حلول تمارين

الدوال الأسية

لشعبة علوم تجريبية

✍إعداد : خالد بخاخشة

أكتوبر 2019

التمارين

التمرين 1 باك 2008 م 1 ن 7,5

I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1\,cm$.
عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.
(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا . (نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)
2) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .
3) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .
4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.
5) أرسم (C_g) .
6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان
- عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0 .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$
باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغيّر الدالة k ثم شكل جدول تغيّراتها .

التمرين 2 باك 2010 م 2 ن 7

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$
نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
ب ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$ و فسر هندسيا النتيجة.
2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيّراتها .
3) أ ـ بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=x+1$.
ب ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').
4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
5) أ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.
ب ـ هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟
جـ ـ أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .
د ـ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

التمرين 3 باك 2011 م 2 7 ن

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x}-ex-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ ـ أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

جـ ـ شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

2) أ ـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $(-\infty)$.

بـ ـ أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

جـ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$، تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α.

د ـ أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحني (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

3) أ ـ أحسب بدلالة α، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C_f)، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$.

بـ ـ أثبت أن: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^{2}-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات)

التمرين 4 باك 2012 م 2 7 ن

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ ـ بيّن أن المعادلة $g(x)=0$، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$

بـ تحقق أن $0.5<\alpha<0.6$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x)=-g(x)$،

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

4) أ ـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

بـ ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) أ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

بـ ـ أنشئ (Δ) و (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^{x}$

أ ـ عيّن العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

بـ ـ إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين 5 باك 2013 م 1 (6,5 ن)

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .

2) أحسب $f'(x)$. بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α .

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثمّ أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ- تحقق أن $g\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أن: $g'\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب- إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{\alpha+1}{2}$.

جـ- تحقق من أن : $y=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}x-\dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

التمرين 6 باك 2015 م 2 (6 ن)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0,36<\alpha<0,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب- إستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha)\approx0,1$.

6) أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب- إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين 7 باك 2016- الدورة الأولى - م2 - 7ن

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$، أحدهما معدوم و الآخر α حيث: $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=-g(x)$.

جـ- شكّل جدول تغيرّات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.38$)

د- عيّن دون حساب: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

جـ- بيّن أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

د- أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

هـ- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة: $(m-x)e^{x}+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$.

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ- أحسب التكامل التالي: $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)dx$، حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسّر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

التمرين 8 باك 2016- الدورة الثانية - م2 - 6ن

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^{x}-x^2-x$.

1) أ- أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب- بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

جـ- أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و عند $-\infty$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقية x.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2e^{x}}{e^{x}-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{xe^{x}g(x)}{(e^{x}-x)^2}$ (حيث f' هي مشتق الدالة f).

جـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أـ بيّن أن: $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

بـ أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha)\approx 0,29$)

التمرين 9 باك 2017- الدورة العادية - م2 7ن

I) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$ و أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة، ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

2) أـ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$

بـ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)\geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T).

2) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

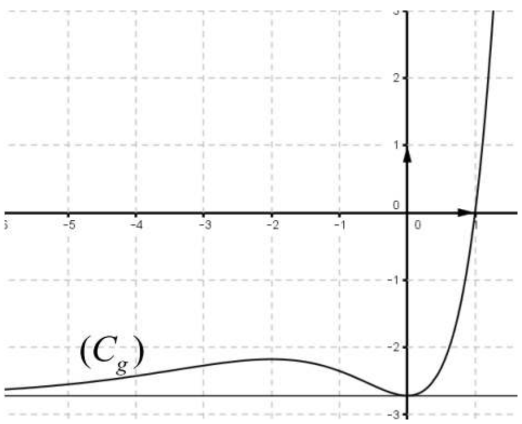
4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}$.

- تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

التمرين 10 باك 2017- الدورة الإستثنائية - م1 7ن

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^x-e$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل)



- أحسب $g(1)$.
- بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات الآتية: $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ ، $\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

2) بيّن أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y=e^{-x}-2$ و المنحنى (C_f) متقاربان بجوار، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) .

3) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$.

4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها .

5) بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$ ، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم .

6) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

أحسب العدد الحقيقي l حيث: $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)$.

التمرين 11 باك 2018 م1 ن7

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) حيث : $(\Delta): y=2x+1$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\approx 0,8$).

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x=(1-m)e^{x}$

6) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

ب- أحسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

التمرين 12 باك 2019 م1 ن7

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x)=e^{x}-ex \quad \text{و} \quad f(x)=e^{x}-\frac{1}{2}ex^{2}.$$

1) أ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

ب- إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f .

3) أحسب كلا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5) أرسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يعطى $e^{2}-2e\approx 2$)

6) أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g).

7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^{2}-e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- بيّن أن الدالة h زوجية .

ب- من أجل $x\in[0;2]$ أحسب $h(x)+f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

حلول التمارين

حل مقترح للتمرين 1 باك 2008

I) f الدالة العددية المعرّفة على $[-2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

$A\in(C_f)$ معناه: $f(-1)=1$ أي: $(-a+b)e+1=1$ و منه: $a=b$.

معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$ معناه: $f'(-1)=-e$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[-2;+\infty[$ و: $f'(x)=ae^{-x}+(-e^{-x})(ax+b)=(-ax-b+a)e^{-x}$.

و منه $f'(-1)=(2a-b)e$. و مما سبق $f'(-1)=-e$.

بالمطابقة لدينا $2a-b=-1$ و $a=b$ و منه نجد: $a=b=-1$.

II) الدالة g معرفة على المجال $[-2;+\infty[$ بـ: $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)e^{-x}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x}-e^{-x}+1)=1$، لأن $\lim\limits_{u\to+\infty}(-xe^{-x})=\lim\limits_{u\to-\infty}ue^{u}=0$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

2) دراسة تغيرات الدالة g:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$، و $g'(x)=-e^{-x}+(-e^{-x})(-x-1)=xe^{-x}$.

- إتجاه تغيّر الدالة g:

إشارة $g'(x)$ من إشارة x.

و منه: من أجل $x\in[-2;0]$، يكون $g'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-2;0]$.

من أجل $x\in[0;+\infty[$، يكون $g'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g:

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e^2+1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

3) تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثييها.

