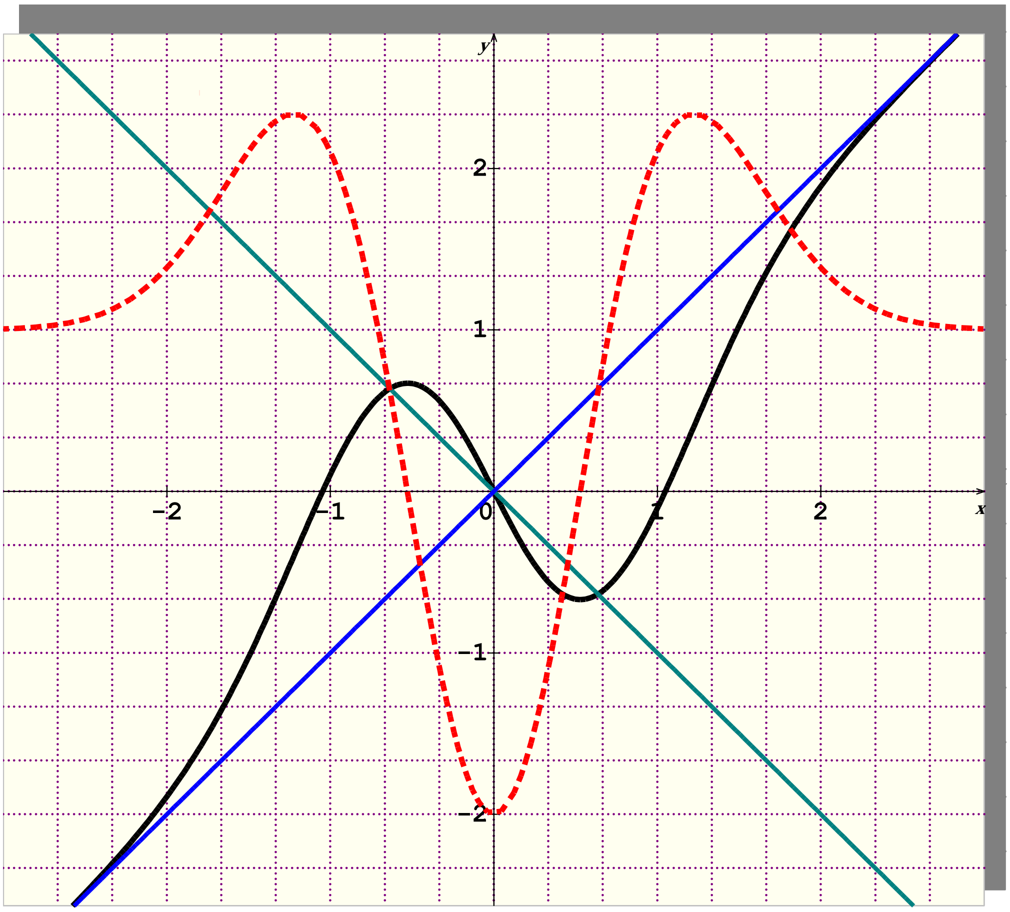
مجلة الرائد في الرياضيات

****

تمارين الدوال العددية
في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

Facebook العربي الجزائري

مجلة الرائد في الرياضيات

تمارين الدوال العددية
في البكالوريا بين يديك

الشعب :علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

****

الجزء الاول

حساب النهايات

الجزء الثاني

الاستمرارية-مبرهنة القيم المتوسطة

الجزء الثالث

الاشتقاقية وتطبيقاتها

الجزء الرابع

تمارين البكالوريات

العلوم التجريبية+تقني رياضي

1)النصوص 2)الحلول (المجلة المرفقة)

الجزء الخامس

تمارين مقترحة

BAC2020

إعداد الأستاذ:بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

Facebook العربي الجزائري

الجزء الاول: حساب النهايات

التمريــن01

احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجال تعريفها، ثم فسر النتائج هندسيا في كل حالة

1) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+2}{x^2-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ ، 2) $f(x)=\dfrac{-3x^2-4x+5}{(x+2)^2}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$ ،

3) $f(x)=\dfrac{4x-8}{-x^2+4x-3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1;3\}$ ، 4) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ ، $D_f=]1;+\infty[$ ، 6) $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ ، $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

التمريــن02

I-نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-5x+5}{x-3}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني .

1) عين كل من الأعداد a و b و c بحيث من اجل كل $x\in\mathbb{R}-\{3\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.

3) بين ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما .

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

التمريــن03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x^3-11x^2+25x-27}{(x-2)^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.

3) احسب $\lim\limits_{|x|\to\infty}[f(x)-(2x-3)]$ ، ثم فسر هندسيا هذه النتيجة

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $(\Delta): y=2x-3$

التمريــن04

I-احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة.

1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+1}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-1})$ ، 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{x^2+4x+3})$

II-اثبت صحة النهايات التالية بطريقة مناسبة.

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{3}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=2$ ، 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{2}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-x+2)=2$

التمريـــن05

f دالة عددية معرفة على المجال $D =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - 2x + 1$

1) احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ثم تحقق $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2) جد $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

3) بين أن $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-3x)] = 2$ ، ثم فسر بيانيا هذه النتيجة.

التمريـــن06

f دالة عددية معرفة على المجال $D =]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x + 1}$

أ- بيّن أن $\dfrac{2x+1}{x+1} \le f(x) \le \dfrac{2x-1}{x+1}$ من أجل كل x من D.

- عين $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب- برهن أن : $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ، ثم استنتج: $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 3$.

جـ- بين أن: $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$ ما ذا تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة f؟.

التمريـــن07

1-من أجل كل $x < 0$ ، بين أن: $\sqrt{x^2 + 3x} < -x$ ، ثم استنتج $\lim_{x \to -\infty} (3x + \sqrt{x^2 + 3x})$

2-من أجل كل $0 < x < 1$ ،بين أن: $\sqrt{x^2 - x - 4} < 2x$.استنتج $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 4} + 2x)$

التمريـــن08

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ وليكن C_f منحنيها البياني.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{2\}$: $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2}$

2) استنتج $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2}$ ،ماذا تعني النتيجة السابقة بالنسبة للدالة f؟ فسّر ذلك بيانيّا.

3) بين ان : أ) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2} = 1$ ، ب) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2} = -1$.

4) بين أن المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ مقارب مائل للمنحنى C_f عند $+\infty$

عين العدد الحقيقي a الموجب بحيث تكون $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + ax] = 0$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ C_f

الجزء الثاني: الاستمرارية-مبرهنة القيم المتوسطة

التمريـــن09

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3-3x+1$.

1)ادرس اتجاه تغير الدالة f ،ثم شكل جدول تغيراتها .

2)باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة :

أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول ثم استنتج اشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]1;2[$ ثم جد حصرا للعدد α سعته 0,1

ج) بين ان المعادلة $f(x)=-2020$ لا تقبل حلا على المجال $]-1;1[$

التمريـــن10

أجب إما بصحيح وإما بخطأ مع التعليل.

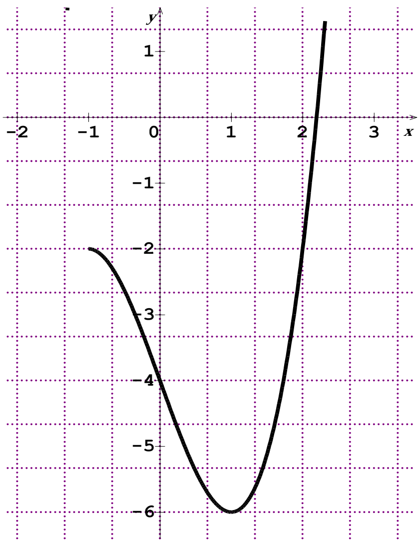
I- لتكن f الدالة المعرفة بجدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$	-2	0		1	2	4	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘	0	↘ $-\infty$ ‖	‖ $+\infty$ ↘	0	-3 ↗	0	↗ 1

1) المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا واحدا.

2) المعادلة $f(x)=-3$ تقبل حلا واحدا.

التمريـــن11



(C_g) المقابل هو المثيل البياني لدالة عددية g معرفة على $]-1;+\infty[$

$g(x)=ax^3+bx+c$:

1) من البيان جد كلا من:

$g(0)$، $g(1)$ و $g'(1)$ ثم عين الأعداد الحقيقية a ، b وc

2)بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g

3)بين أن المعادلة: $x^3-3x-4=0$ تقبل حلاوحيدا $\alpha\in]2;2,25[$

استنتج اشارة $g(x)$

التمريـــن12

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$.

1)احسب نهايات الدالة fعند أطراف مجال تعريفها.

2)بين ان الدالة متزايدة تماما على مجالي تعريفها ،ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]1;2[$ ثم استنتج اشارة $f(x)$

4) بيّن أنه من أجل كل $x\in[-1;0]$ فإن $f(x)\in[0,5;2]$

الجزء الثالث: الاشتقاقية وتطبيقاتها

التمريـــن13

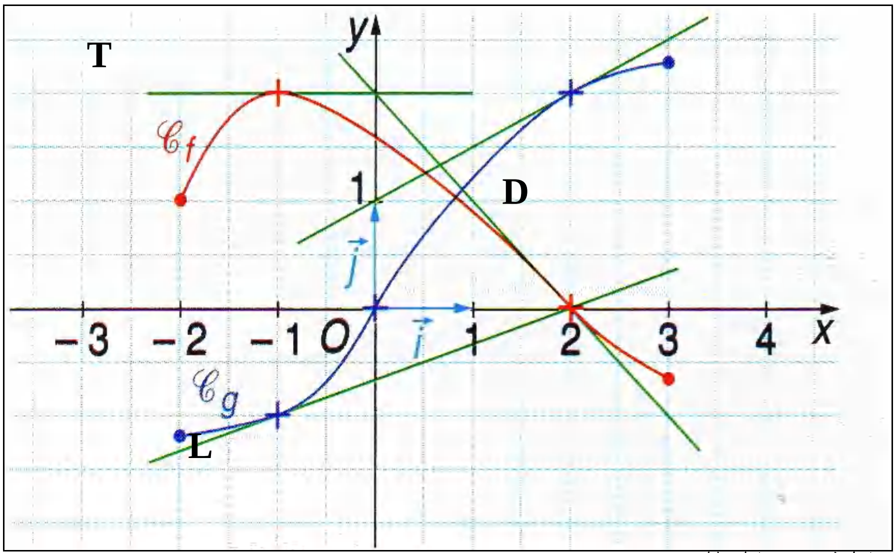
أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة a ، ثم فسر النتيجة بيانيا

1) $f(x)=x^2-3x$ و $a=-1$ ، 2) $f(x)=x^2|x-1|$ و $a=1$ ، 3) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ و $a=2$

التمريـــن14

رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين (C_f) و (C_g)

الممثلين لدالتين f و g معرفتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[-2;3]$ و بعض مماساتهما.



