\}$

ب- تعيين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث: $(b - a)(a + b) = 24$

لتعيين الثنائيات $(a; b)$ نبحث أولاً على قواسم العدد 24

لدينا: $24 = 2^3 \times 3$ ومنه عدد القواسم هو: $(3 + 1)(1 + 1) = 8$

ومنه: $D_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

الحالات التي تحقق المعادلة $(b - a)(a + b) = 24$ حيث $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية هي:

الحالة 1: $(b - a)(a + b) = 2 \times 12$ ومعناه $\begin{cases} (a + b) = 12 \\ (b - a) = 2 \end{cases}$ ومعناه $(a; b) = (5; 7)$

الحالة 2: $(b-a)(a+b) = 4 \times 6$ ومعناه $\begin{cases} (a+b) = 6 \\ (b-a) = 4 \end{cases}$ ومعناه $(a;b) = (1;5)$
ج- أستنتاج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

لدينا: $(b-a)(a+b) = 24$ تكافئ $b^2 - a^2 = 24$ وتكافئ $b^2 = a^2 + (\sqrt{24})^2$

الحالة 1: $(a;b) = (5;7)$ معناه $7^2 = 5^2 + (\sqrt{24})^2$

حسب فيثاغورس $\sqrt{24}$ هو طول الضلع AB في مثلث ABC قائم A حيث: $AC = 5$ و $BC = 7$

الحالة 2: $(a;b) = (1;5)$ معناه $5^2 = 1^2 + (\sqrt{24})^2$

حسب فيثاغورس $\sqrt{24}$ هو طول الضلع AB في مثلث ABC قائم A حيث: $AC = 1$ و $BC = 5$

2-أ- كتابة العددين α و β في النظام العشري.

لدينا: $\alpha = \overline{10141}$ ومنه $\alpha = 1.5^4 + 0.5^3 + 1.5^2 + 4.5^1 + 1.5^0 = 671$

لدينا: $\beta = \overline{3403}$ ومنه $\beta = 3.5^3 + 4.5^2 + 0.5^1 + 3.5^0 = 478$

ب- تعيين الثنائية $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث: $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$

الجملة $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ 671a - 478b = 9 \end{cases}$

الحالة 1: الثنائية $(a;b) = (5;7)$ تحقق الجملة $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ 671a - 478b = 9 \end{cases}$

الحالة 2: الثنائية $(a;b) = (1;5)$ لا تحقق الجملة $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ 671a - 478b = 9 \end{cases}$

ومنه حلول الجملة $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$ هي الثنائية $(a;b) = (5;7)$

3.أ- إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 .

لدينا: $2013 = 3.671$ و $1434 = 3.478$

ومنه : القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 هو 3

استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478

لدينا: $\text{PGCD}(2013;1434) = 3. \text{PGCD}(671;478)$

671 عدد أولي لأن $\sqrt{671} = 25,9$ و 671 لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأولية الأصغر من 23

$$\text{PGCD}(671;478) = 1 \text{ ومنه:}$$

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $2013x - 1434y = 27$

$$\text{المعادلة } 2013x - 1434y = 27 \text{ تكافئ } 671x - 478y = 9$$

من الجواب 2- ب) نستنتج أن الثنائية $(5; 7)$ حل خاص للمعادلة $671x - 478y = 9$

$$\begin{cases} 671x - 478y = 9 \dots (1) \\ 671(5) - 478(7) = 9 \dots (2) \end{cases} \text{ ومنه نحصل على الجملة التالية}$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} 671x - 478y = 9 \dots (1) \\ 671(5) - 478(7) = 9 \dots (2) \end{cases} \text{ بطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد: } 671(x - 5) - 478(y - 7) = 0$$

$$\text{ومنه: } 671(x - 5) = 478(y - 7) \dots (*)$$

من (*) نستنتج أن: 478 يقسم $671(x - 5)$ ومنه 478 يقسم $(x - 5)$ لأن 671 أولي مع 478 (م. غوص)

$$\text{ومنه: } (x - 5) = 478k \text{ أي } x = 478k + 5 \text{ وبعد تعويض قيمة } x \text{ في } (*) \text{ نجد: } y = 671k + 7$$

ومن الحل هو الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (478k + 5; 671k + 7)$ مع أن k عدد صحيح.