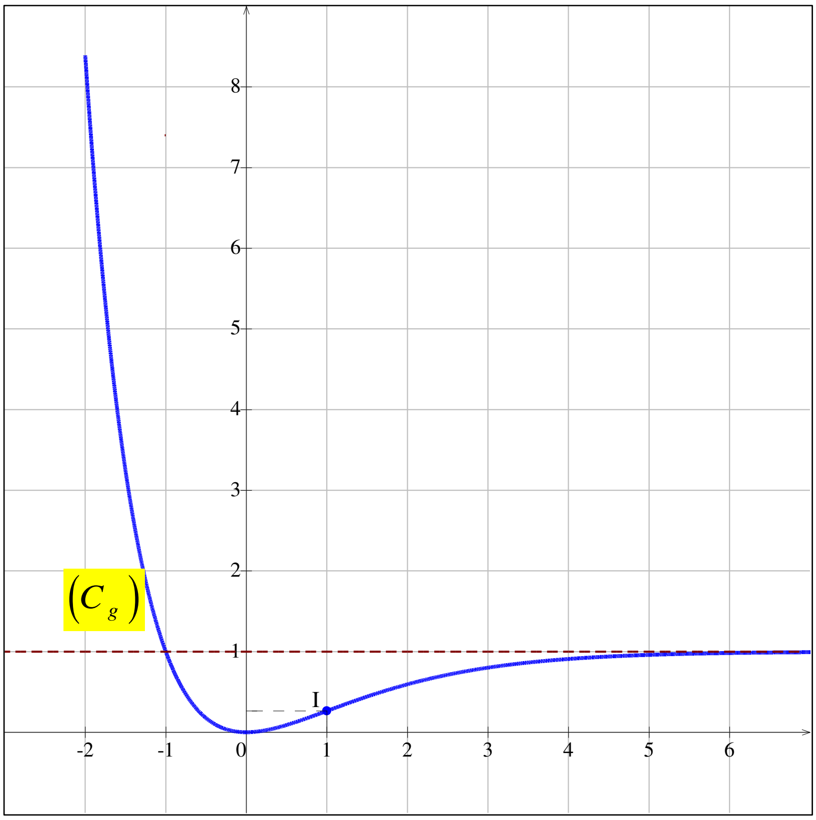
الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$، و $g''(x)=(1-x)e^{-x}$.

إشارة $g''(x)$ من إشارة $1-x$ و بالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيّرا إشارته، و منه $I\left(1;1-\dfrac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g).

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

لدينا: $(T): y=g'(1)(x-1)+g(1)$ و منه $(T): y=\dfrac{1}{e}x+1-\dfrac{3}{e}$.

5) الرسم :



6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

ـ تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$:

الدالة H قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ ، و $H'(x)=\alpha e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(\alpha x+\beta)=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}$.

H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$ معناه : $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$ و منه نجد : $\alpha=1$ و $\beta=2$.

لدينا: $g(x)=g(x)+1-1=H'(x)+1$ و منه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل : $G(x)=H(x)+x+c$

الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0 هي : $G(x)=(x+2)e^{-x}+x+2$.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g\left(x^2\right)$

الدالة k قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ،

و $k'(x)=2xg'\left(x^2\right)=2x\left(x^2e^{-x^2}\right)=2x^3e^{-x^2}$.

إتجاه تغيّر الدالة k :

إشارة $k'(x)$ من إشارة x .

و منه : من أجل $x\in[-2;0]$ ، يكون $k'(x)\leq 0$ و بالتالي الدالة k متناقصة على المجال $[-2;0]$.

من أجل $x\in[0;+\infty[$ ، يكون $k'(x)\geq 0$ و بالتالي الدالة k متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة k :

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$1-5e^{-4}$	↘	0	↗	1

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$

1) أ ـ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\frac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\frac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

ب ـ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left[x-\frac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left[x-\frac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=1-\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}=1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{e^x-1}\right]=0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{e^x-1}-1\right]=0$ و منه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=-\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

• دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') :

لدينا : $f(x)-y=-\frac{1}{e^x-1}-1=\frac{e^x}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

4) إثبات أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$ و $f(-x)+f(x)=-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^{-x}-1}=-\frac{1}{e^x-1}+\frac{e^x}{e^x-1}=1=2\times\frac{1}{2}$

و منه النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $]\ln 2;1[\subset]0;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1)\approx 0,41 \\ f(\ln 2)\approx -0,31 \end{cases}$ أي $f(1)\times f(\ln 2)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α ، حيث $\ln 2<\alpha<1$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-1,4;-1,3[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-1.3)\approx 0,07 \\ f(-1.4)\approx -0,07 \end{cases}$

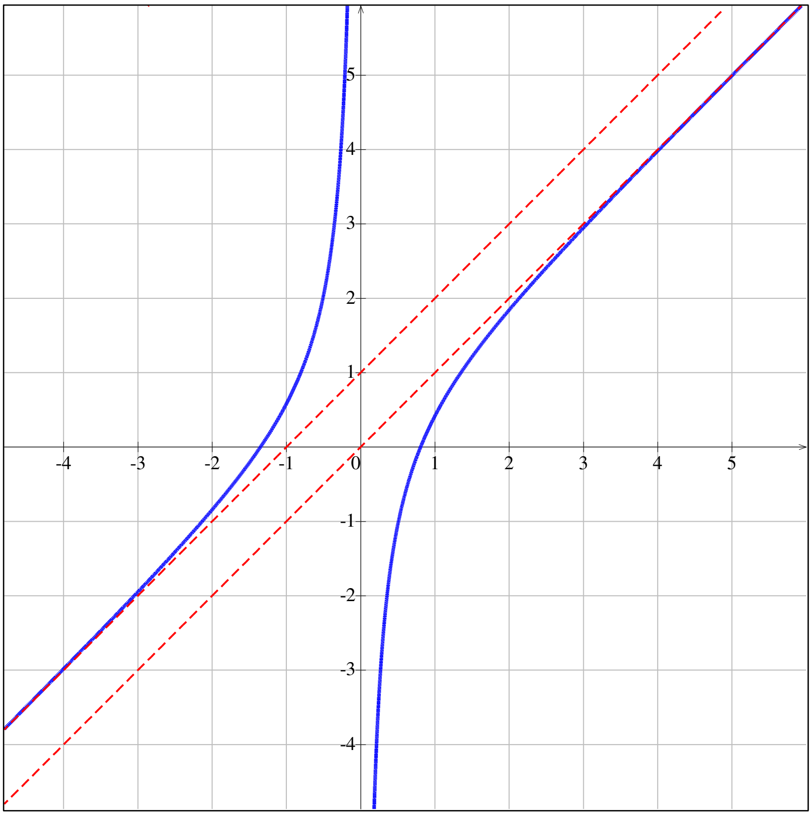
أي $f(-1,4)\times f(-1,3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حلا وحيدا β ، حيث $-1.4<\beta<-1.3$.

بـ- دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $f'(x)=1$.

لدينا : $f'(x)=1$ تكافئ $1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ تكافئ $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ أي $e^x=0$ و هذا مستحيل و بالتالي المعادلة ليس لها حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ).

جـ- الرسم :



د ـ المناقشة البيانية :

لدينا : $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m-1=me^{x}$ تكافئ $m=-\frac{1}{e^{x}-1}$ تكافئ $m+x=x-\frac{1}{e^{x}-1}$

تكافئ $f(x)=x+m$ ، و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذا كان $m\in]-\infty;0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان $m\in[0;1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب .

حل مقترح للتمرين 3 باك 2011

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{x}-ex-1$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{x}-ex-1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{x}-ex-1)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^{x}}{x}-e-\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty$.

بـ ـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{x}-e$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^{x}-e=0$ تكافئ $e^{x}=e$ تكافئ $x=1$.

من أجل $x\in]-\infty;1]$ ، يكون $e^{x}\le e$ أي $f'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x\in[1;+\infty[$ ، يكون $e^{x}\ge e$ أي $f'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جـ ـ جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ ـ لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{x}-ex-1-(-ex-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

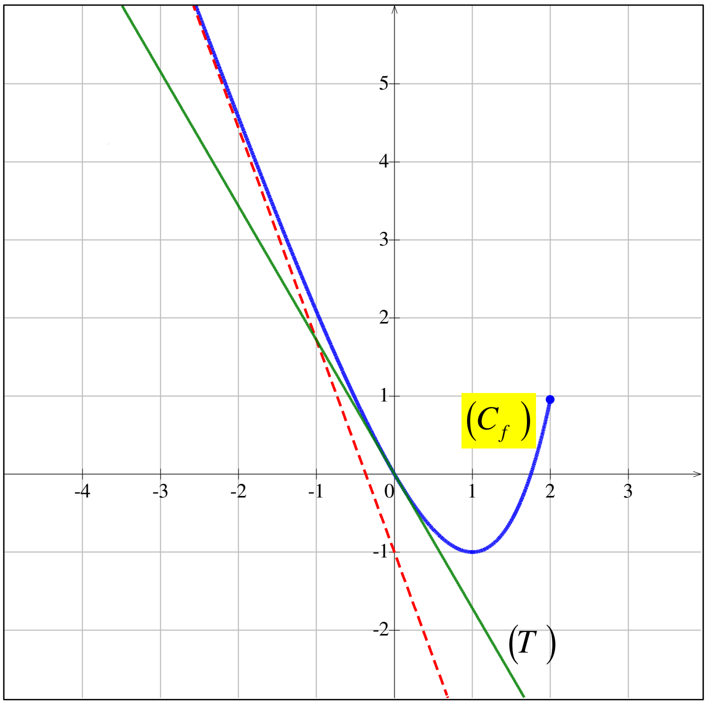
لدينا : $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه $(T):y=(1-e)x$.

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $]1,75;1,76[\subset[1;+\infty[$ و $\begin{cases}f(1.75)\approx-0,002\\ f(1.76)\approx 0,02\end{cases}$

أي $f(1,75)\times f(1,76)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75<\alpha<1.76$.

د ـ الرسم :



3) أ ـ حساب ، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

$$A(\alpha)=-\int_0^\alpha f(x)dx=-\int_0^\alpha (e^x-ex-1)dx=-\left[e^x-\frac{1}{2}ex^2-x\right]_0^\alpha=1-\left(e^\alpha-\frac{1}{2}e\alpha^2-\alpha\right)$$

ب ـ إثبات أن : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

لدينا : $f(\alpha)=0$ ومنه $e^\alpha-e\alpha-1=0$ أي $e^\alpha=e\alpha+1$ و بالتالي :

$$A(\alpha)=-e^\alpha+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=-(e\alpha+1)+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$$

(ua هي وحدة المساحات)

حل مقترح للتمرين ﴿4﴾ ﴿باك 2012﴾

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^x$.

1) حساب النهايات : $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-xe^x)=1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-xe^x)=-\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=-1\times e^x+(-x)e^x=-(x+1)e^x$

بما أن $e^x>0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$ ، و منه :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-1;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;-1]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1 ↗	$1+e^{-1}$	↘ $-\infty$

3) أـ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-1)=1+e^{-1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.

بـ ـ التحقق أن $0.5<\alpha<0.6$:

لدينا : $[0,5;0,6] \subset]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(0.5)\approx 0,18 \\ g(0.6)\approx -0,09 \end{cases}$ و منه $0.5<\alpha<0.6$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{x}-x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^{x}-e^{x}-x-1\right]=+\infty$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;2]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;2]$:

$$f'(x)=1\times e^{x}+(x-1)e^{x}-1=e^{x}+xe^{x}-e^{x}-1=xe^{x}-1=-\left(1-xe^{x}\right)=-g(x)$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$e^{2}-3$

3) تبيان أن: $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)$.

لدينا : $f(\alpha)=(\alpha-1)e^{\alpha}-\alpha-1$، و لدينا من جهة $g(\alpha)=0$ يكافئ $1-\alpha e^{\alpha}=0$ يكافئ $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$.

و منه $\dfrac{-\alpha^{2}-1}{\alpha}=\dfrac{(\alpha-1)-\alpha^{2}-\alpha}{\alpha}=f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)}{\alpha}-\alpha-1$ أي: $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)$.

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$0,5<\alpha<0,6$ يكافئ $\begin{cases} \dfrac{1}{0,6}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{0,5} \\ 1,25<\alpha^{2}+1<1,36 \end{cases}$ يكافئ $\dfrac{1,25}{0,6}<\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}<\dfrac{1,36}{0,5}$

يكافئ $-\dfrac{1,36}{0,5}<-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)<-\dfrac{1,25}{0,6}$ أي: $-2,72<f(\alpha)<-2,08$.

4) أـ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}-e^{x}\right)=0$

و منه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=(x-1)e^x$ و منه إشارة الفرق من إشارة $x-1$ على المجال $]-\infty;2]$.

x	$-\infty$ 1 2
$f(x)-y$	$-$ 0 $+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ) / (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;-2)$ / (C_f) فوق (Δ)

5) أ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

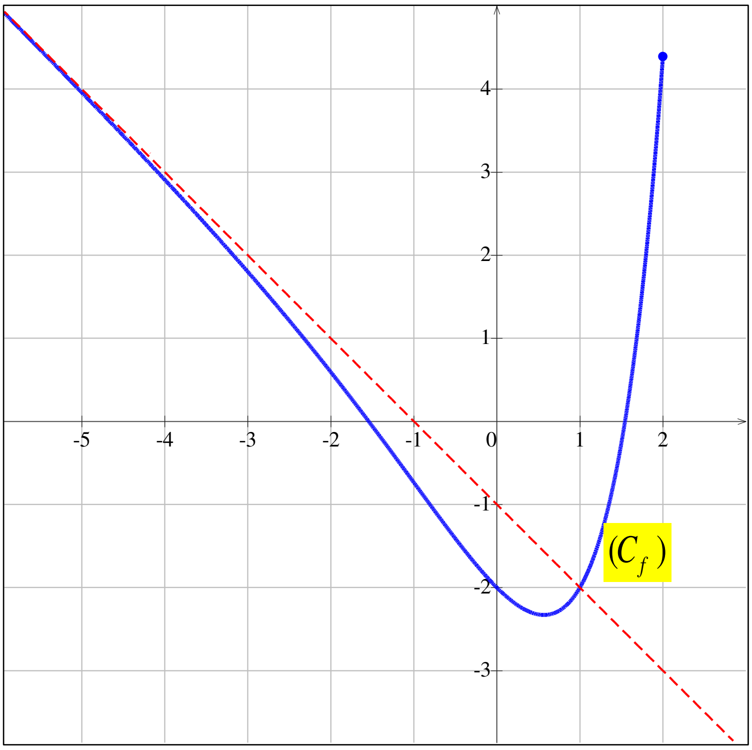
- الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و $]-1,6;-1,5[\subset]-\infty;\alpha]$ و $\begin{cases} f(-1.5)\approx -0,05 \\ f(-1.6)\approx 0,07 \end{cases}$