1) أحسب الأعداد المشتقة التالية:

* $(f)'(-1)$ ، * $(g)'(-1)$ ، * $(f)'(2)$ ، * $(g)'(2)$

2) من أجل كل x من المجال $[0;2]$ نضع: $h(x)=f(2x-1)$.

أ) باستعمال مشتق دالة مركبة عين اتجاه تغير الدالة h على المجال $[-2;3]$

ب) أحسب $h'(0)$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)$. ثم أكتب معادلات كل من المستقيمات T و D و L

التمريـــن15

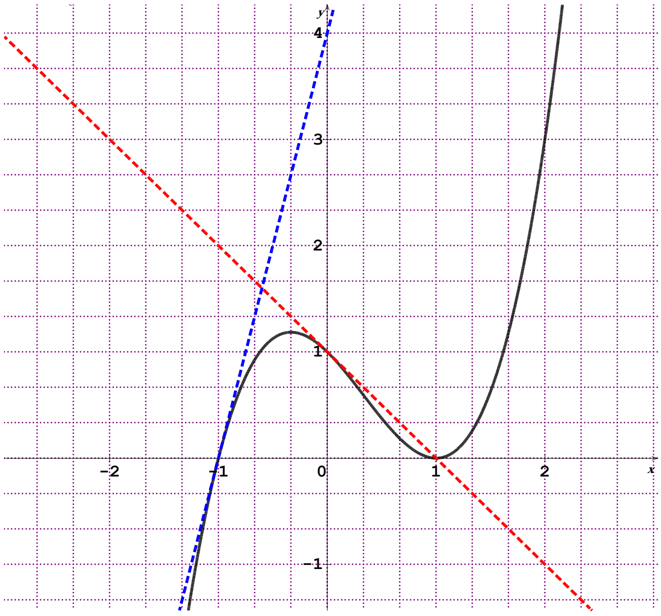
لتكن f الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=3+\sqrt{x-1}$ وليكن (C_f) هو التمثيل البياني لها.

1) أحسب $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أدرس تغيرات الدالة f.

3) باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي" أنشئ (C_f).

التمريــن16



(C_g) المنحنى المقابل هو التمثيل البياني لدالة عددية g معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $\mathbb{R}$:

المماسان لـ (C_g) عند نقطتيه A و B فاصلتاهما -1 و 0

I-1) بقراءة بيانية عين مايلي:

$g(-1)$، $g(0)$، $g(1)$ و $g'(-1)$، $g'(0)$، $g'(1)$

2) أكتب معادلات المماسات عند النقط التي فواصلها -1 ، 0 ، 1 لـ (C_g) .

3) حل بيانيا في المجال $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$: المعادلتين

$g(x)=0$ و $g'(x)=-1$ و المتراجحة $g'(x)\geq 4$

II) نقبل أن : $g(x)=ax^3+bx^2+cx+1$

عين الأعداد الحقيقية a ، b و c باستعمال نتائج السؤال I-1) تحقق من النتائج المحصل عليها سابقا.

التمريــن17

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-\alpha+3}{x} : x\leq 2 \\ f(x)=x^2+2x-\alpha : x\succ 2 \end{cases}$ واليكن (C_f) هوتمثيلها البياني

1) عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون f قابلة للاشتقاق عند2.

2) نفرض في هذا الجزء أن: $\alpha=19$.

أ) ادرس تغيرات الدالة f على مجالي تعريفها.

ب) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $(-\infty)$ يطلب تعين معادلة له.

جـ) اكتب معادلة المماس (T) عند نقطة ذات الفاصلة 2

د) هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) توازي حامل محور الفواصل ؟ برر اجابتك

التمريــن18

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1} : x>1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+3} : x\leq 1 \end{cases}$ واليكن (C_f) هوتمثيلها البياني.

1) تحقق أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 1 ، ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

2) أكتب معادلتي نصفي المماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1

3) ادرس تغيرات الدالة f على مجالي تعريفها

التمريـــن19

لتكن f الدالة المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم عين اشارة كلا من $f'(x)$ و $f(x)$ على D.

2) لتكن الدوال التالية: g ، h ، k معرفة بـ: $g(x)=f(x^2)$ ، $h(x)=f(\frac{1}{x})$ ، $k(x)=f(-2x+1)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة استنتج اتجاه تغير كلا من g ، h ، k.

3) R ، E ، V دوال عددية معرفةبـ: $R(x)=[f(x)]^2$ ، $E(x)=[f(x)]^3$ ، $V(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

أ) عبر عن كلا من $R'(x)$ و $E'(x)$ و $V'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$

ب) شكل جدول تغيرات كلا من الدوال R ، E ، V .

التمريـــن20

f دالة معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على كلا من $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$ جدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
f(x)	4	↘	1	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	0	↘	-2

واليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1-أ) فسر بيانيا، كل نهاية لـ f، عيّن نهاية $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$.

ب) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا على $[0;2[$.

2-) g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بالشكل : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)};x\neq 2$ و $g(2)=0$

عين نهايات الدالة g عند $+\infty$، $-\infty$ و3. ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.

التمريـــن21

اليك جدول تغيرات الدالة العددية f والمعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ و اليكن (C_f) تمثيلها البياني

x	$-\infty$		α		1		2		5		$+\infty$
f'(x)		−		−	||	−		−	0	+	
f(x)	2020	↘	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↘	-3	↗	− 2

من خلال قراءتك لجدول التغيرات اجب عن مايلي:

1) احسب نهايات الدالة f على أطراف مجال التعريف، ثم اكتب معادلات المستقيمات المقاربة لـ C_f

2)حدّد اتجاه تغير الدالة f

3) عيّن حلول المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على مجالي تعريفها.

4) g دالة معرفة بـ: $g(x)=[f(x)]^2$.

أ) احسب نهايات الدالة g على أطراف مجال التعريف

ب) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ فإن: $g'(x)=2f(x).f'(x)$.

جـ)حدد اتجاه تغير الدالة g، ثم ارسم جدول تغيراتها.

التمريــن22

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ الوحدة 4cm .

f دالة معرفة على $[-1;1]$ بـ : $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$، و (C_f) تمثيلها البياني.

1- بيّن ان الدالة f فردية

2-أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{f(x)}{x-1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1}\frac{f(x)}{x+1}$ فسر النتيجتين السابقتين هندسيا.

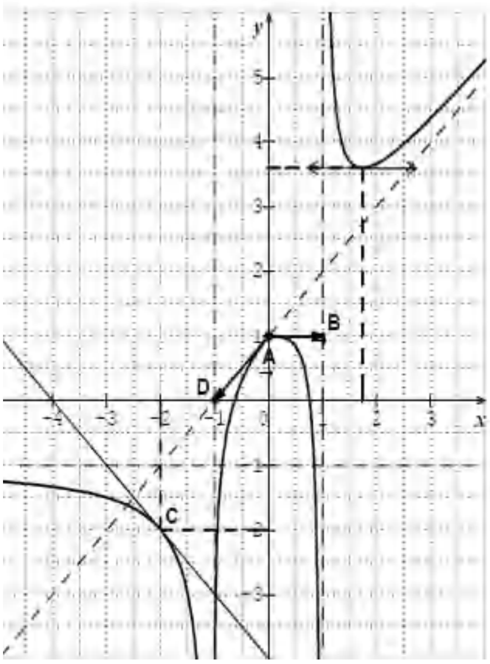
3-ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها

4-أ)اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند مبدأ الاحداثيات.

ب) ادرس وضعية المماس (T) والمنحنى (C_f) ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

5-أرسم كلا من المماس (T) والمنحنى (C_f) .

التمريــن23



(C_f)التمثيل البياني لدالة f في مستوى منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس (الشكل المقابل)

1. بقراءة بيانية :

أ-عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب- شكل جدول تغيرات f

2-بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x=1$ ثم فسر بيانيا هذه النهاية.

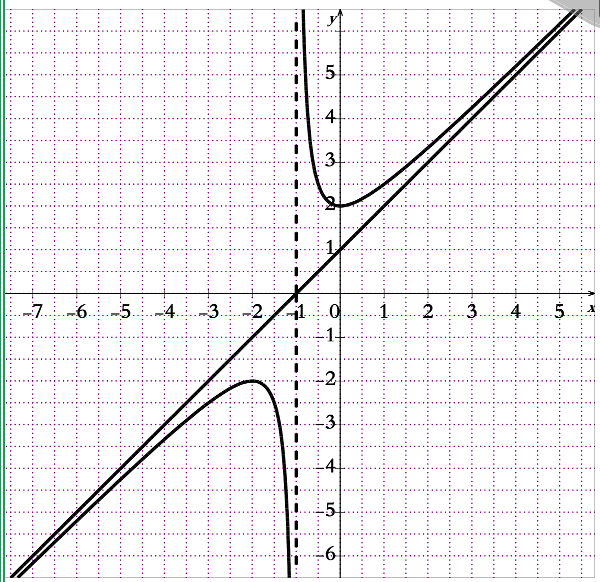
3- عين $f(0)$ ، $f'(-2)$ $f'_{<}(0)$ و $f'_{>}(0)$.

هل الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 ؟ برر اجابنك.

4-حل بيانيا المعادلات والمتراجحات التالية: $f(x)=0$ و $f'(x)\geq 0$

5-ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)-x=m$

التمريــن24



في الشكل المقابل (C_f) هو منحنى لدالة f .