التمرين 51: دورة 2012 الموضوع 1

1- أ- تبين أن العدد 2011 أولي .

2011 عدد أولي لأن: $\sqrt{2011} = 44,84$ ولا يقبل القسمة على كل الأعداد الأولية الأصغر من 44

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس ، تعيين حاد خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) ، ثم حل لمعادلة (1).

$$31 = 579 - 274 \times 2$$

$$31 = 579 - 274 \times (1432 - 2 \times 579)$$

$$31 = 579 - 2 \times (1432 - 2 \times 579)$$

$$31 = 1432(-2) + 5 \times 579$$

$$31 = 1432(-2) + 5 \times (2011 - 1432)$$

$$31 = 2011(5) - 1432(7)$$

$$2011 = 1432 \times 1 + 579$$

$$\text{لدينا: } 1432 = 579 \times 2 + 274 \text{ ومنه}$$

$$579 = 274 \times 2 + 31$$

من السطر الأخير نستنتج أن الثنائية $(5; 7)$ حاد خاصا للمعادلة (1).

$$\begin{cases} 2011x - 1432y = 31 \dots (1) \\ 2011(5) - 1432(7) = 31 \dots (2) \end{cases} \text{ ومنه نحصل على الجملة التالية}$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} 2011x - 1432y = 31 \dots (1) \\ 2011(5) - 1432(7) = 31 \dots (2) \end{cases} \text{ بطرح (2) من (1) نجد: } 2011(x - 5) - 1432(y - 7) = 0$$

$$\text{ومنه: } 2011(x - 5) = 1432(y - 7) \dots (*)$$

(*) تعني: 1432 يقسم $2011(x - 5)$ ومنه 1432 يقسم $(x - 5)$ لأن 1432 أولي مع 2011 (م. غوص)

$$\text{ومنه: } (x - 5) = 1432k \text{ أي } x = 1432k + 5 \text{ وبعد تعويض قيمة } x \text{ في } (*) \text{ نجد: } y = 2011k + 7$$

ومن الحل هو الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (1432k + 5; 2011k + 7)$ مع أن k عدد صحيح.

2-أ- تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 .

لدينا: $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$.

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$2^n \equiv$	1	2	4

إيجاد باقي القسمة الأقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

لدينا: $2011 \equiv 2[7]$ ومنه $2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{1432^{2012}}[7]$

ولدينا أيضا: $1432 \equiv 1[3]$ ومنه: $1432^{2012} \equiv 1[3]$ أي 1432^{2012} من الشكل $3k + 1$

وعليه: $2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{3k+1}[7]$ إذن: $2011^{1432^{2012}} \equiv 2[7]$

ومنه باقي قسمة العدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2.

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$

لدينا: $2011 \equiv 2[7]$ ومنه: $2011^n \equiv 2^n[7]$ و $2010 \equiv 1[7]$ ومنه $2010^n \equiv 1[7]$

ولدينا: $1432 \equiv 4[7]$ ومنه $1432^n \equiv (2^n)^2[7]$

وعليه: $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$ تكافئ $1 + 2^n + 2^{2n} \equiv 0[7]$

لتعيين قيم العدد الطبيعي n نشكل الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$2^n \equiv$	1	2	4
$2^{2n} \equiv$	1	4	2
$2^{2n} + 2^n + 1 \equiv$	3	0	0

من الجدول السابق نستنتج أن قيم العدد الطبيعي n هي: $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$

تعيين α ، β و γ ثم كتابة N في النظام العشري.

