

الدوال الأصلية

Primitive Functions

الحساب التكاملي

Integral calculation

موجهة للشعب: 

علوم تجريبية

تقني رياضي

رياضيات

تسيير و اقتصاد

انجاز الأستاذ: **شعبان أسامة** Mr. CHABANE Oussama.



وفقني الله عز و جل في اتمام هذا العمل البسيط خلال فترة عطلة الربيع ليكون
لكم مرجعا متواضعا .

أتمني لكم مع صميم قلبي النجاح و التوفيق في المشوار الدراسي

أقدم هذا العمل كهدية علمية لجميع محبي للمادة

تحياتي لعائلتي الحبيبة

أ. شعاع

للدكتور: شقرون طه



طه ياسين

إذا غامرت في سرف مروم** فلا تفتح بما دون النجوم

اصنع نفسك بنفسك



Accompagnateur Pedago

تقبل أملك وتفوق في حملك تحقق حلمك.
تحياي للأستاذين أ. شعبان و خ. باخاتة...
الأستاذ م. ط



Super fan

Brothers DZ

امشي صحيح لا تزعزع لا طيح



You NNess

العلم نور و الجهل ضلام.....



Super fan

Hind Fihakhir

لا بأس مع الحياة ولا حياة مع اليأس



تسمية نوي

"من نفسك كن واتقا وبلا وجل"

format

Hal Bens

أنتك في كل شيء ما عدا في أنني أنتك



Super fan

Ri Hâb

انتك تستطيع ما دمت تتق بذلك

صبرا فكل ما يحدث لصالحك فلا يكلف الله نفسا إلا وسعها



Himoud Roumaissa

لا تطمح أن تكون أفضل من الآخرين ولكن إطمح أن تكون أفضل من نفسك سابقا



رؤوف سليمان

هل تريد تدريب عقلك اذن تمتع بالرياضيات الرياضات لغة وفن



Pte Yassin

إذا غامرت في شرف مروم** فلا تتق بما دون النجوم



Feriel Fertikh Bouattoura

بالجد و العمل يحقق الامل



سليمان القشتالي

من جد وجد ومن زرع حصد



Sam Souma

فطيع جهل ما يجري و أقطع منه أن تدري



صاير يشيري

لكي تنجح يجب ان تكون رغبة النجاح اكبر من خوفك من الفشل



Ryad Slimani

العلم صندوق مفتاحه السؤال



Super fan

Roun Louri

الم الاجتهاد اهورن بكثير من الم الندم



Rahaf Célia

سيمضي ما كان صعباً بلطف دون أن تشعر ♥ فالعلم ليس سهلاً ولكنه ممكناً



Super fan

Särab Messaï

لا تستسلم ..أعجب الآن تم عس "بطلا" بقية حياتك 😊



Super fan

Ri Hâb

انتك تستطيع ما دمت تتق بذلك

صبرا فكل ما يحدث لصالحك فلا يكلف الله نفسا إلا وسعها



Sal Sa Bil

بعد الضيق يجي الفرج



تور حياة

ليس العيب ان تسقط ولكن العيب ان تبقى حيث سقطنا



قريشي رمزي سيد علي

أما ان تنجح وأما ان تنجح



Bouhdid Fatiha

من سلك طريقا يلتمس به علما سهل الله اليه طريقا الى الجنة



Super fan

سامية سامية

الارادة مطرقة جبارة تكسر صخرة المستحيل



Super fan

Physi Ker

بقدر همتك تجد نتيجةك ولو اردت القمر لنته بقدر جهلك

Physi_Ker#



Nour Mi

علمتي الرياضيات: أن لكل متغير قيمة تؤدي إلى نتيجة فأختر متغيرك جيداً لتصل إلى ما
يرضى الله.



عيد المغيث

"نصف ما نحلم به، كان من الممكن أن نحصل عليه لو أننا لم نضيع نصف وقتنا في الأحلام"
Flissi



Super fan

Mi Lā

فوض أمرك إلى الله ولن يفذلك ابداً. 1



Nadia Harti

تعلم لا أدري فإن قلت لا أدري علموك حتى تدري وإن قلت أدري سألوكم حتى لا تدري .



صاير يشيري

لكي تنجح يجب ان تكون رغبة النجاح اكبر من خوفك من الفشل



Soumia Khelifi Si tu oses, ton courage grandira. Si tu hésites, c'est

la peur qui prendra toute la place.



Abd Eldjalil Euldji

على قدر أهل العزم تأتي العزائم ****
وتأتي على قدر الكرام المكارم
وتعظم في عين الصغير صغارها ****
و تصغر في عين العظيم العظائم



Lon Ely

"هناك ساعة حرجية يبلغ الباطل فيها نزوة قوته ، ويبلغ الحق فيها أقصى محنته ، والتبات في هذه
الساعة الشديدة هو نقطة التحول "



Abou Yacine

لا يوجد مصعد كهربائي للنجاح
..... عليك أن تصعد السلالم.





Himoud Roumaissa

لا تطمح أن تكون أفضل من الآخرين ولكن إطمح أن تكون أفضل من نفسك سابقا



Super fan

سامية سامية

1 الإرادة مطرقة جبارة تكسر صخرة المستحيل



Aymen Boucenna

إذا كنت تبحث عن السعادة والتراء قابحت بعيدا عن التوظيف ولا تتحجج بالظروف



لحزتي رواية

لا تحكم على مستقبلك من الآن... فالأنبياء رعو الغم ثم قادو الأمم

Voir plus... كلام الناس مثل الصغور... اما ان تحطمها على ظهرك وتتكسر



Amani Talbi

النجاح سائل لا تستطيع ان ترتقيها وبذلك في جيبك



Jazayria Warda

1 اطلب العلم ولو بالصين



Ferial Sci

نقاوم ما نحب ونحمل ما نكره ، فالفوز في الحرب يسبقه الإنتصار على النفس ..



Hiwa Hiwa Khiwa

1 الله عند حسن نية عبده به



Salim Ali

1 الرياضيات مثل النبات يوما يسقى من أجل الحياة



Super fan

Soraya Raya

فأقد الشيء بعطيه و بقوة



Akram Garel Metred

1 انجح للذي ينتظر فشلك



Djezairi Djezairi

ضع بصمتك



Super fan

Chayoum Zr

أزهر بتفاصيلك الصغيرة دون أن يسبقك أحد



Merime MiMi

مالا تشعب عليه الأيدي لا تحزن عليه القلوب



Nasr Eddine Bekhouche

خييرا تعمل
خييرا تلقى



Ahlem Bkr

1 لا يمكنك صعود سلم النجاح و بديك في جيبك .



Meriem Ghanem

2 أفضل أن أقتل على شرف أن أنجح بالغن



Mimi Rayane

تنتهي المستحيلات عندما اقرأ "ان الله على كل شيء قدير"
مريم ريان م.



Soumia Khelifi

اطمئن...
ما استندت وتعثرت واستحالت،
إلا واستسهلت وتيسرت واستهانت



Super fan

Marcos Stat La vie aide ceux qui aident la vie.



Ali Bey

1 القناعة تغنيك عن الدنيا



يأتي قرة عيني

الى متى ستظل تحلم بغيرك الذي لا يهتم بك انصر الى نفسك قبل الآخرين



Islam Ferahtia

لظالمنا أمنت بأن الالم هو ما يدفعنا لأن نبدع ولأن نكبر.... و نزداد عظمة



Soumia Khelifi Si tu oses, ton courage grandira. Si tu hésites, c'est la peur qui prendra toute la place.



Ritage Setif

ان مع الحس يسرا



Super fan

Hal Ooma If you can dream it.. You can do it



Super fan

Flo Ra

لم تُخلق للبقاء ، فأصنع لـ روحك أثرا طيبا يبقى من بعدك..



Jazayria Warda

1 اطلب العلم ولو بالصين



رؤوف رؤوف

ليس النجاح أن تكون الأول إنما النجاح أن تكون أحسن من ذي قبل



Jazayria Warda

1 اطلب العلم ولو بالصين



Nadia Harti Hadjer Bedrouni

فهناك فرق كبير بين الترفع والتكبر

الجمال يعيش داخل الأتواء البسيطة

5M Maths مجلة

تجدون فيها:

ملخص الدرس

تطبيقات

QCM

تمارين + الحل

من البكالوريا

I. الدالة الأصلية.

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال:

تعريف: f دالة معرفة على مجال I .