1) بقراءة بيانية ، عيّن :

أ) D مجموعة التعريف الدالة f. ثم نهايات f عند أطراف D

ب) المستقيمات المقاربة لـ (C_f) ومعادلاتها.

جـ) الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم المقارب المائل

د) إشارة كلا من $f(x)$ و $f'(x)$

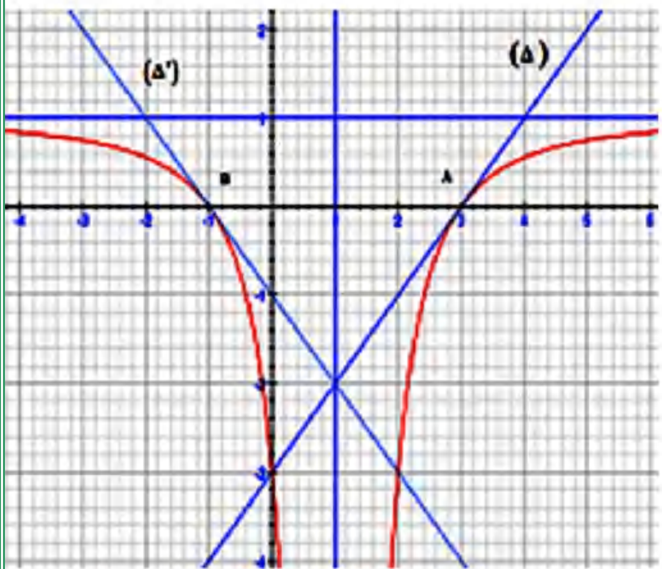
2) g دالة معرفة بـ: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ و (C_g) تمثيلها البياني

أ) بين أن مجموعة تعريف g هي: $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

ب) أوجد نهايات g عند -1 وعند $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا.

جـ) ادرس اتجاه تغير g ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

التمريــن25



المنحنى C_f الموالي هو التمثيل البياني

لدالة f معرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ و (Δ)، (Δ') المماسين

لـ C_f في النقطتين $A(3;0)$ و $B(-1;0)$

1) بقراءة بيانيّة:

ا- جدْ نهايات f عند حدود مجوعة تعريفها.

ب- حدِّدْ إشارة $f(x)$ ، ثمّ إشارة $f'(x)$.

جـ- شكّل جدول تغيّرات f .

د- جد $f'(3)$ و $f'(-1)$. ثمّ جد معادلة (Δ) و (Δ')

2) نقبل أنّ: $f(x)=\dfrac{x^2-ax+b}{(x-1)^2}$

استقد من الإجابة عن السؤال1)جـ- لتعين العددين الحقيقين a و b.

3) لتكن الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=[f(x)]^2$.

ا- احسب $h'(x)$ بدلالة كلّ من $f(x)$ و $f'(x)$، ثمّ استنتج إشارة $h'(x)$.

ب- شكّل جدول تغيّرات h .

التمريـــن26

لتكنf الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$ واليكن (C_f) هوتمثيلها البياني.

1)عين العددين الحقيقيين α و β بحيث المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(1;-3)$ مماسا ميله $\frac{2}{3}$

2) نفرض أن $\alpha=-3$ و $\beta=-7$

أ) هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم الذي معادلته: $y=x-1$ ؟ برر جوابك

ب)بين المنحنى (C_f) يقبل مماسين عموديين على المستقيم الذي معادلته: $4y-x=0$.

ج) بيّن المنحنى (C_f) يقبل مماسين يوازيان حامل محور الفواصل .

التمريـــن27

I- f دالة كثيرة حدود معرفة بـ: $f(x)=2x^3-3x^2-1$

1) برر استمرارية الدالة f على $\mathbb{R}$.

2) ادرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها.

3)أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]1;2[$ ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-1}

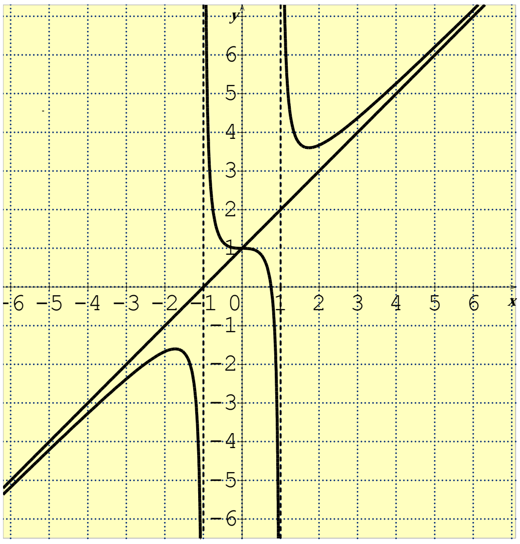
4)استنتج حسب قيم x اشارة $f(x)$

II- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3-x$

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات g .

2)بيّن أن $g(\alpha)=-\frac{1}{4}(\alpha^2+3)\alpha$ ثم جد حصرا للعدد $g(\alpha)$ واستنتج عدد حلول المعادلة $g(x)=0$

التمريــــن28



المنحني C_f المقابل هو التمثيل البياني للدالة f المعرّفة

على $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

1) بقراءة بيانيّة:

-احسب النهايات على الأطراف المفتوحة من (D)،

- عيّن المستقيمات المقاربة.

2) تحقق حسابيا من نتائج السؤال السابق.

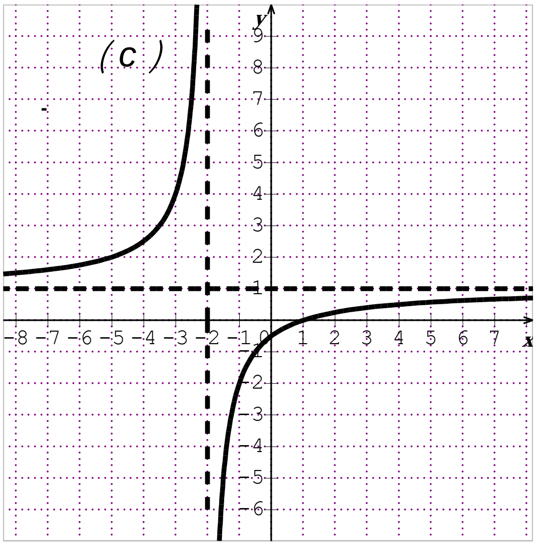
3) من أجل كل عدد حقيقي x من (D)، احسب $f'(x)$

ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

4) من أجل كل عدد حقيقي x من (D) احسب $f(-x)+f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيّا.

التمريـــــن29

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ ، (c_g) التمثيل البياني في مستوى منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس (الشكل المقابل)



1. بقراءة بيانية :

أ . شكل جدول تغيرات g

ب. عين قيم x التي يكون من أجلها $0 \prec g(x) \prec 1$

جـ .حدد اشارة $g(x)$ حسب قيم x

2.f دالة المعرفة على $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{g}(x)$

أ. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. جد عبارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

جـ.شكل جدول تغيراتها ، ثم ارسم المنحنى (c_f) الممثل للدالة f

التمريـــــن30

f دالة معرفة على $\mathbb{R}_-^*$ بـ: $f(x)=x-1+\frac{1}{x^2}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_-^*$ بـ: $g(x)=x^3-x^2+1$

أ) أدرس تغيرات الدالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1;-0.5[$

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا.

ب) استنتج أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$.

جـ)بين أنه من أجل كل عدد حقيقي سالب تماما x ، $f'(x)=1-\frac{2}{x^3}$. ثم شكل جدول تغيرات f

3) أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$.

ب) عين معادلة المماس (d) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها -1.

4) احسب $f(\alpha)$. ثم أرسم (Δ) ، (d) و (C).

الجزء الثالث: تمارين البكالوريا

العلوم التجريبية

التمريـــن31 دورة 2014

I-لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$.

1) أ)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب)ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7\prec\alpha\prec0,8$.

ب)استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

3) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f (نأخذ $f(\alpha)\approx-0,1$).

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

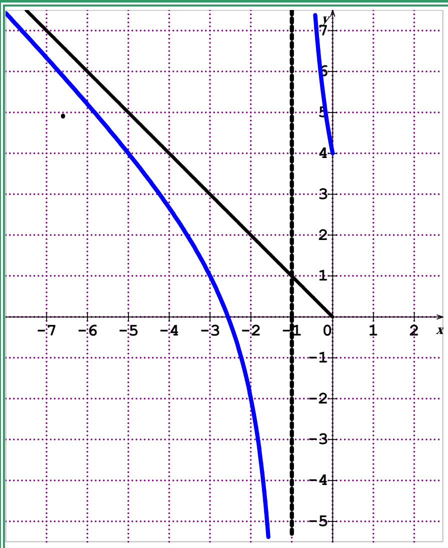
6)لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$. و (C_h) تمثيلها البياني

أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) أستنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ (C_h).

التمريـن32 دورة 2009

I) f دالة معرّفة على المجال $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$



و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ كما هو مبين في الشكل المقابل

1) أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه f شكل جدول تغيراتها.

2) g دالة معرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني

أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ) أدرس تغيرات g.

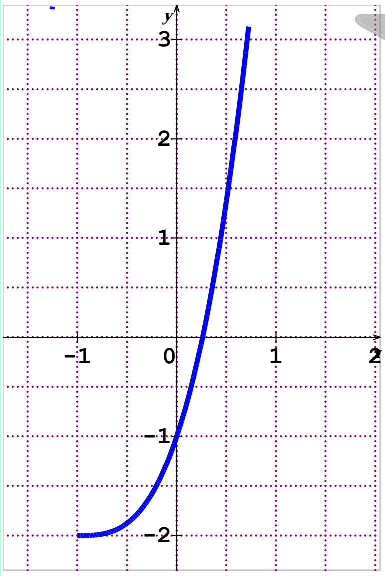
II) k دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

1) أ) أحسب $\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ، ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أكتب معادلتي نصفي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أرسم (Δ_1) و (Δ_2) و (C_k)

التمريـــن 33 دورة 2008



المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على $I=]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$

1-أ) بقراءة بيانية :

شكل جدول تغيرات الدالة g وحدّد $g(0)$ وإشارة $g(0,5)$

ب) علّل وجود عدد حقيقي $\alpha\in]0;0,5[$ يحقق: $g(\alpha)=0$

جـ) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I

2) f دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ و (Γ) تمثيلها

أ) تحقق أنه من أجل كل $x\in I$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب) عين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسر النتيجة بيانيا.