لدينا: N عدد طبيعي يكتب $2\gamma\alpha\beta$ في نظام التعداد الذي أساسه 9

ولدينا: $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (1) معناه $2011\beta - 1432\gamma = 31$

ومنه: $\beta = x = 1432k + 5$ و $\gamma = y = 2011k + 7$ حيث $0 \leq \beta \leq 8$ و $0 \leq \gamma \leq 8$

ومنه: $0 \leq 1432k + 5 \leq 8$ و $0 \leq 2011k + 7 \leq 8$ أي $k = 0$ (بعد عملية الحصر)

إذن: $\beta = 5$ و $\gamma = 7$

ومن جهة أخرى لدينا: α ، β و γ هذا الترتيب تشكل حدودا لمتتالية حسابية متزايدة تماما

أي: $\alpha + \beta + \gamma = 3\beta$ ومنه $\alpha = 2\beta - \gamma = 3$

لدينا: $N = \overline{2\gamma\alpha\beta} = \overline{2735} = 2.9^3 + 7.9^2 + 3.9 + 5.9^0 = 2057$

التمرين 52: دورة 2011 الموضوع 1

1) حل المعادلة (E).

لدينا: (E) $13x - 7y = -1$ حيث x و y عددان صحيحان
يمكن استعمال عدة طرق لحل المعادلة (E) ومن بينها طريقة الموافقة
(E) تكافئ $13x = 7y - 1$ وتكافئ $13x \equiv -1[7]$ وتكافئ $-x \equiv -1[7]$ لأن $13 \equiv -1[7]$
أي $x \equiv 1[7]$ إذن: $x = 7k + 1$ حيث k عدد صحيح
بتعويض قيمة x في المعادلة $13x = 7y - 1$ نجد: $y = 13k + 2$
ومنه الحلول هي الثنائيات $(x; y) = (7k + 1; 13k + 2)$ مع أن k عدد صحيح.

2) تعيين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث:

$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$$

الجملة $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$ تكافئ كافئ $\begin{cases} 13a \equiv -13[91] \\ 7a \equiv 0[91] \end{cases}$ بالطرح نجد: $6a \equiv -13[91]$ أي $a \equiv 13[91]$
إذن: $a \equiv 91p + 13$ حيث p عدد طبيعي.

ملاحظة: يمكن الاعتماد على حلول المعادلة (E) وإيجاد نفس الحل

3) دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 7 و 13

دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 7

لدينا: $9^0 \equiv 1[7]$ ، $9^1 \equiv 2[7]$ ، $9^2 \equiv 4[7]$ ، $9^3 \equiv 1[7]$.

بواقي قسمة 9^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$	
$9^n \equiv$	1	2	4	[7]

دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 13

لدينا: $9^0 \equiv 1[13]$ ، $9^1 \equiv 9[13]$ ، $9^2 \equiv 3[13]$ ، $9^3 \equiv 1[13]$.

بواقي قسمة 9^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k'$	$3k' + 1$	$3k' + 2$	
$9^n \equiv$	1	9	3	[13]

4) تعيين α و β حتى يكون b قابلاً للقسمة على 91.

لدينا: $b = \overline{\alpha 00\beta 086} = \alpha.9^6 + \beta.9^3 + 8.9 + 6$

b قابلا القسم على 91 يكافئ $\begin{cases} b \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[13] \end{cases}$ خاصية (7.13) و 7 و 13 أوليان فيما بينهما

لأن $\begin{cases} \alpha + \beta + 1 \equiv 0[7] \\ \alpha + \beta \equiv 0[13] \end{cases}$ و $9^3 \equiv 0[7]$ و $9^6 \equiv 0[7]$ وكذلك $9^3 \equiv 0[13]$ و $9^6 \equiv 0[13]$ و $9^3 \equiv 0[13]$ و $9^6 \equiv 0[13]$ و $78 \equiv 1[7]$

وحسب ما ورد في الجواب (2) فإن: $\alpha + \beta \equiv 91p + 13$ وبأن: $0 < \alpha \leq 8$ و $0 < \beta \leq 8$ فإن: $0 \leq 91p + 13 \leq 16$ وعليه تكون $p = 0$ ومنه الشائيات المرتبة التي تحقق b قابلا القسم على 91 هي:
 $(\alpha; \beta) = (5; 8)$ أو $(\alpha; \beta) = (8; 5)$ أو $(\alpha; \beta) = (6; 7)$ أو $(\alpha; \beta) = (7; 6)$