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f .
من أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$

خصائص:

- * إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالاً أصلية على I .
- * إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال $F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

2. الدوال الأصلية لـ $f + g$ و kf (k عدد حقيقي)

خصائص:

- * إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لدالتين f و g على مجال I فإن $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على المجال I .
- * إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I ($k \in \mathbb{R}$)

3. الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

c عددا حقيقي كفي.

المجال I هو	الدوال الأصلية لـ f على I هي الدوال المعرفة بـ $F(x)$	f دالة معرفة على I بـ $f(x)$
$\mathbb{R}$	$ax + c$	a (a عدد حقيقي)
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x^2 + c$	x
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)
$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$	$-\frac{1}{x} + c$	$\frac{1}{x^2}$
$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$)

$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c, (a \neq 0)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ ($k \in \mathbb{Z}$)

4. الدوال الأصلية و العوليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$	
$(n \in \mathbb{N}^*) u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$
$(n \geq 2, n \in \mathbb{N}) \frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$

11. الحساب التكاملي

1. الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحنى:

خاصية

f دالة مستمرة وموجبة على مجال I . a و b عدنان حقيقيان

من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O; A, B)$ و F دالة أصلية لـ f على I .

مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$.

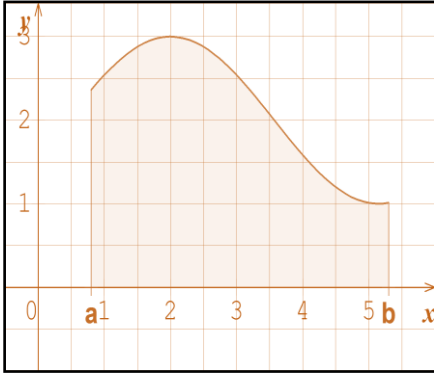
ملاحظات:

الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو

الحيز المحدد بالمنحني (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين

الذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$.

تعريف:



f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددين حقيقيين من I .

يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ ، حيث F دالة أصلية لـ f على I ،

التكامل من a إلى b لـ f . ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x) dx$.

ملاحظات:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x) dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ نكتب:}$$

2. يمكن تبديل المتغير x بأحد الحروف $t, q, \dots$ فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

نتيجة:

f دالة مستمرة وموجبة على مجال I . a و b عددين حقيقيين من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في

معلم متعامد $(O; A, B)$ و F دالة أصلية لـ f على I .

مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x) dx$

2. خواص التكامل:

f و g دالتان معرفتان ومستمرتان على مجال I .

أ- الخطية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I ومن أجل كل عدد حقيقي k لدينا:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

ب- الترتيب

خواص: $a \leq b$ و a و b عدنان حقيقيان من I حيث $a \leq b$.

$$(1) \text{ إذا كان من أجل كل } x \text{ من } [a; b], f(x) \geq 0 \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$(2) \text{ إذا كان من أجل كل } x \text{ من } [a; b], f(x) \leq g(x) \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

ج- علاقة شال

خواص: من أجل كل أعداد حقيقية a, b, c و c من I لدينا:

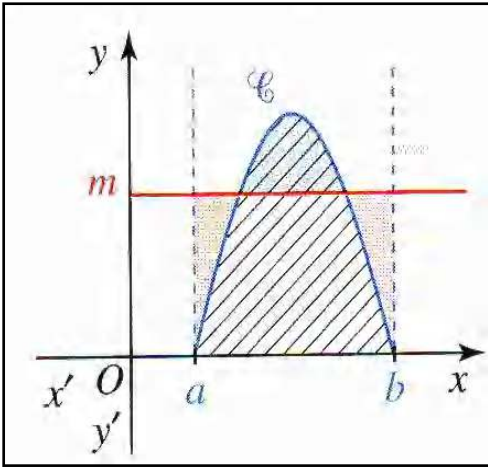
$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

3. القيمة المتوسطة لدالة على مجال:

تعريف:

f دالة معرفة ومستمرة على مجال I . a و b عدنان حقيقيان من I حيث $a < b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a; b]$ هي العدد الحقيقي: $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.



التفسير البياني:

نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a; b]$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; I, J)$.

$$m(b-a) = \int_a^b f(x) dx \text{ يعني } m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

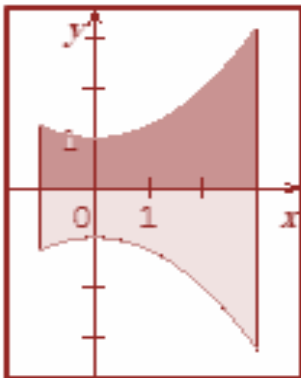
نعلم أن $\int_a^b f(x) dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b .

$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعده $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).

وهكذا فإن m ، القيمة المتوسطة لـ f على $[a; b]$ ، هي "ارتفاع" المستطيل

الذي قاعدته $b-a$ والذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b .

نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق والأحمر نفس المساحة.



حصر القيمة المتوسطة

خواص: f دالة مستمرة على مجال $[a; b]$.

إذا وجد عدنان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a; b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$ فإن:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عددين حقيقيين من I ووجد عدد حقيقي M

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M |b-a| \quad \text{فإن} \quad |f(x)| \leq M \quad \text{من} \quad I, \quad \text{بحيث من أجل كل } x$$

4. تكامل دالة سالبة على مجال

لنكن f دالة مستمرة وسالبة على مجال $[a; b]$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نرمز A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات التي معادلاتها

$$x = a, \quad x = b, \quad y = 0 \quad \text{و} \quad A' \text{ إلى مساحة } D' \text{ الحيز المحدد بالمنحنى } (C_{-f})$$

وبالمستقيمات التي معادلاتها $x = a, \quad x = b, \quad y = 0$.

$$A' = \int_a^b -f(x) dx \quad \text{بما أن} \quad f \text{ سالبة على } [a; b] \quad \text{فإن} \quad -f \text{ موجبة على } [a; b] \quad \text{وبالتالي}$$

الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل فمساحتهما متساويتان أي $A' = A$.

$$\text{وبالتالي فإن} \quad A = \int_a^b -f(x) dx \quad \text{أو} \quad \int_a^b f(x) dx = -A. \quad \text{نقول أحيانا أن} \quad \int_a^b f(x) dx \text{ هي}$$

المساحة الجبرية للحيز D

فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a; b]$ وتكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a; b]$.

5. تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

لنكن مثلاً f دالة مستمرة وتغير إشارتها على مجال $[a; b]$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نرمز A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات التي معادلاتها $x = a, \quad x = b, \quad y = 0$.

نلاحظ مثلاً في الشكل أعلاه أن f موجبة على $[c; d]$ وسالبة على المجالين $[a; c]$ و $[d; b]$.

نرمز A_1 إلى مساحة الحيز D_1 , A_2 إلى مساحة الحيز D_2 و A_3 إلى مساحة الحيز D_3 . لدينا $A = A_1 + A_2 + A_3$ وبما أن $A_1 = -\int_a^c f(x) dx$

$$A_2 = \int_c^d f(x) dx \quad \text{و} \quad A_3 = -\int_d^b f(x) dx \quad \text{فإن} \quad A = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^b f(x) dx$$

↓ **ملاحظة:**

بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x = a, \quad x = b, \quad y = 0$ وبمنحن ممثل لدالة f

تغير إشارتها على $[a; b]$ نقوم أولاً بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارة ثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق النتيجة المناسبة على كل مجال من هذه المجالات.

مبرهنة: $\square$

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I .
من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

خواص

خاصية 1: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن:

- الدالة $f: x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I ، $f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$.
- الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$ على I .

خاصية 2: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

- الدالة $f: x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I ، $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I .

تطبيق 1:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$F(x) = \frac{x-1}{x+1} - 2x \quad \text{و} \quad f(x) = -\frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

الحل:

طريقة: لإثبات أن F دالة أصلية لـ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل كل

$$x \text{ من } I, F'(x) = f(x).$$

F دالة ناطقة معرفة على $]-1; +\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ و من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ لدينا:

$$F'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} - 2 = \frac{2}{(x+1)^2} - 2$$

$$F'(x) = \frac{2 - 2(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{2[1 - (x+1)^2]}{(x+1)^2} = \frac{2[(1-x-1)(1+x+1)]}{(x+1)^2} = \frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2} \quad \text{و منه:}$$

$$F'(x) = \frac{-2x^2 - 4x}{(x+1)^2} = -\frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = f(x) \quad \text{و بالتالي:}$$

و هكذا من أجل كل x من $]-1; +\infty[$, $F'(x) = f(x)$. إذن F دالة أصلية لـ f على المجال $]-1; +\infty[$.