أي $f(-1,6)\times f(-1,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و يحقق $f(x_1)=0$.

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$ و $]1,5;1,6[\subset[\alpha;2]$ و $\begin{cases} f(1.5)\approx -0,26 \\ f(1.6)\approx 0,37 \end{cases}$

أي $f(1,5)\times f(1,6)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1.5<x_2<1.6$ و يحقق $f(x_2)=0$.

بـ ـ الرسم :



6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^x$.

أ ـ تعيين العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$.

الدالة h أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ يعني : $h'(x)=xe^x$ ، و منه بالمطابقة نجد : $a=1$ و $b=-1$. أي $h(x)=(x-1)e^x$.

بـ ـ إستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا : $g(x)=1-xe^x$ و منه دالة أصلية للدالة g من الشكل : $G(x)=x-(x-1)e^x$.

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=2$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=1\end{cases}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C).

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=0\end{cases}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C).

2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$:

$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}+\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{-1}{(x-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

بما أن $f'(x)<0$ من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	2 ↘ $-\infty$

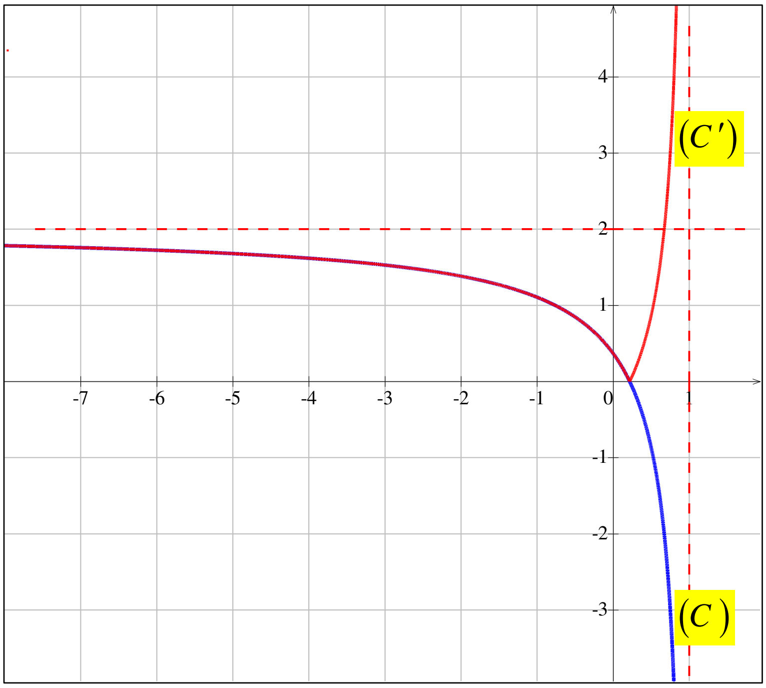
3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.

حسب جدول القيم : $0,21<\alpha<0,22$.

4) الرسم :



5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة $|f(x)|=m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

من أجل $m\in\left]\frac{1}{e};2\right[$ المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} f(2x-1)=2 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to1\\<}} g(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(2x-1)=-\infty$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$: $g'(x)=2f'(2x-1)$

بما أنه من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، $(2x-1)\in]-\infty;1[$ فإن $f'(2x-1)<0$ ، و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

2) أ ـ التحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$:

لدينا : $g(x)=f(2x-1)$ و منه $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=f(\alpha)=0$.

تبيان أن : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

لدينا : $g'(x)=2f'(2x-1)$ و منه $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=2f'(\alpha)$.

بـ- إستنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

لدينا : $(T): y=g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right)+g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ و منه $(T): y=2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$.

جـ- التحقق من أن : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

لدينا : $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ ، لكن $f(\alpha)=0$ و هذا يعني $e^{\frac{1}{\alpha-1}}=-\frac{\alpha}{\alpha-1}$ و منه $f'(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)^3}$

إذن : $(T): y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$ أي $(T): y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$.

حل مقترح للتمرين 6 باك 2015

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=-2-2e^{2x-2}=-2\left(1+2e^{2x-2}\right)$.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)<0$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)\left(\frac{1-2x}{2x-2}-\frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right)=-\infty\end{cases}$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أن : $0,36<\alpha<0,37$.

لدينا : $\begin{cases}g(0.36)\approx 0,002\\ g(0.37)\approx -0,02\end{cases}$ أي : $g(0.36)\times g(0.37)<0$ و منه $0,36<\alpha<0,37$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

1) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)=e^{2x+2}\left(1-2(-x)-e^{2(-x)-2}\right)=e^{2x+2}g(-x)$$

بـ- إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة على $[-\alpha;+\infty[$.

2) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}\right)=0$

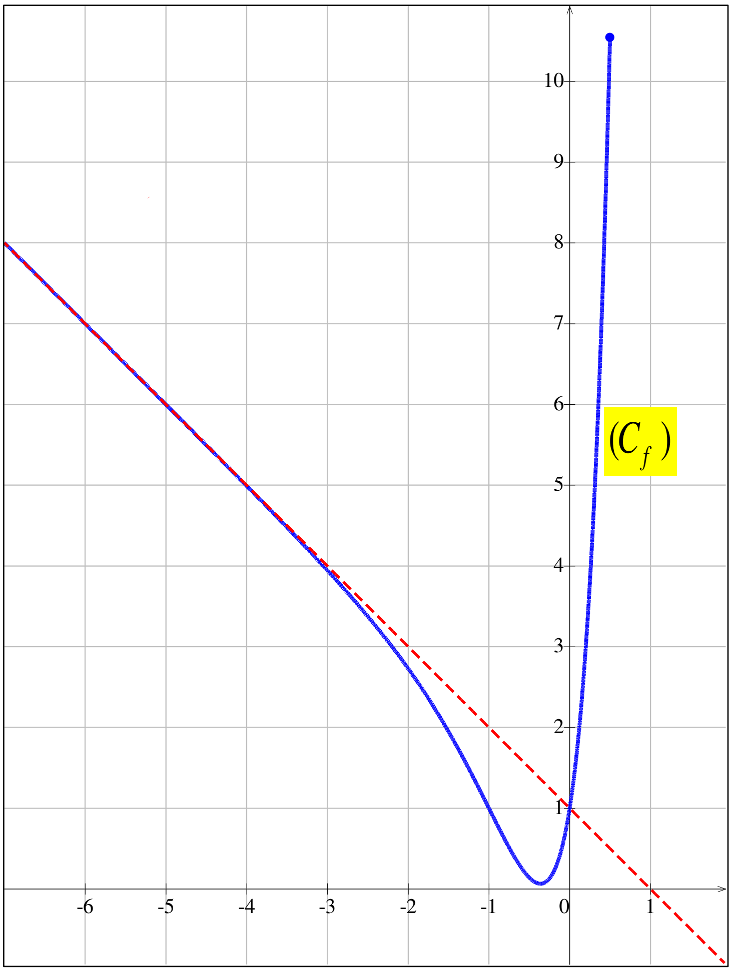
التفسير الهندسي : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-(-x+1)=xe^{2x+2}$ و منه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