التمرين 53: دورة 2010 الموضوع 1

1- البرهان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسم على 13

لدينا: $3^3 \equiv 1[13]$ ومنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} \equiv 1[13]$

ومنه: من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسم على 13

2- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ يقبل القسم على 13

لدينا: من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه: $3^{3n+1} \equiv 3[13]$ أي $3^{3n+1} - 3 \equiv 0[13]$

لدينا: من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه: $3^{3n+2} \equiv 9[13]$ أي $3^{3n+2} - 9 \equiv 0[13]$

3- تعيين حسب قيم n باقي القسم الاقليدية للعدد 3^n على 13.

لدينا: $3^0 \equiv 1[13]$ ، $3^1 \equiv 3[13]$ ، $3^2 \equiv 9[13]$ ، $3^3 \equiv 1[13]$.

بواقي قسمة 3^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

n =	3k'	3k'+1	3k'+2	
$3^n \equiv$	1	3	9	[13]

استنتاج باقي قسمة 2005^{2010} على 13

لدينا: $2005 \equiv 3[13]$ و $2010 \equiv 0[3]$ ومنه $2005^{2010} \equiv 3^{3 \cdot 670} [13]$ ومنه $2005^{2010} \equiv 1[13]$

وعليه باقي القسم الاقليدية للعدد 2005^{2010} على 13 هو 1.

4- أ- تعيين باقي القسم الاقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n$.

لدينا: $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$ ومنه: $A_{3n} = 3^{3n} + 3^{2(3n)} + 3^{3(3n)}$

لدينا: $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه $3^{2(3n)} \equiv 1[13]$ وكذلك $3^{3(3n)} \equiv 1[13]$ وعليه: $A_{3n} \equiv 3[13]$

ب- البرهان أنه من أجل $p = 3n+1$ ، فإن A_p يقبل القسم على 13

لدينا: $A_{3n+1} = 3^{3n+1} + 3^{2(3n+1)} + 3^{3(3n+1)}$

ولدينا $3^{3n+1} \equiv 3[13]$ ومنه $3^{2(3n+1)} \equiv 9[13]$ وكذلك $3^{3(3n+1)} \equiv 1[13]$ وعليه: $A_{3n+1} \equiv 0[13]$

ج- تعيين باقي القسمة الإقليدية لـ A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$

$$\text{لدينا: } A_{3n+2} = 3^{3n+2} + 3^{2(3n+2)} + 3^{3(3n+2)}$$

ولدينا: $3^{3n+2} \equiv 9[13]$ ومنه $3^{2(3n+2)} \equiv 3[13]$ وكذلك $3^{3(3n+2)} \equiv 1[13]$ وعليه: $A_{3n+2} \equiv 0[13]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية لـ A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$ هو 0

أ- التحقق أن a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري

$$\text{لدينا: } a = A_3 \text{ ومنه } a = \overline{1001001000} = 1.3^9 + 1.3^6 + 1.3^3$$

$$\text{لدينا: } b = A_4 \text{ ومنه } b = \overline{1000100010000} = 1.3^{12} + 1.3^8 + 1.3^4$$

ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من a و b على 13.

لدينا: $a = A_3$ ولدينا $A_3 \equiv 3[13]$ ومنه $a \equiv 3[13]$ أي أن باقي قسمة a على 13 هو 3

لدينا: $b = A_4$ ولدينا $A_4 \equiv 0[13]$ ومنه $b \equiv 0[13]$ أي أن باقي قسمة b على 13 هو 0

التمرين 54: دورة 2010 الموضوع 2

1- أ- تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7.

$$\text{لدينا: (1) } 7x + 65y = 2009 \dots \text{تكافئ } 7x + 65y = 2009 - 7x \text{ وتكافئ } 65y = 7(287 - x)$$

$$\text{وتكافئ } 65y \equiv 0[7] \text{ ومنه } y \equiv 0[7] \text{ لأن } 65 \text{ أولي مع } 7$$

الكتابة $y \equiv 0[7]$ تعني أن y مضاعف للعدد 7.