تطبيق 2:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 1$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(2) = -1$.

الحل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto x^2 - x + k$ حيث k عدد حقيقي.

2. لدينا من جهة $F(x) = x^2 - x + k$ و لدينا من جهة ثانية $F(2) = -1$.
 $F(2) = -1$ يعني $2^2 - 2 + k = -1$ و منه $k = -3$. نجد هكذا أن $F(x) = x^2 - x - 3$

تطبيق 3:

نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2; +\infty[$ كما يلي:

$$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \quad \text{و} \quad G(x) = \frac{2x - 1}{x - 2} + x$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الحل:

الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $]2; +\infty[$ ، $F'(x) = G'(x)$

$$F'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2} \quad \text{و} \quad G'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2}$$

إذن من أجل كل x من $]2; +\infty[$ ، $F'(x) = G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الثانية: نبين أنه من أجل كل x من $]2; +\infty[$ ، $F(x) - G(x) = k$ حيث k عدد حقيقي.

$$F(x) - G(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \right) - \left(\frac{2x - 1}{x - 2} + x \right) = \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

تطبيق 4:

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$$I =]0; +\infty[\text{ و } h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad * \quad I =]-\infty; 0[\text{ و } g(x) = \frac{2}{x^2} \quad * \quad I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = x^3 - 3x + 5$$

الحل:

$$* \text{ دالة أصلية } F \text{ للدالة } f \text{ على } \mathbb{R} \text{ معرفة بـ: } F(x) = \frac{1}{3+1} x^{3+1} - 3 \times \frac{1}{2} x^2 + 5x = \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + 5x$$

$$* \text{ دالة أصلية } G \text{ للدالة } g \text{ على } I =]-\infty; 0[\text{ معرفة بـ: } G(x) = 2 \left(-\frac{1}{x} \right) = -\frac{2}{x}$$

$$* \text{ دالة أصلية } H \text{ للدالة } h \text{ على } I =]0; +\infty[\text{ معرفة بـ: } H(x) = 3 \left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}} \right) - 2\sqrt{x} = -\frac{3}{2x^2} - 2\sqrt{x}$$

تطبيق 5:

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$$I = \mathbb{R} \text{ و } g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} * \quad I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2 *$$

الحل:

طريقة: لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ أو $\frac{u'}{u^n}$ أو $u'u^n$ مع تحديد عبارة $u(x)$.
 2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عددا حقيقيا k بحيث $f = k \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$ أو $f = k \times \frac{u'}{u^n}$ أو $f = k \times u'u^n$.
 3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.
- يظهر و أن الدالة f من الشكل $u'u^n$ مع $u(x) = x^2 + 2x + 5$ لدينا $u'(x) = 2x + 2$ أي أن $u'(x) = 2(x+1)$ و منه $x+1 = \frac{1}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $f = \frac{1}{2} \times u'u^2$ أي أن $f(x) = \frac{1}{2}u'(x) \times [u(x)]^2$
 - و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $F(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 2x + 5)^3$ أي $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}[u(x)]^3$
 - يظهر و أن الدالة g من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع $u(x) = x^2 + 1$ لدينا $u'(x) = 2x$ أي أن $u'(x) = 2x$ و منه $3x = \frac{3}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $g(x) = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ أي أن $g = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$
 - و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $G(x) = 3\sqrt{x^2+1}$ أي $G(x) = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = 3\sqrt{u(x)}$

تطبيق 6:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + \cos x$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(\pi) = -1$.

الحل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto x^2 + \sin x + k$ حيث k عدد حقيقي.
2. لدينا من جهة $F(x) = x^2 + \sin x + k$ و لدينا من جهة ثانية $F(\pi) = -1$ يعني $F(\pi) = -1$ يعني $\pi^2 - 0 + k = -1$ و منه $k = -1 - \pi^2$ نجد هكذا أن $F(x) = x^2 + \sin x - 1 - \pi^2$.

تطبيق 7:

أحسب التكاملات التالية:

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx \quad (1) \quad \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx \quad (2) \quad \int_{-3}^2 2x dx \quad (3)$$

الحل:

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - 0 = \frac{4}{3} \quad (1)$$

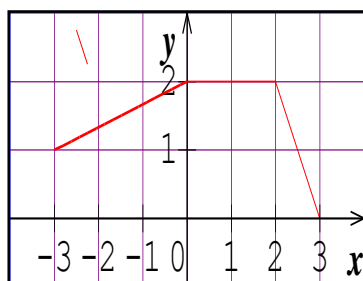
$$\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\int_{-3}^2 2x dx = \left[x^2 \right]_{-3}^2 = (2)^2 - (-3)^2 = 4 - 9 = -5 \quad (3)$$

تطبيق 7:

التمثيل البياني الذي بالأسفل هو لدالة f .

$$\int_0^3 f(x) dx \quad (3) \quad \int_{-3}^3 f(x) dx \quad (2) \quad \int_{-3}^2 f(x) dx \quad (1) \quad \text{أحسب التكاملات التالية:}$$



الحل: نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $[-3; 3]$.

$$\int_0^3 f(x) dx = 2 \times 2 + \frac{1 \times 2}{2} = 5 \quad (3) \quad \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{17}{2} + \frac{1 \times 2}{2} = \frac{19}{2} \quad (2) \quad \int_{-3}^2 f(x) dx = 3 \times \frac{1+2}{2} + 4 = \frac{17}{2} \quad (1)$$

تطبيق 7:

$$\int_1^3 g(x) dx = -5 \quad \text{و} \quad \int_1^3 f(x) dx = 2 \quad \text{حيث: } [1; 3]$$

$$\int_1^3 [2f(x) - 3g(x)] dx \quad (أ) \quad \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx \quad (ب) \quad \int_1^3 5f(x) dx \quad (ج) \quad \int_1^3 [2f(x) - 3g(x)] dx$$

$$\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx = 2 - 5 = -3 \quad (أ) \quad \text{الحل:}$$

$$\cdot \int_1^3 5f(x)dx = 5 \int_1^3 f(x)dx = 5 \times 2 = 10 \quad (\text{ب})$$

$$\cdot \int_1^3 [2f(x) - 3g(x)]dx = 2 \int_1^3 f(x)dx - 3 \int_1^3 g(x)dx = 2(2) - 3(-5) = 19 \quad (\text{ج})$$

تطبيق 7:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x) \leq 1$ ، استنتج أن $\int_0^1 f(x)dx \leq 1$

الحل: من أجل كل x من $[0;1]$ ، $1+x^2 \geq 1$ و منه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$

نستنتج أن $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1$ و بما أن $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \leq 1$ فإن $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \leq 1$

تطبيق 7:

f دالة معرفة على $[-1;2]$ بـ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in [-1;1] \\ 2x-1 & , x \in [1;2] \end{cases}$

أحسب $\int_{-1}^2 f(x)dx$

الحل: $\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x-1)dx$

لدينا: $\int_1^2 (2x-1)dx = [x^2 - x]_1^2 = 2 - 0 = 2$ و $\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

و منه $\int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$

تطبيق 7:

f دالة مستمرة على مجال I ، a ، b عدنان حقيقيان من I . بين أن:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (2) \quad , \quad \int_a^a f(x)dx = 0 \quad (1)$$

الحل: لتكن F دالة أصلية للدالة f على I .

$$\int_a^a f(x) dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0 \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad \text{و منه} \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (2)$$

تطبيق 7:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 1$

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1; 2]$.

الحل: القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1; 2]$ هي العدد الحقيقي m حيث:

$$m = \frac{1}{2-1} \int_1^2 (2x-1) dx = [x^2 - x]_1^2 = (4-2) - (1-1) = 2$$

تطبيق 7:

أحسب التكاملات التالية:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \quad (3)$$

$$\int_0^1 e^{2x-1} dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx \quad (1)$$

الحل:

$$1. \int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx = [-x^3 + x]_{-1}^2 = (-6) - (0) = -6$$

$$2. \int_0^1 e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} [e^{2x-1}]_0^1 = \frac{1}{2} [(e) - (e^{-1})] = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$3. \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = (1) - (1) = 0$$

تطبيق 7:

عين، باستعمال المكاملة بالتجزئة، الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ والتي تنعدم عند 1.

الحل:

طريقة: يمكننا دائما وضع $u(x) = u(x) v'(x)$ حيث $v'(x) = 1$.