جـ) جد $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ فسر النتيجتين بيانيا .

د) شكل جدول تغيرات f

3) نأخذ: $\alpha=0,26$. أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} . ب) أرسم المنحنى (Γ) .

تقني رياضي

التمريـــن34 دورة 2017

I-نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=x^3+6x+12$

1- أدرس إتجاه تغير الدالة g.

2- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $]-1,48;-1,47[$، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$.

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$،

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2-أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة المستقيم (Δ).

3-بيّن أن : $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4-ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

التمريـــن35 دورة 2009

f دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و(C_f) منحنى f في معلم متعامد ومتجانس

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2-أ) بين أن (C_f) يقبل مقاربين أحدهما (D) : $y=x$.

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و(D).

3-أ)بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1,3\prec x_0\prec 1,4$.

ب) أكتب معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب.

جـ)أرسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.

4) g دالة معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=|f(x)|$ واليكن (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم

أ)بين كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه.

ب)ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة: $g(x)=m^2$

التمريــن36 دورة 2010

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أن f دالة فردية.

2) اثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

3) ادرس تغيرات الدالة f.

4) اكتب معادلة للماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

5) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

6) بيّن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$

ثم استنتج معادلة (D') المستقيم المقارب الآخر

7) أرسم (D) و (D') و (C_f) في المعلم السابق.

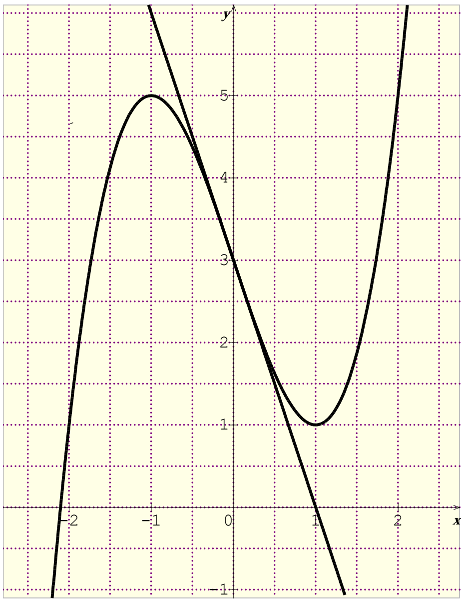
8) g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

أ) بيّن أن الدالة g زوجية.

ب) إنطلاقا من (C_f) أرسم (C_g) في نفس المعلم السابق.

الجزء الرابع: تمارين مقترحة

التمريـــــن37



I- المنحنى (C_g) الموالي هو التمثيل البياني للدالة g

المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3+ax+b$.

1. <u>بقراءة بيانيّة:</u>

ا)عيّن $g(-1)$؛ $g(1)$، $g'(0)$ و $g''(0)$

ب) شكّل جدول تغيّرات g.

2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيداً α

في المجال $]-2,2;-2,1[$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

3. أحسب $g'(x)$ ، ثم بيّن أن: $a=-3$ و $b=3$

II- f الدالةالمعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x^4-6x^2+12x)$

1.ا)بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=4g(x)$.

ب)استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، و شكّل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أنّ $f(\alpha)=-3\alpha(\alpha-3)$ ، ثم احصر $f(\alpha)$.

III- k الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$. وليكن (C_k) تمثيلها البياني

1.تحقق أنّ k زوجيّة.

2.دون دراسة تغيّرات k، استنتج جدول تغيّراتها.

3.هل k قابلة للإشتقاق عند0؟ علّل إجابتك.

التمريـــــن38

fدالة عددية جدول تغيراتها التالي

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

نفرض أن $f(x)$ تكتب على الشكل: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية.

1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و c

2)اعتمادا على جدول التغيرات للدالة f:

أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c

ب) عين $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ وفسر النتيجتين بيانيا.

جـ) قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f معللا اجابتك.

3) نأخذ فيما يلي أن : $a = b = c = 1$ و اليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) بين أن عندما يؤول x إلى $(-\infty)$ و $(+\infty)$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) معادلته $y = x + 1$

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للستقيم (Δ).

جـ) أثبت أن النقطة $\omega(-1;0)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

د) أرسم المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) ثم أرسم المنحنى (C_f)

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = m + 2$.

التمريـــــن39

I-نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـِ : $g(x) = ax + b - \frac{1}{x-3}$

حيث a وb عددين حقيقيين و ليكن (C) تمثيلها البياني .

1) عين كل من a و b علما أن:

(C) يمر بالنقطة $A(2\,;1)$ ويقبل في هذه النقطة مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.

2) بين أن النقطة $I(3\,;3a+b)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $R - \{3\}$ بـِ : $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 7}{x-3}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل x من $R - \{3\}$ ، $f(x) = g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة f.

3) احسب $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (-x+2)]$ ماذا تستنتج ؟

4) أدرس الوضع النسبي (C_f) والمستقيم المقارب المائل (Δ)

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما 3 يطلب تعيين معادلتيهما

6) ارسم المستقيم (Δ) و المنحني (C_f).

7) باستعمال المنحنى (C_f) حدد حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : f(x)=3x+m.

التمريـــــن40

f دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=|x|+\sqrt{x^2-1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس شفعية الدالة f ثم احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

2) بين أن: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 1 من اليمين وفسر النتيجة بيانيا.

4) أدرس إتجاه تغير f على $[1;+\infty[$ ثم استنتج إتجاه تغيراتها على $]-\infty;-1]$ وشكل جدول تغيراتها

5) بين أن (C) يقطع المستقيم ذي المعادلة: $2y=5$ في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1\prec\alpha\prec2$

6) أرسم المستقيمات المقاربة والمنحنى (C) .

التمريـــــن41 :بكالوريا 1980

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$

يرمز $\mathscr{C}$ إلى المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) أدرس تغيّرات الدالة f . استنتج معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمحني $\mathscr{C}$.

2) أكتب معادلة لماس المنحني $\mathscr{C}$ عند نقطة ذات الفاصلة 5 .

3) أثبت أن المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحني $\mathscr{C}$. أرسم المنحني $\mathscr{C}$.

4) نعتبر الدالة f_m المعرّفة بـ : $f_m(x)=\dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$ حيث m وسيط حقيقي .

أ- أدرس تغيرات الدالة f_m واستنتج المستقيمين المقاربين لمنحنها $\mathscr{C}_m$.

ب- بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات $\mathscr{C}_m$.

جـ- ما هو المنحني الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(4;1)$ ؟

التمريـــــن42 :بكالوريا 1997

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}$.

نسمي $\mathscr{C}_f$ المنحني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس .

1 عين الأعداد الحقيقية a، b و c ، بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$

$$f(x)=a+\frac{b}{2x-1}+\frac{b}{x-2}.$$

3) أدرس تغيرات الدالة f ثم أكتب معادلة لكل من المستقيمات المقاربة للمنحني $\mathscr{C}_f$.

4) أكتب معادلة لماس المنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
5) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني $\mathcal{C}_f$ وحامل محور الفواصل.
6) أرسم المنحني .

التمريـــــن43 :بكالوريا 1997

1) لتكن الدالة العددية f والمعرفة $\mathbb{R}-\{-1\}$ كمايلي: $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

نسمي (C) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-بين أن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$

2-أدرس تغيرات الدالة f.

3-أكتب معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحنى (C)

4-بين أن (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0\in]-0,37;-0,25[$

5-أكتب معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

6- أرسم المنحنى (C)

7-لتكن المعادلة: $2x^3+(7-m)x^2+2(4-m)x+2-m=0....(e)$ حيث m وسيط حقيقي و x هو المجهول

أ-بين انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن (e) تكافئ المعادلة $f(x)=m$.

ب-أستعمل المنحنى (C) لدراسة حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة (e)

التمريـــــن44 :بكالوريا 1997

لتكن الدالة العددية f والمعرفة $\mathbb{R}-\{-1\}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{x^2(x+2)}{(x+1)^2}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1)عيّن الأعداد الحقيقية α β، γ بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$.

$$f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{(x+1)}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

2)أدرس تغيرات الدالة f.

3)عيّن المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f).

أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل.

أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل

4)أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1.

5)أنشئ المماس والمنحنى (C_f)

التمريـــــن45

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-x+\frac{x-2}{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن $f'(x)=\frac{-x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$.

3) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المستقيم $(D): y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D)

5) عين معادلة المماس لـ (C_f) عن النقطة التي فاصلتها -1، ثم استنتج قيمة تقريبية لـ $f(-1.25)$.

6) أرسم (D) و (C_f).

7) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ و (C_g) تمثيلها البياني . إذا علمت أن (C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{-1}{1}$ عين عبارة $g(x)$ ثم أرسم (C_g).

التمريـــــن46

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

I) عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته: $y=x-3$ ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3 .

II) نفرض في كل مايلي: أن $a=1$ و $b=-5$ و $c=7$

1) أدرس تغيرات الدالة f.

2) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3)، يطلب إعطاء معادلتي المماسين (D_1) و (D_2)

3) أرسم بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ثم المنحنى (C_f).

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)+3x-m=0$

5) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $g(x)=f(|x|)$

أ) بين أن الدالة زوجية.

ب) أدرس قابلية إشتقاق g عند 0

جـ) بين أنه يمكن إنشاء (C_g) منحنى g إنطلاقا من (C_f) ، ثم أرسم (C_g) في نفس المعلم السابق.

التمريــــن48

I - g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-3x-3$ يرمز (C_g) إلى منحنيها البياني

1) ادرس تغيّرات الدالة g.

2) أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيداً α من المجال $]2,1;2,2[$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

3) x عدد حقيقي كيفي من $\mathbb{R}$؛ احسب $g(-x)+g(x)$، ثم فسّر النتيجة بيانيّا .