ب- حل المعادلة (1).

من الجواب السابق لدينا: y مضاعف للعدد 7 ومنه $y = 7k$ حيث k عدد صحيح

$$\text{بتعويض قيمة } y \text{ في المعادلة } 65y = 7(287 - x) \text{ نجد: } x = 65k + 287$$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (-65k + 287; 7k)$ مع أن k عدد صحيح.

2- دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

$$\text{لدينا: } 2^0 \equiv 1[9], 2^1 \equiv 2[9], 2^2 \equiv 4[9], 2^3 \equiv 8[9], 2^4 \equiv 7[9], 2^5 \equiv 5[9], 2^6 \equiv 1[9] \text{ و } 2^5 \equiv 5[9]$$

بواقي قسمة 2^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

$n =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	7	5

3- تعيين قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9.

$$\text{لدينا: العدد } 2^{6n} + 3n + 2 \text{ يقبل القسمة على 9 معناه } 2^{6n} + 3n + 2 \equiv 0[9]$$

$$2^{6n} + 3n + 2 \equiv 0[9] \text{ تكافئ } 1 + 3n + 2 \equiv 0[9] \text{ أي } 3n \equiv -3[9]$$

$$\text{أي } n \equiv 2[3] \text{ إذن: } n \equiv 3p + 2 \text{ حيث } p \text{ عدد طبيعي}$$

4-أ) التحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

$$u_n = 2^{6n} - 1$$

من الجواب 2) لدينا: $2^{6n} \equiv 1[9]$ ومنه $2^{6n} - 1 \equiv 0[9]$ أي $u_n \equiv 0[9]$

إذن u_n يقبل القسمة على 9.

ب) حل المعادلة: $(7u_1)x + (u_2)y = 126567 \dots (2)$

لدينا: $(7u_1)x + (u_2)y = 126567 \dots (2)$ تكافئ $7x + 65y = 2009 \dots (2)$

لأن $u_1 \equiv 1[9]$ و $u_2 \equiv 65[9]$ و $126567 \equiv 2009[9]$

ومنه حلول المعادلة (2) هي حلول المعادلة (1).

ج) تعيين الثنائية $(x_0; y_0)$ حل المعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عدنان طبيعيان مع $y_0 \geq 25$

لدينا: $(x_0 \geq 0$ و $y_0 \geq 25)$ تكافئ $(7k \geq 25$ و $-65k + 287 \geq 0)$ وتكافئ $\frac{25}{7} \leq k \leq \frac{287}{65}$

ومنه $k = 4$ وعليه: $(x_0; y_0) = (27; 28)$.

التمرين 55: دورة 2009 الموضوع 1

1-أ) نشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ثم إيجاد علاقة تربط بين x و y

لدينا: $(5x^2 + 6)(x + 1) = 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6 = A \dots (1)$

ولدينا: $A = (5x^2 + 6)(2 + 2y) \dots (2)$

من العبرتين (1) و (2) نستنتج أن: $2 + 2y = x + 1$ ومن العلاقة هي: $1 + 2y = x$

ب- حساب x و y علما أن x أولي وأصغر من 12.

لدينا: x ومحصور بين 7 و 12 وعدد أولي وعليه قيم x هي: 7 أو 11

باستعمال العلاقة $1 + 2y = x$ نجد: $y = 3$ من أجل $x = 7$

نجد: $y = 5$ من أجل $x = 11$

كتابة تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

الحالة 1: من أجل $x = 7$ و $y = 3$ نجد: $A = (5 \cdot 7^2 + 6)(2 + 2 \cdot 3) = 2008$

الحالة 1: من أجل $x = 11$ و $y = 5$ نجد: $A = (5 \cdot 11^2 + 6)(2 + 2 \cdot 5) = 7332$