الدالة $x \mapsto \ln x$ مستمرة على المجال $]0; +\infty[$. و بالتالي فدالتها الأصلية التي تتعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على المجال

$$]0; +\infty[\text{ بـ } F(x) = \int_1^x \ln(t) dt$$

$$\text{نضع } u(t) = \ln(t) \text{ ، } v'(t) = 1 \text{ و منه } u'(t) = \frac{1}{t} \text{ ، } v(t) = t$$

$$\text{بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: } F(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t dt = x \ln x - \int_1^x dt$$

$$\text{و منه } F(x) = x \ln x - [t]_1^x = x \ln x - (x - 1) = x \ln x - x + 1$$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $F(x) = x \ln x - x + 1$

▼ ملاحظة:

الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$ هي الدوال $x \mapsto x \ln x - x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$

و بصفة عامة نثبت بإتباع نفس الطريقة أن الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+a)$ على المجال $]-a; +\infty[$ هي الدوال $x \mapsto (x+a) \ln(x+a) - x + c$ مع c عدد حقيقي ثابت.



أختبر معلوماتي

QCM

لكل الأسئلة التالية ، إجابة واحدة صحيحة، ما هي ؟

1. f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$ ، F هي دالة أصلية لدالة f على $]0; +\infty[$

(أ) $G: x \mapsto \frac{x^2 + x - 1}{(x + 11)} - x$	(ب) $G: x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)}$	(ج) $G(x) = \frac{2x - 1}{x - 2} + x$
---	--	---------------------------------------

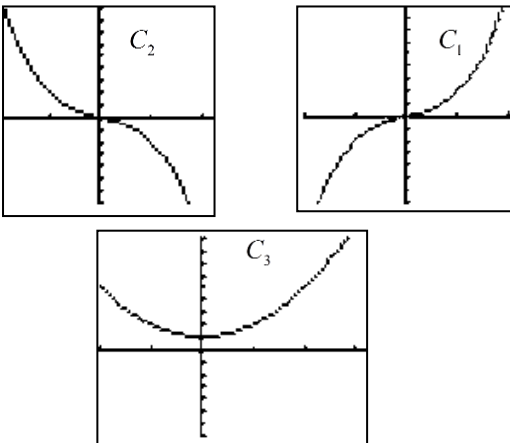
2. f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{(x + 1)^2}$ دالة أصلية F للدالة f على $]-1; +\infty[$ معرفة بـ:

(أ) $F(x) = \frac{x^3 + x + 1}{(x + 1)^2}$	(ب) $F(x) = \frac{-x + 1}{(x + 1)^2}$	(ج) $F(x) = \frac{x^3 - x + 1}{(x + 1)^2} - 1$
--	---------------------------------------	--

3. f دالة موجبة على مجال D و F دالتها الأصلية على هذا المجال، إذن:

(أ) F متزايدة تماما على D	(ب) F متناقصة تماما على D	(ج) F ليست رتيبة تماما على D
-------------------------------	-------------------------------	----------------------------------

4. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -1 - x^2$



أحد المنحنيات التالية C_1 ، C_2 و C_3 هو منحنى بياني لدالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

المنحنى (C) هو:

(أ) C_1	(ب) C_2	(ج) C_3
-----------	-----------	-----------

5. لتكن f دالة معرفة و مستمرة على مجال I يشمل الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx - \int_a^c (-f(x)) dx \quad (2)$	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (1)$
$\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx - \int_c^a f(x) dx \quad (4)$	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \quad (3)$

6. لتكن f دالة زوجية ، مستمرة و موجبة على $[-2;2]$:

$\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx \quad (2)$	$\int_{-2}^2 f(x) dx = 0 \quad (1)$
$\int_{-2}^2 f(x) dx = -2 \int_0^{-2} f(x) dx \quad (4)$	$\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^{-2} f(x) dx \quad (3)$

7. لتكن M القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a;b]$

$M = \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx \quad (2)$	$M = \int_a^b \frac{f(b)-f(a)}{b-a} dx \quad (1)$
$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (4)$	$M = \frac{1}{a-b} \int_a^b f(x) dx \quad (3)$

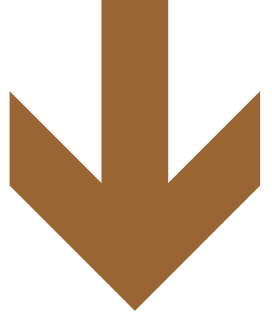
8. $\int_1^2 \frac{3}{x^4} dx = \dots$

$\frac{9}{8} \quad (3)$	$\frac{7}{8} \quad (2)$	$-\frac{9}{8} \quad (1)$
-------------------------	-------------------------	--------------------------

9. الدالة الأصلية للدالة $f : x \mapsto \frac{-x^3 + ex}{x^2}$ التي تنعدم من أجل $x = 1$.

$F(x) = \frac{-x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \quad (3)$	$F(x) = \frac{-x^2}{2} + e \ln x + \frac{1}{2} \quad (2)$	$F(x) = \frac{-x^2}{2} + e \ln x \quad (1)$
---	---	---

الاقتراح الصحيح	التعليق
1 (ج)	لأن: $F(x) - G(x) = k, k = -2$
2 (ج)	لأن: $F(x) = x^2 - x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^3 - x + 1}{(x+1)^2} - 1$
3 (أ)	إذا كانت الدالة المشتقة $(f'(x) > 0)$ موجبة فتكون الدالة متزايدة تماما .
4 (ب)	لأن نلاحظ أن: $f(x) = -1 - x^2 = -(1 + x^2) < 0$ و بالتالي الدالة F متناقصة تماما
5 3+1	علاقة شال
6 4+2	$\int_{-2}^2 f(x) dx = -2 \int_0^{-2} f(x) dx$ أو $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$
7 4+2	$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ أو $M = \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx$
8 2	$\int_1^2 \frac{3}{x^4} dx = \left[-3 \frac{1}{3x^3} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{x^3} \right]_1^2 = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$
9 2	$f: x \mapsto \frac{-x^3 + ex}{x^2}$ $f: x \mapsto -x + \frac{e}{x} \Rightarrow F(x) = -\frac{x^2}{2} + e \ln x + c, c \in \mathbb{R}$ $F(1) = 0 \rightarrow c = \frac{1}{2}$ $F(x) = \frac{-x^2}{2} + e \ln x + \frac{1}{2}$ إذن:



①

بين أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D في كل حالة من الحالات التالية:

$$D = \mathbb{R} , f : x \mapsto 2x - 3 , F : x \mapsto x^2 - 3x + 1. (1)$$

$$D = \mathbb{R} , f : x \mapsto 3x^2 - 12x + 9 , F : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x. (2)$$

$$f : x \mapsto \frac{-2}{(x-1)^2} , F : x \mapsto 2 + \frac{x+1}{x-1}. (3)$$



②

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ}$$

1. أعط دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. أعط كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

3. جد الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق: $F(1) = 2$.



③

$$F(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{1-x} \text{ و } f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{(1-x)^2} \text{ بـ }]1; +\infty[\text{ دالتان معرفتان على}$$

عين الأعداد الحقيقية a, b, c حتى تكون الدالة F أصلية للدالة f على $]1; +\infty[$ حيث $F(0) = 3$.



④

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 4}{(x-2)^2} \text{ دالة معرفة على }]2; +\infty[\text{ بـ}$$

1. عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 2$ $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$

2. استنتج دالة أصلية F للدالة f على $]2; +\infty[$ تحقق $F(3) = -1$.



⑤

جد الدوال الأصلية للدالة f على $]0; +\infty[$ للدوال التالية:

$$f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + x - 1 \quad (4) \quad f(x) = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4} \quad (2) \quad f(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = -3\sin x + 2\cos x + 1 \quad (7) \quad f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{3} \quad (6) \quad f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x} \quad (5)$$



⑥

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{6e^x}{e^{2x} - 1}$

1. عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{\alpha e^x}{e^x - 1} + \frac{\beta e^x}{e^x + 1}$

2. استخدم النتيجة السابقة لإيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.