5) الرسم :



6) أ- التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}=1-2x-3e^{2x+2}$$

ب- إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

و منه $f(x)=-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}$.

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ من الشكل : $F(x)=\frac{1}{2}\left[-f(x)+f'(x)+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}\right]+c$

أي : $F(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+x-1+c$.

حل مقترح للتمرين (7) باك 2016 – الدورة الأولى -

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=1$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x-1)e^{-x}=(-x^2+x+2)e^{-x}=(2-x)(x+1)e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2-x)(x+1)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $[-1;2]$ و متناقصة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;-1]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-e$	$\nearrow$	$1+5e^{-2}$	$\searrow$	1

3) أ- تبيان أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

لدينا : $g(0)=1+(0^2+0-1)e^0=1-1=0$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و $]-1,52;-1,51[\subset]-\infty;-1[$ و $\begin{cases} g(-1,52)\approx 0,041 \\ g(-1,51)\approx -0,040\end{cases}$

أي $g(-1,52)\times g(-1,51)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;-1[$ حلا وحيدا α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=+\infty$

ب ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x)=-1+(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x+2)e^{-x}=-1-(x^2+x-1)e^{-x}=-g(x)$.

جـ ـ جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	2	↘	$-\infty$

د ـ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=-g(\alpha)=0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم . (يوازي لحامل محور الفواصل).

2) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+2)e^{-x}=0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-(-x)=(x^2+3x+2)e^{-x}=(x+1)(x+2)e^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $(x+1)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(-2;2)$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

جـ ـ تبيان ان المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف :

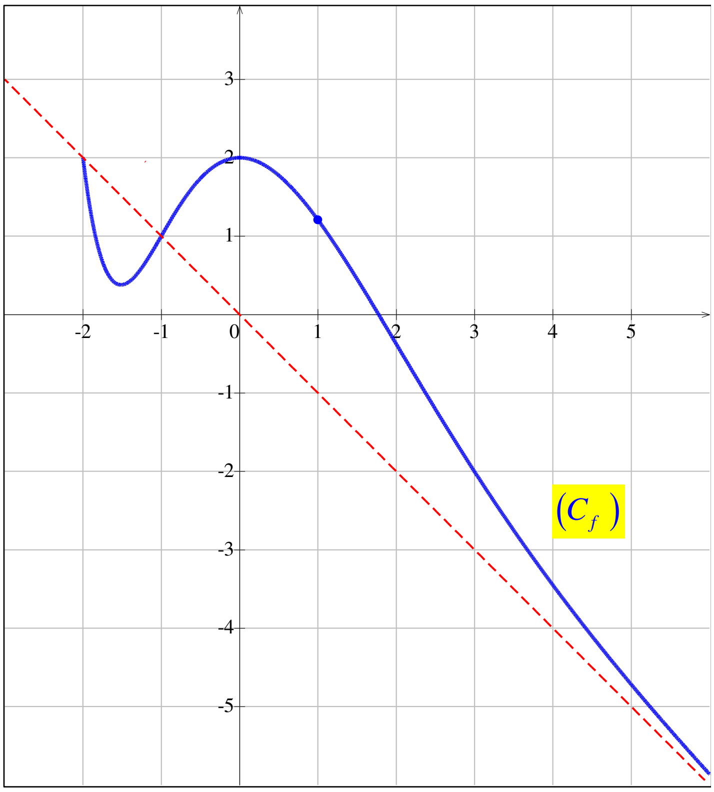
لدينا : الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-g'(x)=(x-2)(x+1)e^{-x}$.

إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $A(-1;1)$ و $C(2;-2+12e^{-2})$.

د ـ الرسم :



هـ ـ المناقشة البيانية :

المعادلة $(m-x)e^{x}+\left(x^{2}+3x+2\right)=0$ تكافئ $f(x)=-m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-m$.

لما $m\in\left]-f(\alpha);+\infty\right[$ يكون $-m\in\left]-\infty;f(\alpha)\right[$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما $m=-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب و الآخر سالب .

لما $m\in\left]-2;-f(\alpha)\right[$ يكون $-m\in\left]f(\alpha);2\right[$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان و الآخر موجب .

لما $m=-2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر معدوم .

(III h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=x+f(x)=\left(x^{2}+2x+3\right)e^{-x}$ و $H(x)=\left(ax^{2}+bx+c\right)e^{-x}$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني : من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x)=h(x)$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-\left(ax^{2}+bx+c\right)e^{-x}=\left(-ax^{2}+(2a-b)x+b-c\right)e^{-x}$$

و منه بالمطابقة نجد : $a=-1$ ، $b=-5$ و $c=-7$ أي $H(x)=\left(-x^{2}-5x-7\right)e^{-x}$.

2) أ ـ حساب التكامل : $A(\lambda)=\int_{0}^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث $\lambda\in\mathbb{R}_{+}^{*}$.

$$A(\lambda)=\int_{0}^{\lambda}h(x)dx=\left[H(x)\right]_{0}^{\lambda}=\left(-\lambda^{2}-5\lambda-7\right)e^{-\lambda}+7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}_{+}^{*}$.

بـ ـ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\left(-\lambda^{2}-5\lambda-7\right)e^{-\lambda}+7\right]=7$.

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^{x}-x^{2}-x$.

1) أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=2e^{x}-2x-1$

دراسة إتجاه تغيّر الدالة g' :

الدالة g' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $g''(x)=2e^{x}-2=2\left(e^{x}-1\right)$

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

ب- تبيان أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0)=1$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

جـ- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x}-x^{2}-x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}\left(\frac{2e^{x}}{x^{2}}-1-\frac{1}{x^{2}}\right)=+\infty$

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1{,}38<\alpha<-1{,}37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1{,}38)\approx -0{,}02 \\ g(-1{,}37)\approx 0{,}001 \end{cases}$ أي $g(-1{,}38)\times g(-1{,}37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1{,}38<\alpha<-1{,}37$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x^{2}e^{x}}{e^{x}-x}$.

1) أ- حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^{2}e^{x}}{e^{x}-x}\right)=0$ ، لأن: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^{2}e^{x}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}-x\right)=+\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{2}e^{x}}{e^{x}-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{2}}{1-xe^{-x}}\right)=+\infty$.

ب- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f'(x)=\frac{\left(2xe^{x}+x^{2}e^{x}\right)\left(e^{x}-x\right)-\left(e^{x}-1\right)x^{2}e^{x}}{\left(e^{x}-x\right)^{2}}=\frac{xe^{x}\left[(2+x)\left(e^{x}-x\right)-x\left(e^{x}-1\right)\right]}{\left(e^{x}-x\right)^{2}}=\frac{xe^{x}g(x)}{\left(e^{x}-x\right)^{2}}$$

جـ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;0]$ و متزايدة على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;\alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ- تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha^2-\alpha}{2}$ و منه

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^2e^{\alpha}}{e^{\alpha}-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\alpha^2+\alpha\right)}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$$

أي : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$.

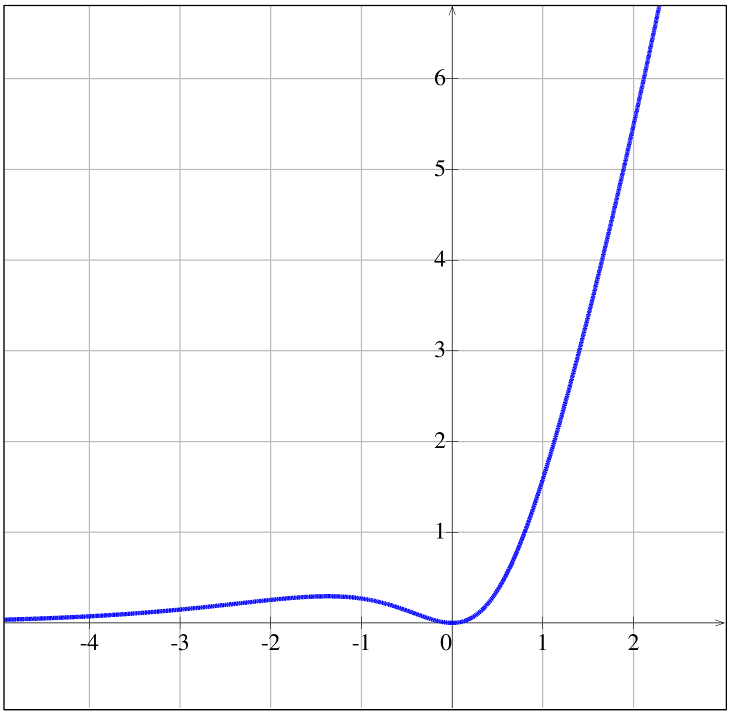
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

لدينا : $-1,38<\alpha<-1,37$ يكافئ $\begin{cases}-0,76<2\alpha+2<-0,74\\(-1,37)^2<\alpha^2<(-1,38)^2\\-2,38<\alpha-1<-2,37\\-\dfrac{2}{2,37}<\dfrac{2}{\alpha-1}<-\dfrac{2}{2,38}\end{cases}$ و منه $0,27<f(\alpha)<0,32$.

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}}\right)=0$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) و المنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x\mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ- الرسم :



I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=2$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e\times x^2e^{-x}\right)=0$.

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=-\infty$.

2) أ- الدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f'(x)=-2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}=\left(x^2-2x\right)e^{1-x}=x(x-2)e^{1-x}$$

بــ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[0;2]$ و متزايدة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0]$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$2-4e^{-1}$	↗	2

3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

لدينا: $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $(T): y=-x+2$.

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)\geq 0$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $h'(x)=-e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-1)e^{1-x}$

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $h(1)=0$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)\geq 0$

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T):

لدينا: $f(x)-y=2-x^2e^{1-x}+x-2=x(1-x)e^{1-x}=xh(x)$.

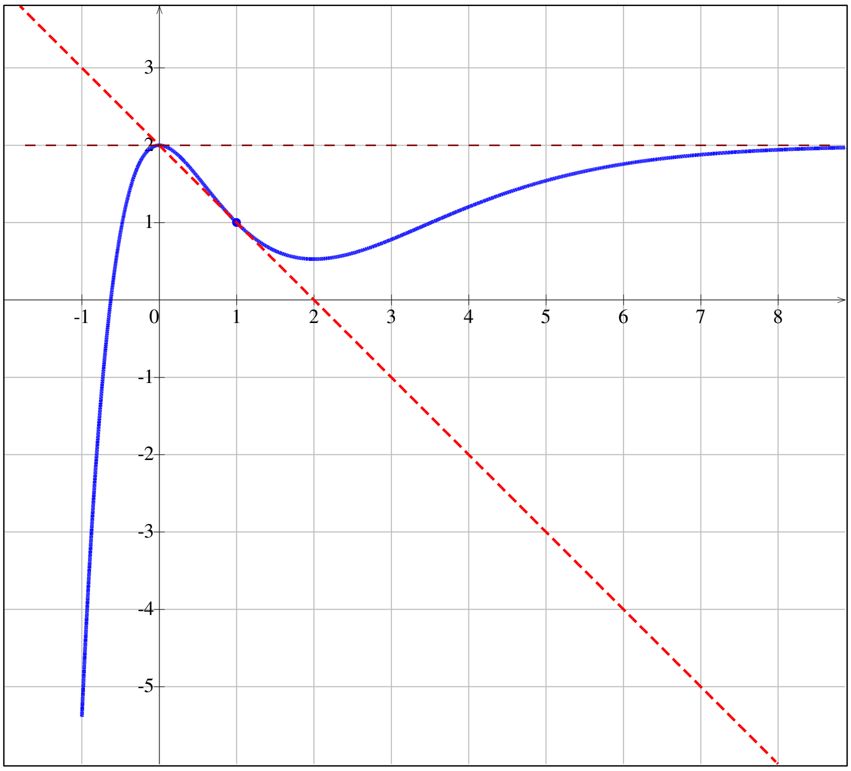
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	

2) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-0,7;-0,6[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-0,7)\approx -0,7 \\ f(-0,6)\approx 0,2 \end{cases}$

أي $f(-0,7)\times f(-0,6)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) الرسم :



4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}$.

- التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

- حساب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=(7-2e)u\,a$$

حل مقترح للتمرين (10) باك 2017 – الدورة الإستثنائية -

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$.