2-أ) تعيين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

لدينا: $584 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 73$

من خلال التحليل السابق نستنتج أن العدنان التي مربعاتها تقسم 584 هما 1 و 2

ب- تعيين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق: $\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$

نفرض أن: $\text{PGCD}(a; b) = d$ ومنه $a = d.a'$ و $b = d.b'$ (خاصية) حيث $\text{PGCD}(a'; b') = 1$

$$\begin{cases} a' + b' = \frac{32}{d} \\ a'^2 + b'^2 = \frac{584}{d^2} \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases} \text{ ومنه الجملة}$$

من الجملة الأخيرة نستنتج أن: $d = 1$ أو $d = 2$

$$\begin{cases} b' = 32 - a' \\ a'^2 - 32a' + 220 = 0 \end{cases} \text{ ومعناه } \begin{cases} a' + b' = 32 \\ a'^2 + b'^2 = 584 \end{cases} \text{ الحالة } d = 1:1$$

الحلول هي: $(10; 22)$ أو $(22; 10)$ مرفوض لأن 10 و 22 ليسا أوليان فيما بينهما.

$$\begin{cases} b' = 16 - a' \\ a'^2 - 16a' + 55 = 0 \end{cases} \text{ ومعناه } \begin{cases} a' + b' = 16 \\ a'^2 + b'^2 = 146 \end{cases} \text{ الحالة } d = 2:1$$

الحلول هي: $(11; 5)$ مقبول أو $(5; 11)$ مرفوض لأن 5 أصغر من 11

ومن قيم العددين a و b هما: $(a; b) = (22; 10)$

التمرين 56: دورة 2008 الموضوع 2

1-أ) تبين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

لدينا: (E) $3x - 21y = 78$ ولدينا $\text{PGCD}(3; 21) = 3$

المعادلة (E) $3x - 21y = 78$ تقبل حلول لأن 3 يقسم 78

ب) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$

المعادلة (E) تكافئ المعادلة (E') $x - 7y = 26$ وتكافئ $x = 26 + 7y$

المعادلة $x = 26 + 7y$ تعني أن $x \equiv 26[7]$ ومنه $x \equiv 5[7]$ لأن $26 \equiv 5[7]$

استنتاج حلول المعادلة (E).

من الجواب السابق لدينا: $x \equiv 5[7]$ ومنه $x = 7k + 5$ حيث k عدد صحيح

بتعويض قيمة $x = 7k + 5$ في المعادلة (E') $x - 7y = 26$ نجد: $y = k - 3$

ومن الحلول هي الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (7k + 5; k - 3)$ مع أن k عدد صحيح.

2-أ) دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

لدينا: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

$n =$	$6p$	$6p + 1$	$6p + 2$	$6p + 3$	$6p + 4$	$6p + 5$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	32	3

ب-تعيّن الشائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (E) وتحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

لدينا حلول المعادلة (E) حيث $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ هي : $(x; y) = (7k + 5; k - 3)$ حيث k أكبر من 3
نضع: $k' = k - 3$ حيث k' عدد طبيعي

ومنه : حلول المعادلة (E) حيث $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ هي : $(x; y) = (7k' + 21; k')$

ولدينا من جهة أخرى $5^x + 5^y \equiv 3[7]$ ومنه $5^{7k'+26} + 5^{k'} \equiv 3[7]$

ومنه: $5^{7k'+26} + 5^{k'} \equiv 3[7]$ تكافئ $5^{6k'} \cdot 5^{k'} \cdot 5^{6.4+2} + 5^{k'} \equiv 3[7]$

وتكافئ $5^{k'+1} \equiv 3[7]$ لأن $5^{6k'} \equiv 1[7]$ و $5^{6.4+2} \equiv 4[7]$

ومنه: $k' + 1 = 6p + 5$ ومنه $k' = 6p + 4$

بعد تعويض قيمة k' نجد $(x; y) = (42p + 54; 6p + 4)$ حيث p عدد طبيعي.