⑦

أحسب التكاملات التالية:

$$\int_0^2 (1-x^2) dx \quad (4) \quad \int_{-5}^5 (4-x) dx \quad (3) \quad \int_{-2}^1 x^2 dx \quad (2) \quad \int_0^3 (2x+3) dx \quad (1)$$

$$\int_{*0}^1 (x^3 + 2x + 2) dx \quad (8) \quad \int_{-2}^2 -x^3 dx \quad (7) \quad \int_{-1}^0 (-3x^2 + 2x) dx \quad (6) \quad \int_1^2 (x^2 + x - 2) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 \frac{-2}{(x-2)^3} dx \quad (12) \quad \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3} dx \quad (11) \quad \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1-t^3+t^4}{t^2} \right) dt \quad (10) \quad \int_1^2 \left(\frac{x^2-2}{x^2} \right) dx \quad (9)$$



⑧

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^2}$ نرمز بـ (C) إلى التمثيل البياني للدالة f في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

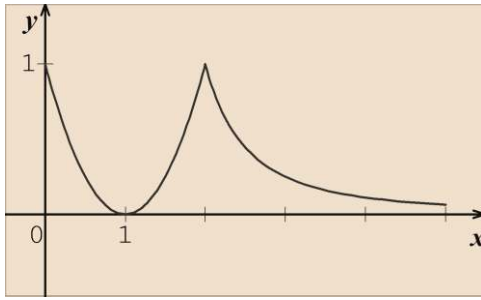
1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$

2. احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المحدد بالمنحنى (C)

و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما:

$x = \lambda$ و $x = 1$ حيث λ عدد حقيقي أكبر تماماً من 1.

(C) هو المنحني البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$ الممثل لدالة f



$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2; 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}; 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

أحسب المساحة تحت المنحني (C) بين 0 و 5 مقدرة بـ cm^2 .

(1) أدرس تغيرات الدالتين f ، g حيث

$$g(x) = -x^2 + 2x + 8, f(x) = x^2 + 2x + 3$$

(2) أرسم (C_g) و (C_f)

(3) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنيين (C_g) و (C_f) والمستقيمتين $(x = -)$ و $(x = 1)$

$$\text{أحسب التكامل التالي: } \int_0^3 |x^2 - 1| dx$$

$$\text{نعتبر التكاملين: } A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \text{ و } B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$$

أحسب $A + B$ و $A - B$ ثم استنتج A و B .

$$\text{نعتبر التكامل } I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$1. \text{ بين أنه من أجل كل } t \text{ من } [0; 1], \frac{1}{t^2 + 1} \leq 1$$

2. استنتج حصرا للعدد I .

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ بـ $f(x) = x^2$

1. أرسم التمثيل البياني (C) للدالة f في معلم متعامد و متجانس ثم أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;1]$.
2. فسر بيانها النتيجة.

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x) = 1 + \ln(x+1)$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;e-1]$.
2. استنتج حصرا لـ $f(x)$.

$$3. \text{ استنتج حصرا للعدد الحقيقي } I = \int_1^{e-1} f(x) dx$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بـ $f(x) = \frac{1}{2} + \cos x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$.
2. أرسم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد و متجانس.
3. أحسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=\pi$ و $y=0$

$$\text{باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب: } I = \int_0^1 (x-1)e^x dx \quad \text{و} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x dx$$

برهن أن حجم كرة نصف قطرها R هو: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^x \cos x$

1. احسب $f'(x)$ و $f''(x)$
2. جد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = af''(x) + bf'(x)$
3. استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.



1. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

1. بين أن f زوجية ثم ادرس تغيراتها.

2. بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = 1 + \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2}$

3. عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

II. لتكن الدالة g المعرفة على $D = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بـ: $g(x) = x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$

$\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. بين أن g فردية ثم ادرس تغيراتها.

2. بين أن المنحني $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.

3. ارسم المنحني $\mathcal{C}$.

4. احسب مشتقة الدالة h المعرفة من أجل كل $x \neq -a$ حيث $h(x) = (x+a) \ln |x+a| - x$ ، a عدد حقيقي.

5. استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $[2; +\infty[$.



✓ حل تمرين 1:

اثبات أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D في كل حالة من الحالات التالية:

$$(1). F : x \mapsto x^2 - 3x + 1,$$

$$F'(x) = 2x - 3 \text{ حيث: } D \text{ المجال}$$

$$\text{وبالتالي: } F'(x) = f(x).$$

$$(2). F : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x,$$

$$F'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \text{ حيث: } D \text{ المجال}$$

$$\text{وبالتالي: } F'(x) = f(x).$$

$$D = \mathbb{R}, f : x \mapsto 3x^2 - 12x + 9$$

$$(3). F : x \mapsto 2 + \frac{x+1}{x-1},$$

$$F'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \text{ حيث: } D \text{ المجال}$$

$$\text{وبالتالي: } F'(x) = f(x) \quad f : x \mapsto \frac{-2}{(x-1)^2}$$

✓ حل تمرين 2:

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ: } f(x) = 2x + \frac{1}{2}$$

$$1. \text{ الدوال الأصلية للدالة } f \text{ على } \mathbb{R}. \quad F(x) = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}x + c, c \in \mathbb{R} \quad \text{أي: } F(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + c$$

$$2. \text{ إيجاد الدالة الأصلية } F \text{ للدالة } f \text{ والتي تحقق: } F(1) = 2.$$

هدف هذا السؤال هو إيجاد قيمة c .

$$F(1) = 2 \quad \text{وبالتالي: } F(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad 1 + \frac{1}{2} + c = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

✓ حل تمرين 3:

$$F \text{ و } f \text{ دالتان معرفتان على }]1; +\infty[\text{ بـ } f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{(1-x)^2} \text{ و } F(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{1-x}$$

تعين الأعداد الحقيقية a, b, c حتى تكون الدالة F أصلية للدالة f على $]1; +\infty[$ حيث $F(0) = 3$.

F دالة أصلية للدالة f معناه: من أجل كل x عدد حقيقي من $]1; +\infty[$: $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = \frac{-ax^2 + 2ax + b + c}{(1-x)^2} \quad \text{نشتق الدالة } F \text{ بدلالة } c, b, a \text{ نجد:}$$

$$\begin{cases} -a = -1 \\ 2a = 2 \\ b + c = 2 \\ F(0) = 3 \Rightarrow c = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ \text{بالمطابقة مع الدالة } f \text{ نجد: } b = -1 \end{matrix}$$

$$\text{وبالتالي: } F(x) = \frac{x^2 - x + 3}{1-x}$$

✓ حل تمرين 4:

$$f \text{ دالة معرفة على }]2; +\infty[\text{ بـ } f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 4}{(x-2)^2}$$

1. عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 2$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$

$$\begin{matrix} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{matrix} \quad \text{بالمطابقة نجد: أي: } f(x) = x - 2 - \frac{3}{(x-2)^2}$$

ونستنتج أن: $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{x-2} + c$ حيث: c عدد حقيقي.

$$F(3) = -1$$

$$\frac{9}{2} - 6 + 3 + c = -1$$

2. استنتاج دالة أصلية F للدالة f على $]2; +\infty[$ تحقق $\frac{3}{2} + c = -1$ ومنه: $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{x-2} - \frac{5}{2}$

$$c = \frac{-5}{2}$$

✓ حل تمرين 5:

أيجاد الدوال الأصلية للدالة f على $]0; +\infty[$ للدوال التالية:

$f(x) = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} \quad (3)$ دالتها الأصلية هي: $F(x) = x - \frac{1}{2x^2} - 2\frac{1}{3x^3} + c$ $= x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^3}\right) + c,$ $c \in \mathbb{R}$	$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4} \quad (2)$ دالتها الأصلية هي: أولا علينا تبسط كتابة دستور الدالة f يعني: $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ ومنه: $F(x) = \frac{-1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + c,$ $c \in \mathbb{R}$	$f(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \quad (1)$ دالتها الأصلية هي: $F(x) = 2x + \frac{1}{x} + c$ $c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{3} \quad (6)$ أولا علينا تبسط كتابة دستور الدالة f $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x^2 - 2)$ دالتها الأصلية هي: $F(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x\right) + c, c \in \mathbb{R}$	$f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x} \quad (5)$ دالتها الأصلية هي: $F(x) = -e^{-x} + 2\ln(x) + c$ $= -e^{-x} + \ln(x^2) + c, c \in \mathbb{R}$	$f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + x - 1 \quad (4)$ $F(x) = 3\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} - x + c$ $c \in \mathbb{R}$
$f(x) = -3\sin x + 2\cos x + 1 \quad (7)$ دالتها الأصلية هي: $F(x) = 3\cos x + 2\sin x + x + c$ $, c \in \mathbb{R}$		

✓ حل تمرين 6:

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{6e^x}{e^{2x} - 1}$

1. تعين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{\alpha e^x}{e^x - 1} + \frac{\beta e^x}{e^x + 1}$.