II- f دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$ يرمز (C_f) إلى منحنيها البياني

1) بيّن- من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$: $f'(x)=\dfrac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$

2) ادرس تغيّرات الدالة f.

3) أثبت أنّ $f(\alpha)=3\alpha$ ، و استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

4) برهن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x$ مقارب مائل لـ (C_f)

- ادرس وضعيّة (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

5) بيّن أنه يوجد مماسان لـ (C_f) يوازيان (Δ).(يطلب إعطاء فاصلتيْ نقطتيْ التّماس فقط).

6) أنشئ المنحني (C_f).

7) ناقش بيانيّا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة :

$2x^3-mx^2+m+3=0$.

III- h دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{2|x|^3+3}{x^2-1}$

1) أثبت أنّ h دالة زوجيّة.

2) بيّن أنه يمكن استنتاج (C_h) من (C_f)، ثم أنشئه في نفس المعلم.

التمريــــن49

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $f(x)=|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.أ) احسب النهايات عند أطراف مجال التعريف.

ب) اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2.أ) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارته .

ب) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3.أ) بيّن أن المستقيمين $(\Delta): y=x+1$ و $(\Delta'): y=-x-1$ مقاربان للمنحني (C_f).

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كلٍّ من (Δ) و (Δ').

جـ) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتيْن

إحداهما فاصلتها α في المجال $]0,5;1[$، و الثانية فاصلتها β في المجال $]-2;-1,5[$.

د) أنشئ المنحني (C_f).

4. يُعطى المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y = mx + 1$، حيث m وسيط حقيقي.

ا) بيّن أنه عندما يتغيّر m في $\mathbb{R}$، فإنّ (D_m) يدور حول نقطة يطلب تعيينها.

ب) ناقش بيانيّا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $|x+1| + \frac{x}{x^2-1} - mx = 1$.

التمريـــــن 50

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ و (C_f) منحنيها في م م م $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. ا) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$، ثم فسّر النتيجة هندسيّا.

2. ا) بيّن أنه، مهما كان x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

ب) برهن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) \prec 0$.

3. شكّل جدول تغيّرات f.

بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) + 2x) = 0$، ثم فسّر النتيجة هندسيّا.

4. عيّن إحداثيّيْ نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب، ثم أنشئ المنحني (C_f).

التمريـــــن 51

I) g الدالة المعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ كمايلي: $g(x) = ax^3 - 3x + b$ و (C_g) هو تمثيلها البياني

1) عين العددين الحقيقين a، b علما أن (C_g) يقبل مماسا معادلة $y = -6$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

2) أدرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيرات g

3) بين أن المعادلة: $x^3 - 3x - 4 = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]2;2,25[$ ثم استنتج اشارة $g(x)$

II) f دالة معرّفة على $]1,+\infty[\cup]-1;1[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2(x+2)}{x^2-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب نهايات f عند حدود مجال التعريف

2-أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[\cup]-1;1[$، ثم احسب $f'(x)$

ب) تحقق أن $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$ و استنتج إشارته، ثم ارسم جدول تغيرات f

3)بيّن أن: $f(\alpha)=\dfrac{3\alpha^2+10\alpha+8}{2\alpha+4}$، ثم عيّن حصرا لـ$f(\alpha)$

5)احسب $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(x+2))$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له

6)أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

7)أنشئ المنحنى (Δ) والمستقيم (C_f).

التمريـــــــن52

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{(x+a)^2}{x^2+b}$ ، حيث: a وb عددان حقيقيان غير معدومين.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-عين العددين a وb إذا علمت أن معادلة المماس (Δ) عند النقطة فاصلتها 0 هي : $y=2x+1$

2-أثبت أن المستقيم معادلته : $y=1$ مستقيم مقارب لمنحنى الدالةf.

3- بوضع : $a=b=1$

أ-أثبت من أجل كل عدد حقيقيx أن: $f'(x)=\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

ب-عين اتجاه تغير الدالةf، ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ- حدد الوضعية النسبية لمنحنى الدالةf و المماس (Δ)، ماذا يمكن القول عن النقطة $A(0,1)$؟

د- بين أن النقطة $A(0,1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

هـ-ارسم المنحنى (C_f) و المماس (Δ).

4- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

استنتج جدول تغيرات الدالة g انطلاقا من جدول تغيرات الدالة f

مجلة الرائد في الرياضيات

****

الحـــــــــلول

الجزء الاول

العلوم التجريبية

****

الجزء الثاني

تقني رياضي

BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

Facebook العربي الجزائري

الجزء الثالث: تمارين البكالوريا

العلوم التجريبية

التمريـــن31 دورة 2014

I-1) أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

لدينا: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

ومنه: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$ وتشكيل جدول تغيراتها.

* اتجاه التغيّر الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x)=6x^2-8x+7$

$g'(x)\succ 0$ لأن مميز العبارة $6x^2-8x+7$ سالب ومعامل x^2 موجب ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

*جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2 -أ)تبيان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

من الجواب السابق الدالة g مستمرة ومتزايد تماما

على المجال $]0,7\,;0,8[$ و $g(0,7)\times g(0,8)\prec 0$ لأن:

$g(0,7)=-0,37$ و $g(0,8)=0,06$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد

وحيد $]0,7\,;0,8[\ \alpha\in$ يحقق: $g(\alpha)=0$

ب)استنتاج اشارة $g(x)$ وذلك حسب قيم x

من جدول تغيرات الدالة g ومن الجواب 2-أ) نستنتج أن :

$g(]-\infty;\alpha[)=]-\infty;0[$ معناه $g(x)\prec 0$ من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$

و $g(]\alpha;+\infty[)=]0;+\infty[$ معناه $g(x)\succ 0$ من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$

II-1)حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

2-أ)تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2x^2-2x+1}$.

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[(x+1)+\frac{1-3x}{(2x^2-2x+1)}\right]=\frac{1}{2}\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{(2x^2-2x+1)}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{(2x^2-2x+1)}=\frac{1}{2}\times\frac{2(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)}=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

ب) استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) وتعيين معادلة له .

من العبارة: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2x^2-2x+1}$ لدينا: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-3x}{2x^2-2x+1}=0$

وعليه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته : $y=\frac{1}{2}(x+1)$.

ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس اشارة الفرق : $f(x)-y=\frac{1-3x}{2x^2-2x+1}$

وهي اشارة $(1-3x)$ لأن المقام موجب تماما و من الجدول المقابل نستنتج مايلي:

*إذا كان $x\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ فإن (C_f) يكون فوق (Δ)

وإذا كان $x\in\left]\frac{1}{3};-\infty\right[$ فإن (C_f) يكون تحت (Δ)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$1-3x$		+	0	−	

* إذا كان $x=\frac{1}{3}$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي احداثياها $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

3-أ) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^2-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{(2x^4-4x^3+7x^2-4x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

ومنه: $f'(x)=\frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

ب)استنتاج إشارة $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f.

*اشارة $f'(x)$: اشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة البسط $x.g(x)$ لأن المقام دوما موجب.

إشارة البسط $x.g(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارةx		−	0	+		+	
إشارة$g(x)$		−		−	0	+	
إشارة $f'(x)$		+	0	−	0	+	

* جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) حساب $f(1)$ وحل المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$

لدينا: $f(1)=0$.

$f(x)=0$ معناه $x^3-2x+1=0$ معناه $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)=0$ لأن $f(1)=0$

معناه $(x-1)=0$ أو $(x^2+x-1)=0$ أي $x=1$ أو $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ أو $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ملاحظة: حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) وحامل محور الفواصل.

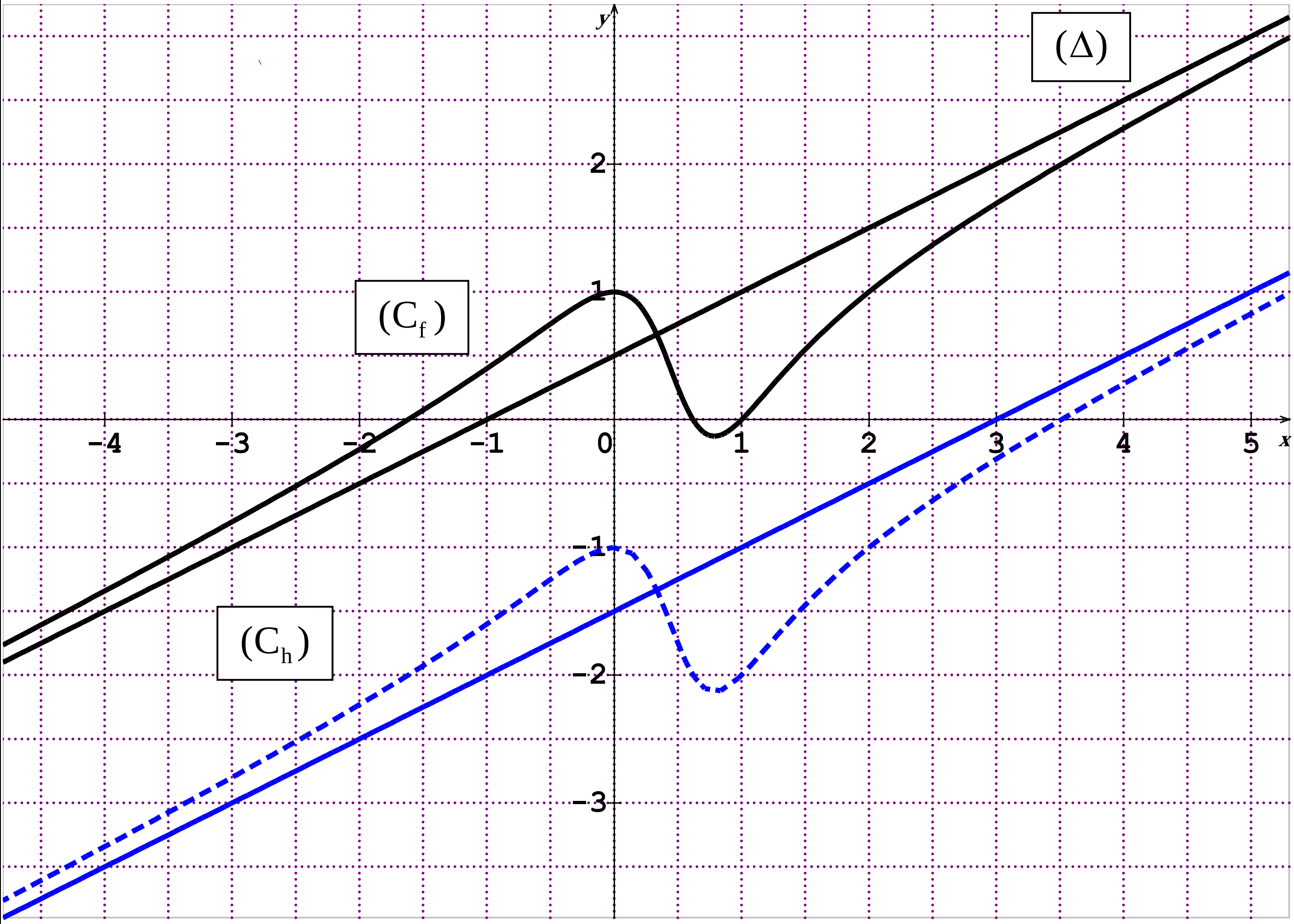
5) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (يوجد في آخر الحل رفقة المنحنى (C_f)).