- $g(1)=e^1-e=0$.
- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

- إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-\infty$$

2) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{e}{x}\right)=0$ ومنه (C_f) و المنحنى (γ) ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$ متقاربان عند $-\infty$.

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ):

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{e}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (γ)	(C_f) تحت (γ)

3) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x)=-e^{-x}+\frac{e}{x^2}=\frac{-x^2e^{-x}+e}{x^2}=\frac{-\left(x^2e^{-x}-e\right)}{x^2}=\frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	||	$+$

و منه الدالة f متزايدة على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

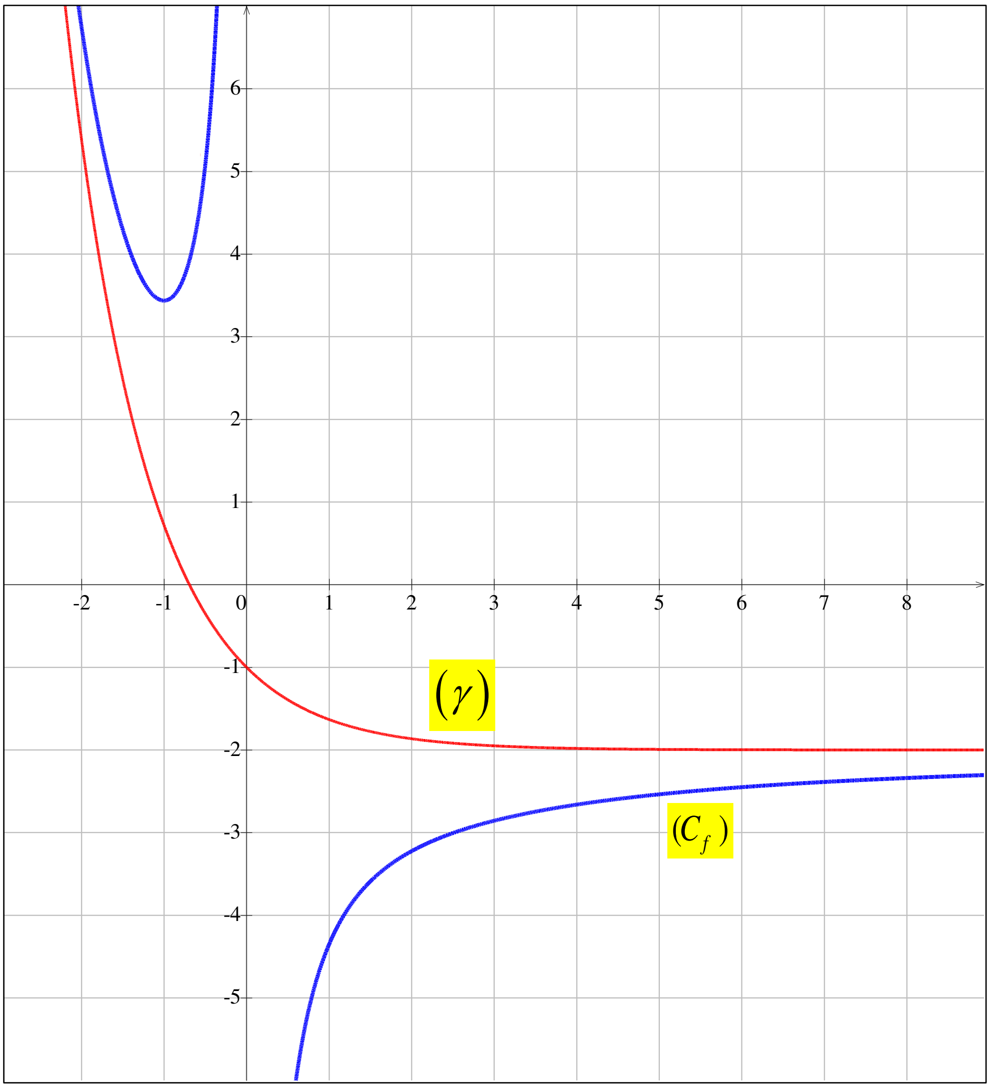
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2e-2$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\nearrow$	$-\infty$

4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$:

لدينا : (γ) المنحنى ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$

و منه (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $x\mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$ ، علما أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة $x\mapsto e^{x}$ بالنسبة لحامل محور التراتيب .

الرسم :



5) n عدد طبيعي و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-e^{n}$ و $x=-e^{n+1}$.

$$A(n)=\int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}}\left[f(x)-e^{-x}+2\right]dx=\int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}}\left(-\frac{e}{x}\right)dx=-e\int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}}\left(\frac{1}{x}\right)dx=-e\left[\ln|x|\right]_{-e^{n+1}}^{-e^{n}}=e$$

حساب العدد الحقيقي l : $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)=2017e$.

حل مقترح للتمرين (11) باك 2018

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

1) حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)=-\infty$ ، لأن: $\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+xe^{-x}-e^{-x}\right)=2$ ، لأن: $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(x-1)=(2-x)e^{-x}$.

لدينا :من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متناقصة على المجال $]2;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;2]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+e^{-2}$	$\searrow$	2

3) أ ـ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2[$ و $]-0,38;-0,37[\subset]-\infty;2[$ و $\begin{cases} g(-0.38)\approx -0,017 \\ g(-0.37)\approx 0,016 \end{cases}$

أي $g(-0,38)\times g(-0,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

بـ ـ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1) أـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)\right]=-\infty$.

بـ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ ـ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) بحيث : $(\Delta): y=2x+1$.

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ،

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x)=2+(-1)e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(-x)=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$.

ـ إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، و منه نستنتج أن :

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$.