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -3, \beta = 3$ وبالتالي: $f(x) = \frac{-3e^x}{e^x - 1} + \frac{3e^x}{e^x + 1}$

2. استخدم النتيجة السابقة لإيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

نلاحظ أن الدالة f مكتوبة من الشكل: $f(x) = \frac{ag'(x)}{g(x)} + b \frac{h'(x)}{h(x)}$

اذن دالتها الأصلية تكتب من الشكل: $F(x) = -3\ln(e^x - 1) + 3\ln(e^x + 1) + c$ يمكن استعمال خواص الدالة اللوغاريتمية لتبسيطها أكثر.

✓ حل تمرين 7:

أحسب التكاملات التالية:

$\int_0^2 (1-x^2) dx \quad (4)$ $= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 - \frac{8}{3}$ $= \frac{-2}{3}$	$\int_{-5}^5 (4-x) dx \quad (3)$ $= \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_{-5}^5$ $= \left(20 - \frac{25}{2} \right) - \left(-20 - \frac{25}{2} \right)$ $= 40$	$\int_{-2}^1 x^2 dx \quad (2)$ $= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{3} - \frac{-8}{3}$ $= 3$	$\int_0^3 (2x+3) dx \quad (1)$ $= \left[x^2 + 3x \right]_0^3$ $= 18$
$\int_0^1 (x^3 + 2x + 2) dx \quad (8)$ $= \left[\frac{x^4}{4} + x^2 + 2x \right]_0^1$ $= \frac{1}{4} + 1 + 2$ $= \frac{13}{4}$	$\int_{-2}^2 -x^3 dx \quad (7)$ $= \left[-\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^2$ $= 0$	$\int_{-1}^0 (-3x^2 + 2x) dx \quad (6)$ $= \left[-x^3 + x^2 \right]_{-1}^0$ $= 1 + 1$ $= 2$	$\int_1^2 (x^2 + x - 2) dx \quad (5)$ $= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2$ $= \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right)$ $= \frac{-1}{2}$
$\int_0^1 \frac{-2}{(x-2)^3} dx \quad (12)$ $= \left[-\frac{(-2)}{2(x-2)^2} \right]_0^1$ $= \left[\frac{1}{(x-2)^2} \right]_0^1$ $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3} dx \quad (11)$ $= \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} \right]_0^1$ $= \frac{-1}{8} + \frac{1}{2}$ $= \frac{3}{4}$	$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1-t^3+t^4}{t^2} \right) dt \quad (10)$ $= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^2} - t + t^2 dt$ $= \left[-\frac{1}{t} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_{-2}^{-1}$ $= \frac{13}{3}$	$\int_1^2 \left(\frac{x^2-2}{x^2} \right) dx \quad (9)$ $= \int_1^2 1 - \frac{2}{x^2} dx$ $= \left[x - \frac{2}{x} \right]_1^2$ $= 2$

✓ حل تمرين 8:

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2} = 2x + 3 + \frac{4}{x^2}$$

إذن: $(a; b; c) = (2; 3; 4)$

2. حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$S(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda \left(2x + 3 + \frac{4}{x^2} \right) dx$$

• يمكن كتابة $f(x)$ بعد توحيد

المقامات على الشكل :

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^2} \text{ ثم نساوي}$$

هذه العبارة مع العبارة

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^2}$$

• لحساب المساحة نطبق خواص التكامل.

$$\int_a^b bf(x)dx = F(b) - F(a) \quad \bullet$$

حيث F دالة أصلية للدالة f

• المعادلة $x^2 = \alpha$ حيث $\alpha > 0$ تقبل حليها متناظريه $-\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\alpha}$

$$= \left[x^2 + 3x - \frac{4}{x} \right]_1^\lambda$$

$$= \left[\lambda^2 + 3\lambda - \frac{4}{\lambda} \right] - \left[1^2 + 3 - \frac{4}{1} \right]$$

$$= \left(\lambda^2 + 3\lambda - \frac{4}{\lambda} \right) u.a$$

• تعيين λ حتى يكون $S(\lambda) = \lambda^2$

$$\lambda^2 + 3\lambda - \frac{4}{\lambda} = \lambda^2 \text{ معناه } S(\lambda) = \lambda^2$$

$$3\lambda = \frac{4}{\lambda} \text{ أي}$$

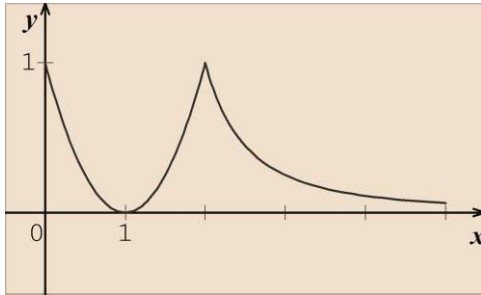
$$\lambda^2 = \frac{4}{3} \text{ أي}$$

$$\text{و بالتالي } \left(\lambda = -\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \text{ أو } \left(\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

إذن: $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}}$ لأن λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1

✓ حل تمرين 9:

(C) هو المنحنى البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 1cm$ الممثل لدالة f



$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2; 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}; 2 \leq x \leq 5 \end{cases} \text{ معرفة على } [0; 5] \text{ حيث:}$$

حساب المساحة تحت المنحنى (C) بين 0 و 5 مقدرة بـ cm^2 .

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx$$

$$= \int_0^2 (x-1)^2 dx + \int_2^5 \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$= \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{x-1} \right]_2^5$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12}$$

$$= \frac{17}{12} cm^2$$

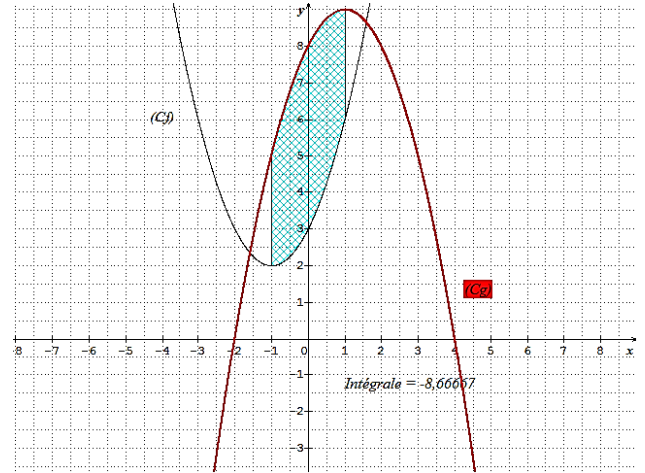
✓ حل تمرين 10:

(1) أدرس تغيرات الدالتين f ، g حيث

$$g(x) = -x^2 + 2x + 8 , f(x) = x^2 + 2x + 3$$

هدف هذا السؤال هو الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) . على المجال $[-1;1]$.

(2) رسم (C_f) و (C_g) .



(3) حساب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنين (C_f) و (C_g) والمستقيمتين التي معادلتها $(x = -1)$ و $(x = 1)$.

نلاحظ أن : أن المنحنى (C_g) يقع فوق المنحنى (C_f) على $[-1;1]$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 g(x) - f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 -x^2 + 2x + 8 - x^2 - 2x - 3 dx \\ &= \int_{-1}^1 -2x^2 + 5 dx \quad \text{و بالتالي:} \\ &= \left[-2 \frac{x^3}{3} + 5x \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{26}{3} ua \end{aligned}$$

✓ حل تمرين 11:

$$\text{حساب التكامل التالي: } \int_0^3 |x^2 - 1| dx$$

طريقة: نكتب، حسب قيم x ، عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة لنتمكن من تعيين دوال أصلية للدالة f .

$x^2 - 1$ كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه -1 ، 1 و بالتالي:

- من أجل كل x من $[0;1]$ ، إذن $x^2 - 1 \leq 0$ ، $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$.
- من أجل كل x من $[1;3]$ ، إذن $x^2 - 1 \geq 0$ ، $|x^2 - 1| = x^2 - 1$.

باستعمال علاقة شال يكون لدينا: $\int_0^3 |x^2 - 1| dx = \int_0^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^3 |x^2 - 1| dx = \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx$

$$\int_0^3 |x^2 - 1| dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^3 = \left[\left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - 0 \right] + \left[\left(\frac{27}{3} - 3 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right] = \frac{22}{3} \text{ ومنه}$$

✓ حل تمرين 12:

$$\text{نعتبر التكاملين: } A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \text{ و } B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$$

حساب $A + B$ و $A - B$ ثم استنتج A و B .