6-أ) التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

لدينا: $f(x)-2=\dfrac{(x^3-2x+1)-2(2x^2+2x+1)}{2x^2-2x+1}=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}=h(x)$

ب) استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط وتعيينه، ثم رسم (C_h)

من العبارة $h(x)=f(x)-2$ نستنتج أن: هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$



التمريـن32 دورة 2009

I(1-أ)حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+\frac{4}{x+1})=+\infty \text{ ، } \lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1}(\frac{4}{x+1})=-\infty \text{ ، } \lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}(\frac{4}{x+1})=+\infty$$

ب)تشكيل جدول التغيرات بقراءة بيانية

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$	$-$	‖	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 4$

2-أ) حساب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{4}{x+1})=+\infty$$

ب) التحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)

المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{4}{x+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{4}{x+1})=0$

جـ) دراسة تغيرات الدالة g

أتجاه التغير لدينا: g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$حيث:

$$g'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x)=0$ معناه $(x-1)(x+3)=0$ معناه: $x=1$ أو $x=-3$ مرفوض

إشارة المشتق هي حسب إشارة $x-1$ وعليه جدول تغيرات هو كالتالي:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$4 \searrow$	3	$\nearrow +\infty$

II-1أ)حساب $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ والاستنتاج

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{h^2-3h}{h(h+1)}=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{h-3}{h+1}=-3$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-h^2-5h}{h(h+1)} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-h-5}{h+1} = -5$$

نستنتج أن k ليست قابلة للإشتقاق عند 0 لأن العدد (-3) لايساوي (-5).

ب) اعطاء تفسيرا هندسيا للنتيجة

k قابلة للإشتقاق من اليمن وقابلة للإشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفي مماسين عند النقطة التي فاصلتها 0 .النقطة التي احداثياها $(0;4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k

2) كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2)

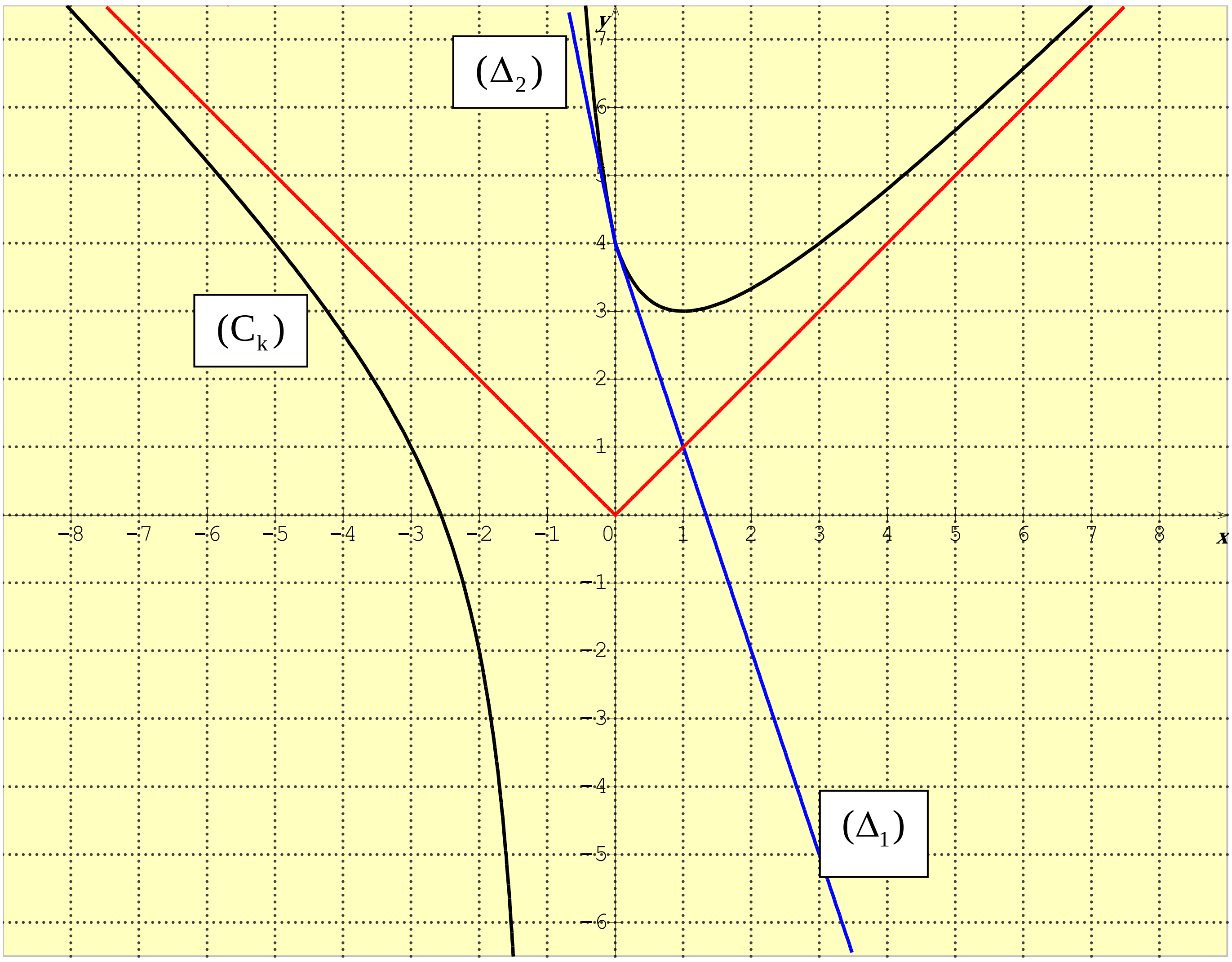
*(Δ_1) هو نصف المماس عند $x_0=0$ حيث $x_0 \geq 0$ لدينا: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$ أي $y=-3x+4$

*(Δ_2) هو نصف المماس عند $x_0=0$ حيث $x_0 \leq 0$ لدينا: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$ أي $y=-5x+4$

3) رسم كلا من (Δ_1) و (Δ_2) والمنحنى (C_k)

لرسم المنحنى (C_k) نلاحظ: إذا كانت $x \leq 0$ فإن: $k(x)=f(x)$ ومنه: $(C_f)=(C_k)$

إذا كانت $x \geq 0$ فإن: $k(x)=g(x)$ ومنه: $(C_g)=(C_k)$



التمريـــن 33 دورة 2008

x	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$			
$g(x)$	-2	0	$+\infty$

1-أ)تشكيل جدول تغيرات الدالة g بقراءة بيانية

من البيان يمكن استنتاج الجدول المقابل

تحديد $g(0)$ وإشارة $g(0.5)$

من البيان لدينا $g(0)=-1$ وإشارة $g(0.5)>0$

ب)تعليل وجودعدد حقيقي $\alpha \in]0;\frac{1}{2}[$ يحقق $g(\alpha)=0$

g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0،\frac{1}{2}]$ و $g(0)\times g(\frac{1}{2})\prec 0$ $[0،\frac{1}{2}]$ و $g(0)\times g(\frac{1}{2})\prec 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha \in]0;\frac{1}{2}[$ يحقق $g(\alpha)=0$

ج) استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $]-1 ، +\infty[$

اذا كانت $x \in]-1;\alpha[$ فإن $g(x)\in]-2;0[$ ومعناه $g(x)<0$

و اذا كانت $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن $g(x)\in]0;+\infty[$ ومعناه $g(x)>0$

2-أ)التحقق أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1 ، +\infty[$ حيث:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x-1)}{(x+1)^4}$$

ومنه $$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)-2(x^3+3x^2+3x-1)}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب)تعيين $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ دون حساب

حسب تعريف العدد المشتق لدينا $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=0$

من النتيجة السابقة نستنتج ان للمنحنى (Γ) مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y=f(\alpha)$

ج)حساب $\lim\limits_{x\to -1^{>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$

لدينا: $\lim\limits_{x\to -1^{>}} f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}=+\infty$. التفسير البياني لهذه النتيجة أن المنحنى (Γ) مقارب يوازي حامل محور التراتيب معادلته: $x=-1$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x+1)^2}=0$ التفسير البياني لهذه النتيجة أن المنحنى (Γ) مقارب مائل معادلته: $y=x+1$ في جوار $+\infty$