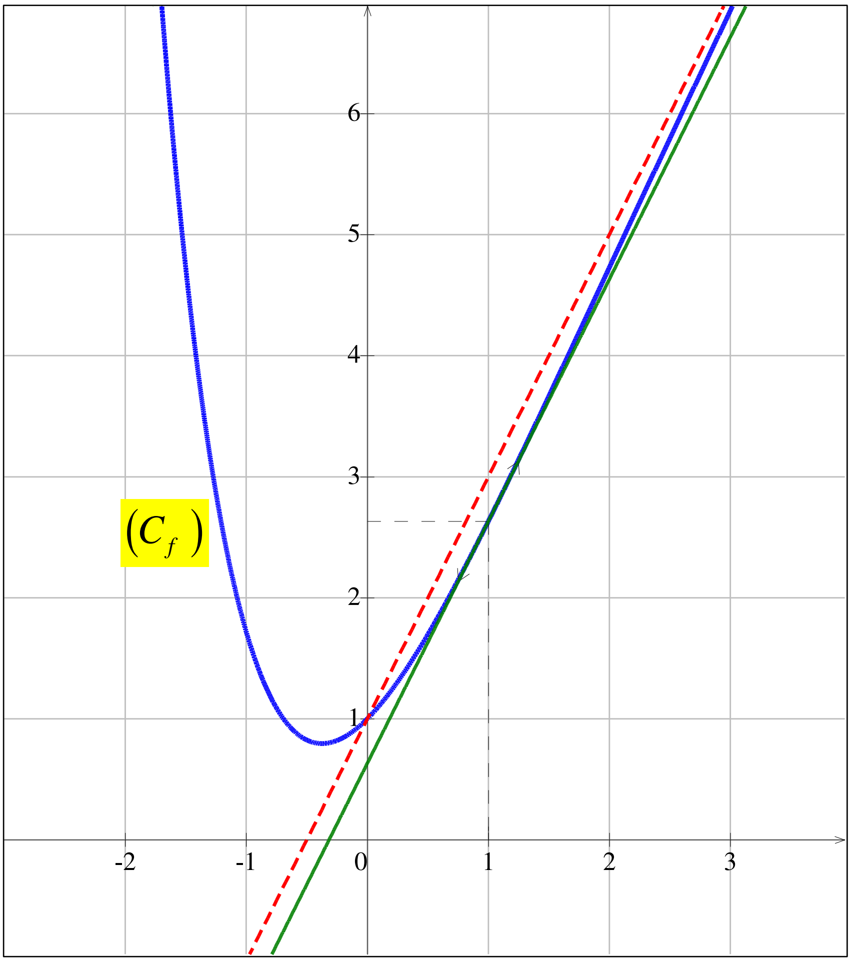
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

لدينا : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $y=2x+1-\frac{1}{e}$ هي معادلة لـ (T).

4) الرسم :



5) المناقشة البيانية :

$x=(1-m)e^x$ تكافئ $xe^{-x}=(1-m)$ تكافئ $-xe^{-x}=m-1$ تكافئ $2x+1-xe^{-x}=2x+1+m-1$

أي $2x+1-xe^{-x}=2x+m$ أي : $f(x)=2x+m$. ⟵ مناقشة مائلة.

إذا كان $m\in\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m=1-\frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف .

إذا كان $m\in\left]1-\frac{1}{e};1\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

إذا كان $m\in\left]1;+\infty\right[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما .

6)أ- تعيين دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

الدالة $x\mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=\int_1^x te^{-t}\,dt$.

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=e^{-t}$ و منه $u'(t)=1$ ، $v(t)=-e^{-t}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x)=\left[-te^{-t}\right]_1^x-\int_1^x -e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+e^{-1}-\int_1^x -e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$ هي : $F(x)=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$.

ب ـ حساب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

$$A=\int_1^3\left((2x+1)-f(x)\right)dx=\int_1^3 xe^{-x}dx=F(3)-F(1)=2e^{-1}-4e^{-3}(u.a)$$

حل مقترح للتمرين ﴿12﴾ ﴿باك 2019﴾

$$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2 \qquad \text{و} \qquad g(x)=e^x-ex$$

1) أ ـ دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^x-e$

من أجل $x\in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x\le e$ أي $g'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x\in[1;+\infty[$ ، يكون $e^x\ge e$ أي $g'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

ب ـ إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ فإن 0 قيمة حدية صغرى للدالة g .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\ge 0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x-ex=g(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

3) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}e\right)\right]=+\infty$$

، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)=+\infty\end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=-\infty$$

، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2}ex^2\right)=-\infty\end{cases}$

جدول تغيّرات الدالة f :

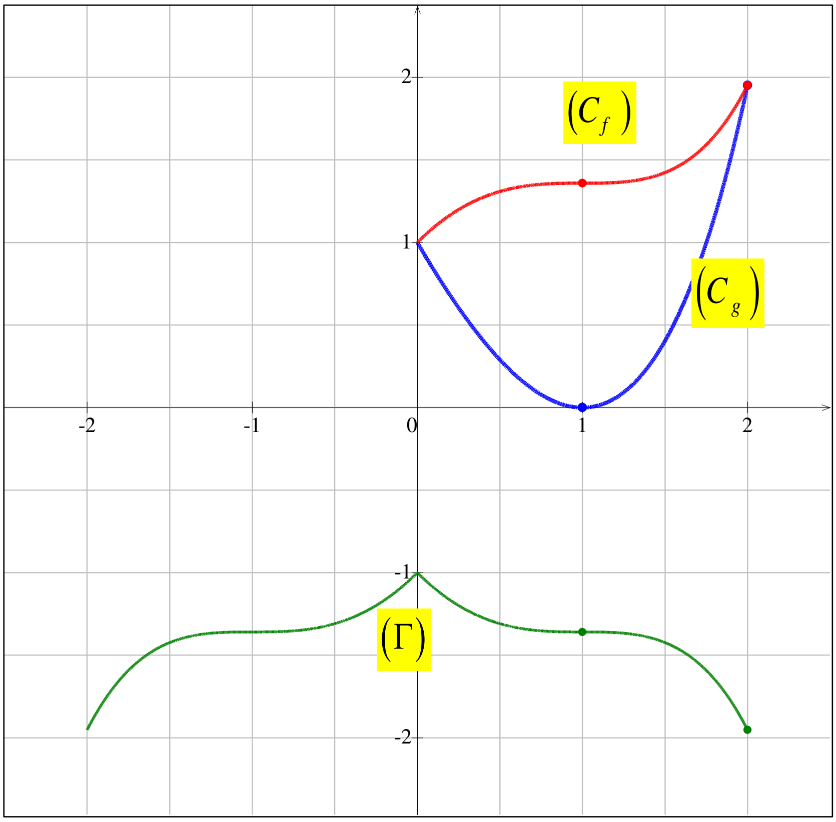
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$+\infty \nearrow +\infty$

4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$:

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2-(e^x-ex)=-\frac{1}{2}ex^2+ex=ex\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (C_g)	(C_f) يقطع (C_g) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (C_g)	(C_f) يقطع (C_g) في النقطة $B(2;e^2-2e)$	(C_f) تحت (C_g)	

5) الرسم :



6) حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) :

$$A=\int_0^2[f(x)-g(x)]dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}ex^2+ex\right)dx=\left[-\frac{1}{6}ex^3+\frac{1}{2}ex^2\right]_0^2=-\frac{8}{6}e+2e=\frac{2e}{3}(u.a)$$

و منه $A=\frac{2e}{3}\times 4=\frac{8e}{3}cm^2$.

7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$.

أ ـ تبيان أن الدالة h زوجية :

من أجل كل $x\in[-2;2]$ ، $-x\in[-2;2]$ و $h(-x)=\frac{1}{2}e(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}=h(x)$.

و منه الدالة h زوجية .

ب ـ من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)+f(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^x+e^x-\frac{1}{2}ex^2=0$.

استنتاج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) :

من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)=-f(x)$ و بالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0;2]$.

و لرسم (Γ) على المجال $[-2;0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

بالتوفيق للجميع