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$A - B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{لدينا } A + B = \frac{\pi}{4} \text{ و } A - B = \frac{1}{2} \text{ . بعد حل هذه الجملة نجد } A = \frac{\pi + 2}{8} \text{ و } B = \frac{\pi - 2}{8} .$$

✓ حل تمرين 13:

$$\text{نعتبر التكامل } I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$1. \text{ اثبات أنه من أجل كل } t \text{ من } [0;1] , \frac{1}{t^2 + 1} \leq 1 .$$

$$\text{من أجل كل } t \text{ من } [0;1] , 1 + t^2 \geq 1 \text{ ومنه من أجل كل } t \text{ من } [0;1] , \frac{1}{1 + t^2} \leq 1 .$$

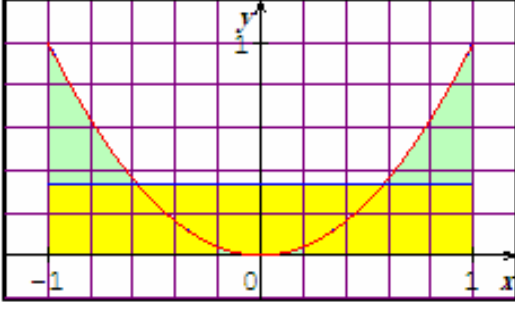
$$2. \text{ استنتج حصرا للعدد } I .$$

$$\text{بما أن } 0 < 1 \text{ و بتطبيق خاصية المحافظة على الترتيب نستنتج أن } \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt \leq \int_0^1 1 dt$$

$$\text{و بما أن } \int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = 1 \text{ فإن } \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt \leq 1 . \text{ من الواضح كذلك أنه من أجل كل } t \text{ من } [0;1] , \frac{1}{1 + t^2} > 0 ,$$

$$\text{ومنه } 0 < I \leq 1 . \text{ نستنتج هكذا الحصر التالي: } 0 < I \leq 1 .$$

✓ حل تمرين 14:



$$1. \mu = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} [x^3]_{-1}^1 = \frac{1}{3}.$$

2. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيمت

التي معادلاتها $x = -1$ ، $x = 1$ و $y = 0$ تساوي مساحة المستطيل

$$ABCD \text{ الذي بعده } 2 \text{ و } \frac{1}{3} \text{ علما أن } A(1;0), B(1;\frac{1}{3}), C(-1;\frac{1}{3}), D(-1;0).$$

✓ حل تمرين 15:

1. لدينا من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$ ، إذن f متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$ ومنه على

المجال $[0; e-1]$.

2. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0; e-1]$ ، $f(0) \leq f(x) \leq f(e-1)$ أي $1 \leq f(x) \leq 2$.

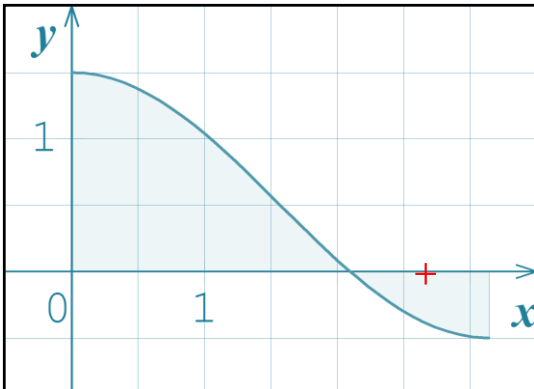
3. بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2) \leq \int_1^{e-1} f(x) dx \leq 2(e-2)$.

✓ حل تمرين 16:

1. للدالة f نفس اتجاه تغير الدالة $\cos x$ فهي إذن متناقصة تماما على المجال $[0; \pi]$.

لدينا $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(\pi) = -\frac{1}{2}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة تقبل المعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا في $[0; \pi]$

$f(x) = 0$ تعني $x = \frac{2\pi}{3}$. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0; \frac{2\pi}{3}]$ ، $f(x) \geq 0$.



و من أجل كل x من $[\frac{2\pi}{3}; \pi]$ ، $f(x) \leq 0$.

2. أنظر الشكل المقابل.

3. لدينا $A = A_1 + A_2$ حيث $A_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x) dx$

$$A_2 = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} -f(x) dx \text{ و } -\pi$$

$$A_1 = -\left[\frac{1}{2}x + \sin x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}u.a \text{ و } A_1 = \left[\frac{1}{2}x + \sin x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}u.a$$

$$.A = \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)u.a \text{ ومنه}$$

✓ حل تمرين 17:

طريقة: لاستعمال المكاملة بالتجزئة نكتب f على الشكل $u \times v'$.

$$1. \text{ نضع } v(x) = e^x, \quad u'(x) = 1 \text{ ومنه } v'(x) = e^x, \quad u(x) = x - 1$$

$$I = \left[(x-1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \text{ بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:}$$

$$\text{ومنه } I = -e \text{ إذن } I = 1 - [e^x]_0^1 = 1 - (e - 1) = -e$$

ملاحظة: كان بالإمكان وضع $v(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$, $u(x) = e^x$ ومن ثم $v'(x) = x - 1$, $u'(x) = e^x$

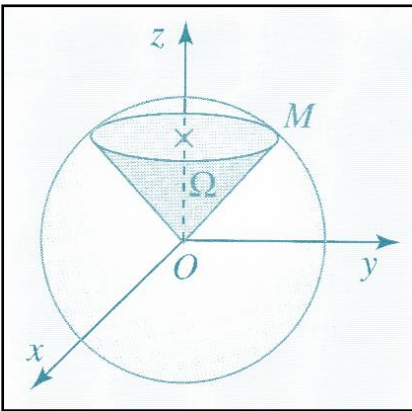
إلا أننا بعد التعويض نحصل على تكامل أكثر تعقيدا من الأول.

$$2. \text{ نضع } v(x) = -\cos x, \quad u'(x) = 1 \text{ ومنه } v'(x) = \sin x, \quad u(x) = x$$

$$J = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\cos x dx \text{ بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:}$$

$$\text{ومنه } J = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ إذن } J = -\frac{\pi}{6} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

✓ حل تمرين 18:



نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J, K)$ محاوره

$$(x'x), (y'y), (z'z) \text{ الكرة التي مركزها } O \text{ و نصف قطرها } R.$$

مقطع هذه الكرة بمستوى مواز للمستوي (xOy) و راقمه z حيث $-R < z < R$

هي دائرة مركزها $\Omega(0;0;z)$ و نصف قطرها $r = \Omega M$ مع $OM = R$.

لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2 = R^2 - z^2$ و منه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره R هي:

$$S(z) = \pi(R^2 - z^2) \text{ الحجم هو إذن: } V = \int_{-R}^R S(z) dz = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz \text{ و بالتالي:}$$

$$.V = \frac{4}{3} \pi R^3 u.v \text{ و منه } V = \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{-R}^R = \pi \left[\left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) - \left(-R^3 + \frac{1}{3} R^3 \right) \right]$$

✓ حل تمرين 19:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^x \cos x$

$$1. \text{ احسب } f'(x), \text{ الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} : \\ f'(x) = e^x \cos x + e^x \sin x \\ = e^x (\cos x + e \sin x)$$

$$\text{و } f''(x), \text{ الدالة } f' \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} : \\ f''(x) = e^x (\cos x + \sin x) + e^x (-\sin x + \cos x) \\ f''(x) = 2e^x \cos x$$

2. ايجاد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = af''(x) + bf'(x)$ ،

$$af''(x) + bf'(x) = 2ae^x \cos x + be^x \cos x + be^x \sin x \\ = (2a+b)e^x \cos x + be^x \sin x$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{اذن: } f(x) = \frac{1}{2} f''(x)$$

3. استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

$$\text{لدينا: } f(x) = \frac{1}{2} f''(x) \text{ و منه:}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} f'(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} (e^x (\cos x + e \sin x)) + c, c \in \mathbb{R}$$

✓ حل تمرين 20:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ ، $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$$\text{و } f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x) \text{ و منه } f \text{ دالة زوجية}$$

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} - \{-2; 2\} : f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