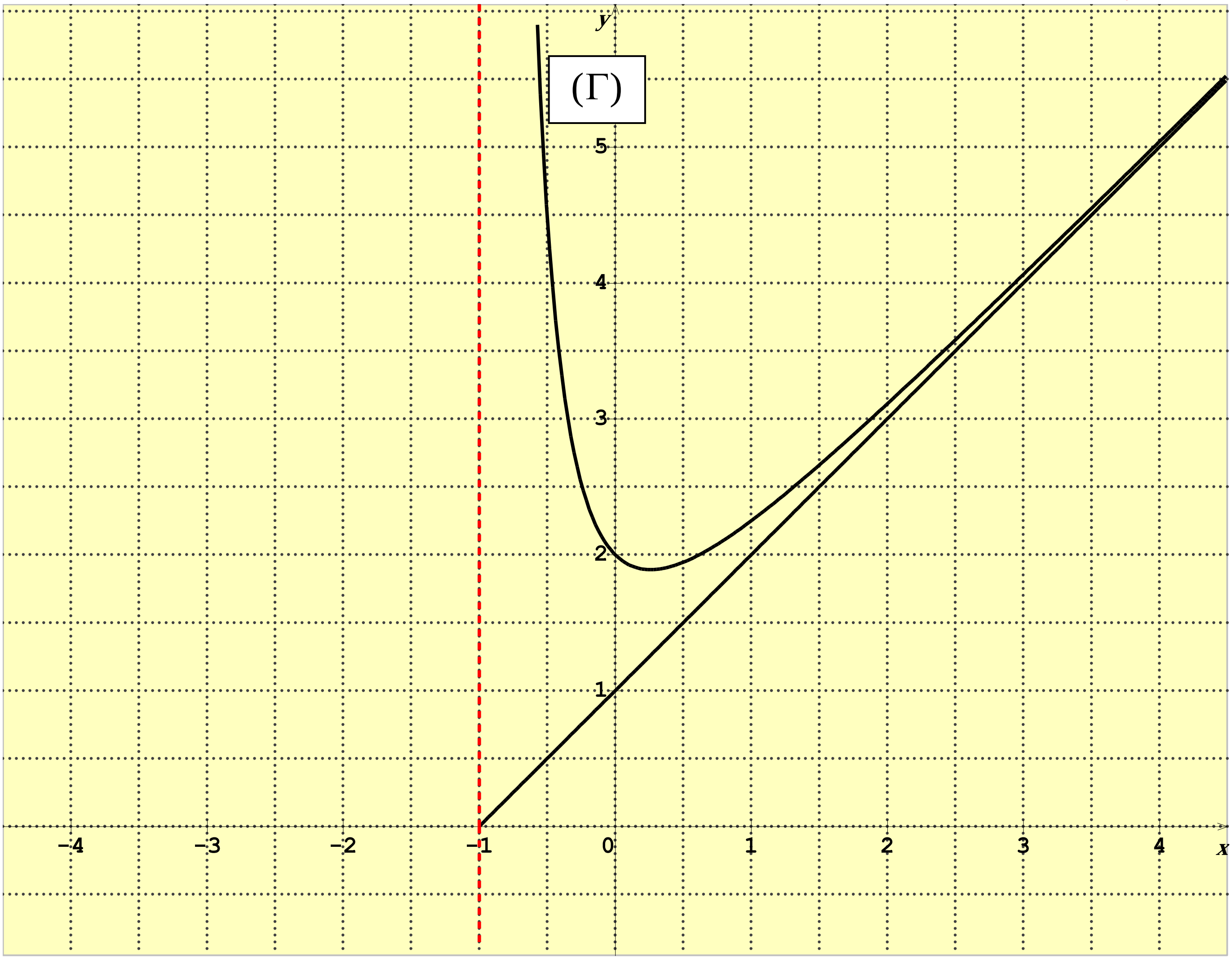
3-أ)تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}

لدينا: $f(0,26)=1,89$ ومنه مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} هو $1,89$

اشارة $f'(x)$ هي حسب اشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كالآتي:

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) رسم المنحنى (Γ)



تقني رياضي

التمريـــن34 دورة 2017

I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=3x^2+6$

لدينا: $g'(x)\succ 0$ وعليه تكون الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2)تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-1,48;-1;47[$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $g(-1,48)<0$.$g(-1,47)$ وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $-1,48\prec\alpha\prec-1,47$ وذلك حسب مبرهنة القيم التوسطة.

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

من الجواب 1 و 2 السابقين نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$ فإن: $g(x)\prec 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\succ 0$

II-1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

أ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+2)-2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2}=\frac{x\left[3x(x^2+2)-2(x^3-6)\right]}{(x^2+2)^2}=\frac{x\left[3x^3+6x-2x^3+12\right]}{(x^2+2)^2}=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من اشارة $xg(x)$ وحسب الجدول

x	$-$	α	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$	0	$-$	0	$+$
$xg(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ)تبيان أن المستقيم (Δ)ذا المعادلة: $y=x$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f).

المستقيم (Δ)ذا المعادلة: $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f)معناه: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-y]=0$

لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x^3-6}{x^2+2}-x=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-2x-6}{x^2+2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$.

ب)دراسة الوضع النسبي لـ(C_f) و (Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ(C_f)و (Δ)ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=\frac{-2x-6}{x^2+2}$

لدينا: $f(x)-y=0$ من أجل $x=-3$ ويكون (C_f)يقطع(Δ)في نقطة احداثييها $(-3;-3)$

$f(x)-y\succ 0$ من أجل كل $x\in]-\infty;-3[$ ويكون (C_f)فوق(Δ)في هذا المجال

: $f(x)-y\prec 0$ من أجل كل $x\in]-3;+\infty[$ ويكون (C_f)تحت(Δ)في هذا المجال

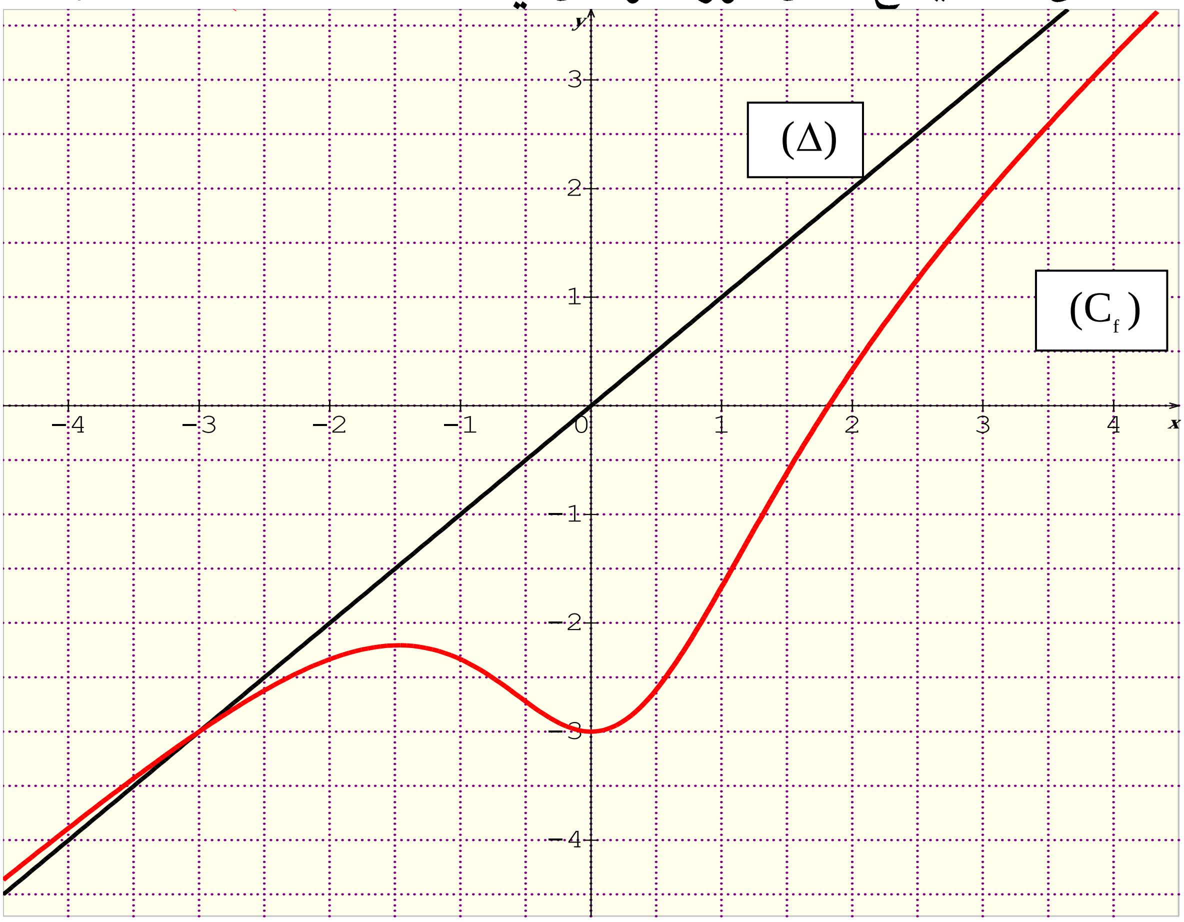
3) تبيان أن $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتاج حصرا للعدد$f(\alpha)$

لدينا: $f(\alpha)=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}$ والمطلوب هو $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ وعليه نبين أن $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$

$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3\alpha}{2}=\frac{-\alpha^3-6\alpha-12}{2(\alpha^2+2)}=\frac{-g(\alpha)}{2(\alpha^2+2)}=0$ لأن$g(\alpha)=0$من الجواب I-2)

4) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

ملاحظة:المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها $x_0=\sqrt[3]{6}\simeq 1,81$



التمريــن35 دورة 2009

1) دراسة تغيرات الدالة f .

fدالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

***النهايات**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}=+\infty$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{\sqrt{x+1}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} -\frac{2}{\sqrt{x+1}}=-\infty$ $=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} -1-\frac{2}{\sqrt{x+1}}=$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=$ **لأن:** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} \sqrt{x+1}=0^+$

*** اتجاه التغير**

لدينا: fقابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ حيث: $f'(x)=1+\frac{2(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x+1})^2}$

لاحظ أن: $(\sqrt{x+1})'=\frac{1}{2(\sqrt{x+1})}$ وعليه $f'(x)=1+\frac{1}{(\sqrt{x+1})(x+1)}$

لدينا $f'(x)=1+\frac{1}{(\sqrt{x+1})(x+1)}\succ 0$ نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

وعليه جدول تغيراتها هو:

x	-1 $\quad\quad$ $+\infty$
f'(x)	+
f(x)	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2-أ) تبيان أن (C_f) يقبل مقاربين أحدهما (D) : $y=x$.

لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$ ومنه المنحنى(C_f) مقارب يوازي حامل محور التراتيب معادلته: x=-1

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{\sqrt{x+1}}=0$ المنحنى(C_f) مقارب مائل معادلته: y=x في جوار $+\infty$

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و(D).

لدراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و(D) ندرس اشارة الفرق: $[f(x)-x]=-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

نلاحظ أن: $-\frac{2}{\sqrt{x+1}}\prec 0$ من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ وعليه (C_f) يكون تحت (D).

3-أ)تبيان أن(C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1{,}3\prec x_0\prec 1{,}4$.

من الجواب 1) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1{,}3;1{,}4[$.

و $f(1,3)\times f(1,4)\prec 0$ لأن: $f(1,3)=-0,01$ و $f(0,8)=0,01$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $x_0\in]1,3;1,4[$ يحقق: $f(x_0)=0$ والتفسير الهندسي هو ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1,3\prec x_0\prec 1,4$.

ب) كتابة معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب.

نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب فاصلتها معدومة وعليه نكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.ومنه: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=2x-2$ لأن: $f'(0)=2$ و $f(0)=-2$

ج) رسم (Δ) و (C_f) في الجواب القادم

4-أ) تبيان كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه.

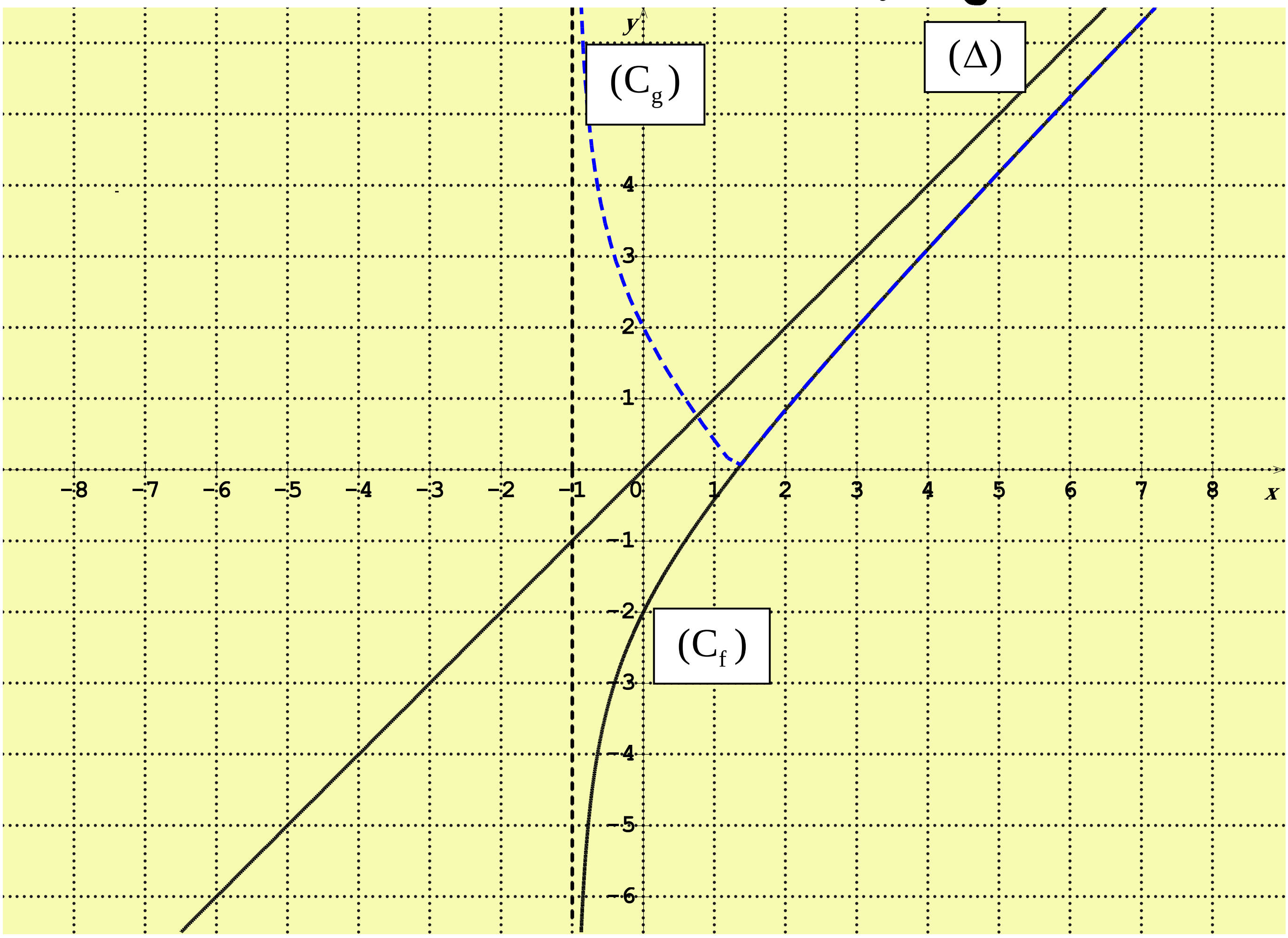
لدينا: g دالة معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=|f(x)|$

من الجواب 3- أ) نستنتج أن إشارة $f(x)$ هي: $f(x)\prec 0$ معناه $]-1;x_0[$ و $f(x)\geq 0$ معناه $]x_0;+\infty[$

وعليه يمكن كتابة عبارة $g(x)$ كمايلي: $g(x)=\begin{cases}-f(x);x\in]-1;x_0[......(1)\\ f(x);x\in]x_0;+\infty[......(2)\end{cases}$

من العبارة (1) نستنتج أن (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $]-1;x_0[$

من العبارة (2) نستنتج أن (C_g) ينطبق على (C_f) على المجال $]x_0;+\infty[$.



ب) المناقشة البيانية لعدد واشارة حلول المعادلة: $g(x)=m^2$

لدينا:المعادلة التالية $g(x)=m^2$ تكافئ الجملة $\begin{cases} y=m^2 \\ y=g(x) \end{cases}$

من الجملة السابقة نستنتج أن حلول المعادلة $g(x)=m^2$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_g) والمستقيم ذوالمعادلة $y=m^2$ (يوازي حامل محور الفواصل)

من البيان (المنحنى (C_g)) نميز الحالات التالية :

1) $m=0$ المعادلة تقبل حلا وحيد ا موجب تماما.

2) $0 \prec m^2 \prec 2$ أي $-\sqrt{2} \prec m \prec \sqrt{2}$ المعادلة تقبل حلا ن موجان تماما.

3) $m^2=2$ أي $m=-\sqrt{2}$ أو $m=\sqrt{2}$ المعادلة تقبل حلا معدوما وحل آخر موجب تماما.

4) $m^2 \succ 2$ أي $m \prec -\sqrt{2}$ أو $m \succ \sqrt{2}$ المعادلة تقبل حلا ن مختلفان في الإشارة.

التمريـــن36 دورة 2010

1)تبيّان أن f دالة فردية.

f دالة فردية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$: $f(-x)+f(x)=0$.

لدينا:f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ب:

ومنه: $f(-x)+f(x)=-x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)+x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=0$

2)اثبات أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=1\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)+x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'$

لكن: $\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=-\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2}=-\frac{2x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

ومنه: $f'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\left(\frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right)=1+\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

3) دراسة تغيرات الدالة f.

***النهايات**

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})=+\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})=-\infty$ لأن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$ و $\lim_{x\to-\infty} x=+\infty$

* أتجاه التغير

لدينا: fقابلة للإشتقاق على المجال$]-1;+\infty[$ حيث: $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

لدينا $f'(x) \succ 0$ نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

وعليه جدول تغيراتها هو:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4) كتابة معادلة للماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

لدينا: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $y = 2x$ لأن: $f'(0) = 2$ و $f(0) = 0$

5) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) ندرس اشارة الفرق : $f(x) - y$ حيث $y = 2x$

لدينا: $f(x) - y = x\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - 2x = -x(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}})$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $-x$ لأن: $1 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \succ 0$ لاحظ أن $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \prec 1$

وعليه :من أجل كل $x \in \mathbb{R}_-^*$ يكون $f(x) - y \succ 0$ أي (C_f) يكون فوق (T)

من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$ يكون $f(x) - y \prec 0$ أي (C_f) يكون تحت (T)

من أجل كل $x = 0$ يكون $f(x) - y = 0$ أي (C_f) يقطع (T) في نقطة المبدأ.

من الدراسة السابقة نستنتج أن (C_f) يخترق (T) في نقطة المبدأ

ومنه المبدأ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

7) تبيّان أن المستقيم (D) ذو المعادلة y=x+1 مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} -1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$

ومنه المنحنى (C_f) مقارب مائل معادلته: y=x+1 في جوار $+\infty$

استنتاج معادلة (D') المستقيم المقارب الآخر

(D') المستقيم المقارب الآخر هو نظير المستقيم (D) بالنسبة للمبدأ لان f فردية

(D') هو صورة (D) بالتحويل النقطي $M(x,y) \to M'(x',y'):\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

وعليه معادلة (D') هي $-y' = -x' + 1$ أي $y' = x' - 1$

ومنه المنحنى يقبل مقارب مائل آخر (D') له معادلة من الشكل: $y = x - 1$ في جوار $-\infty$.

7) رسم (D) و (D') و (C_f) في ف آخر الحل.

8 - أ) تبيّان أن الدالة g زوجية.

الدالة g زوجية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$: $g(-x) - g(x) = 0$.

ومنه: $|-x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=0$ $g(-x)-g(x)=$ **لأن:** $|-x|=|x|$

ب)رسم (C_g) **إنطلاقا من** (C_f) **في نفس المعلم السابق.**

لدينا: $g(x)=f(x)$ **من أجل كل** $x\in\mathbb{R}_+$ **وعليه** (C_g)**ينطبق على** (C_f) **على** $\mathbb{R}_+$

: $g(x)=f(-x)$ **من أجل كل** $x\in\mathbb{R}_-$ **وعليه** (C_g)**نظير** (C_f) **على** $\mathbb{R}_-$ **لأن** g **زوجية**