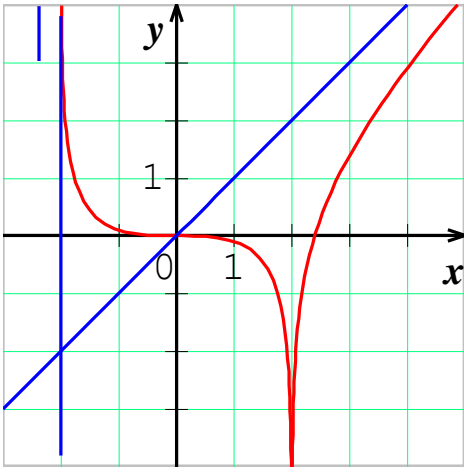
إذن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $[0; 2[$ و $]2; +\infty[$ و متزايدة على المجالين $]-\infty; -2[$ و $] -2; 0[$

$$2. f(x) = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$3. \text{ مجموعة الدوال الأصلية للدالة } f \text{ هي: } F(x) = x + \ln |x-2| - \ln |x+2| = x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + k \text{ ، } k \text{ ثابت حقيقي}$$

1. $g'(x) = f(x)$ ، إذن $g'(x)$ تنعدم عند 0 ، تكون موجبة على $]-\infty; -2[$ و $]2; +\infty[$ و سالبة على $] -2; 0[$ و $]0; 2[$.

$$2. \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$$



إذن المنحني $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته

$$y = x \text{ عند } -\infty \text{ و عند } +\infty$$

$$h'(x) = \ln |x + a| .4$$

$$g(x) = x + \ln |x - 2| - \ln |x + 2|$$

فتكون دالة أصلية للدالة g على $]2; +\infty[$

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + (x-2)\ln |x-2| - (x+2)\ln |x+2| \text{ هي:}$$

بكالوريا جوان 2008 / شعبة علوم تجريبية / الموضوع الأول

$$1.4- \text{أكتب } f(x) \text{ على الشكل : } f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$$

حيث a و b عدنان حقيقيان .

ب-عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = 2$.

الحل:

بتوحيد المقامات و المطابقة مع العبارة الأولى للدالة f

$$\text{نجد: } a = b = 1 \text{ أي: } f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

ب- تعين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$:

$$c \in \mathbb{R} , F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + c$$

لدينا F تحقق: $F(1) = 2$.

$$\text{اذن: } c = 1 \text{ ومنه: } F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + 1 \text{ هي دالة الأصلية للدالة } f.$$

بكالوريا جوان 2009 / شعبة تسيير واقتصاد / الموضوع الأول / التمرين 4

$$\text{الدالة العددية } f \text{ معرفة على المجال } \mathbb{R} - \{-1\} \text{ كما يلي: } f(x) = \frac{x^2 + 3}{x+1} \text{ , يرمز } (C_f) \text{ تمثيلها البياني في المستوى}$$

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 1$ و $x = e^2 - 1$.

الحل:

حساب المساحة:

$$S = 4(\ln e^2 - \ln 2)ua = (8 - 4\ln 2)ua \text{ ومنه: } S = \int_1^{e^2-1} [f(x) - (x-1)]dx = \int_1^{e^2-1} \frac{4}{x+1}dx = [4\ln(x+1)]_1^{e^2-1} ua.$$

بكالوريا جوان 2010 / شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الأول

$$f \text{ دالة عددية معرفة على } \mathbb{R}^* \text{ كما يلي: } f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$$

عين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق : $F(2) = -10$.

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=2$.

الحل:

تعين الدالة الأصلية F للدالة f :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - 4\frac{1}{x} + c \text{ ، حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

لدينا F تحقق : $F(2) = -10$ معناه: $c = 0$

$$\text{اذن: } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - 4\frac{1}{x}$$

ب-المساحة:

لذكير: * اذا كانت f الدالة سالبة على المجال $[a; b]$ و S المساحة المحددة بالمنحنى (C_f) و المستقيمان : $x=a$ ، $x=b$ و

$$y=0 \text{ فان: } S = \int_a^b -f(x)dx$$

$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx \quad *$$

$$S = \int_1^2 -f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx$$

$$\text{ومنه: } S = F(1) - F(2) \text{ و بالتالي: } S = \frac{3}{2}ua$$

بكالوريا جوان 2011 / شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الثاني

$$\text{احسب التكامل: } \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

ب- احسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى و محور الفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x=0$ و $x=1$.

الحل:

حساب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{ب-المساحة: } S = 4 \cdot \int_0^1 f(x)dx = 4cm^2 \times \left(\int_0^1 1 - \frac{x}{x^2+1} dx \right) cm^2$$

$$\text{ومنه: } S = 4 \times \left(1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right) cm^2 \text{ أي: } S = (4 - 2 \ln 2) cm^2$$

نرمز بـ S الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = \alpha$ ، $x = 0$ و $y = 0$.

أثبت أن من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$ ، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$

ثم بين ان $\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$.

الحل:

مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = \alpha$ ، $x = 0$ و $y = 0$ وبما أن الدالة سالبة على المجال $\alpha \leq x \leq 0$ اذن

$$-\int_{\alpha}^0 f(\alpha)dx \leq -\int_{\alpha}^0 f(x)dx \leq -\int_{\alpha}^0 -3dx$$

$$\text{أي: } -\int_{\alpha}^0 \frac{3}{2}\alpha dx \leq -\int_{\alpha}^0 f(x)dx \leq -\int_{\alpha}^0 -3dx$$

$$\text{ومنه: } -\int_{\alpha}^0 \frac{3}{2}\alpha dx \leq -\int_{\alpha}^0 f(x)dx \leq -\int_{\alpha}^0 -3dx$$

$$-\left[\frac{3}{2}\alpha x\right]_{\alpha}^0 \leq S \leq -[-3x]_{\alpha}^0$$

$$\text{ومنه: } \frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$$

ب- α عدد حقيقي .

بين أن الدالة $x \mapsto (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x - \alpha)$ على المجال $]1; +\infty[$.

ج- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ثم عين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

الحل:

ب- الدالة $x \mapsto (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$ تقبل الاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ كونه

عبارة عن مجموع ومركب وجاء دوال قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ ، كما أن

$$x \mapsto 1 \times \ln(x - \alpha) + \cancel{(x - \alpha)} \times \frac{1}{\cancel{(x - \alpha)}} - 1$$

أي الدالة: $x \mapsto \ln(x - \alpha)$

ومنه الدالة $x \mapsto (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x - \alpha)$ على المجال $]1; +\infty[$.

جـ- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$:

$$1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} = g(x)$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$:

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

وبالتالي الدالة F حيث :

$$F(x) = x - 2\ln(x-1) + [(x-1)\ln(x-1) - x] - [(x+1)\ln(x+1) - x]$$

$$F(x) = x + [(x-1)\ln(x-1)] - [(x+3)\ln(x+1) - x] \text{ أي:}$$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

بكالوريا جوان 2012 / شعبة علوم تجريبية / الموضوع الأول

لتكن g الدالة المعرفة على $]0; -\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$$

بين g دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; -\infty[$.

الحل:

الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]0; -\infty[$ لأنها عبارة عن مجموع و جداء ومركب دوال

قابلة للاشتقاق على المجال $]0; -\infty[$.

لدينا من أجل كل x من المجال $]0; -\infty[$:

$$g'(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6x \times \frac{(-1)}{x(x-1)} + 6 \times \frac{(-1)}{1-x}$$

$$= x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{-6}{1-x} + \frac{-6}{1-x}$$

$$= x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{-6}{x-1} + \frac{6}{x-1}$$

$$= x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= f(x)$$

ومنه g دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; -\infty[$.

بكالوريا جوان 2012 / شعبة علوم تجريبية / الموضوع الثاني

لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = (ax+b)e^x$.

أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

الحل:

$$h(x) = (ax + b)e^x$$

أ- h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$ معناه: من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$h'(x) = xe^x$$

$$h'(x) = xe^x \text{ تكافئ } ae^x + (ax + b)e^x = xe^x \text{ أي } ae^x + a + b = xe^x$$

بالمطابقة نجد: $a = 1$ و $a + b = 0$ ، ومنه: $b = -1$

$$\text{إذن: } h(x) = (x - 1)e^x$$

ب- لدينا: $g(x) = 1 - xe^x$ ، ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ معرفة بـ:

$$G(x) = x - h(x) \text{ إذن: } G(x) = x - (x - 1)e^x$$

$$I = \int \frac{x}{x+1} dx \text{ احسب التكامل}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int 1 - \frac{1}{x+1} dx = x - \ln(x+1) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

مغزى هذا التكامل هو سحر الرياضيات عندما أضفت 1 طرحته لم أغير

شيئ لكنني بسطت شكل العبارة أكثر.

بالتوفيق للجميع

أستاذ الهادة: شعبان أسامة

تجدون هذا الملف على صفحتي الشخصية: 5min Maths



اصدارات سابقة

