BAC 2021

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — الأستاذة: قميري سميرة

الشعبة: علوم تجريبية — دورة ماي 2021

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا

التمرين الأول :

صندوق به 9 كرات لا نفرق بينها عند اللمس، منها أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2 . وثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 2، 2 ، 3 وكرتان خضراوان تحملان الرقمين 1 ، 3 . نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع. نسمي الحادثتين: A: الكرة الأولى تحمل الرقم 1 B : الكرات الثلاث من نفس اللون.

1. بين أن $P(A)=\dfrac{4}{9}$ وأن $P(B)=\dfrac{5}{84}$
2. احسب $P(A\cap B)$ ثم استنتج $P(A\cup B)$

لاعب يدفع 5 دينارا ثم يسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق السابق دفعة واحدة، إذا كانت الكرات تحمل نفس الرقم يحصل على 10 دينار . وإذا كانت كرتان فقط تحملان نفس الرقم يحصل على 5 دينار وإذا كانت الكرات تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى لا يحصل على شيئ (يخسر مادفعه). نسمي X: المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب **قيمة الربح الصافي**

3. بين أن $P(X=0)=\dfrac{55}{84}$
4. عين قيم المتغير العشوائي X
5. اكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X
6. احسب $E(X)$
7. يعيد شخص هذه اللعبة 2000 مرة بصفة مستقلة. ما هو مجموع الربح المتوقع؟

التمرين الثاني:

(D_1) و (D_2) مستقيمان معرفان بمعادلتيهما $(D_1):\ y=\ln(2)x+\ln\left(\dfrac{2}{e}\right)$ و $(D_2): y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. احسب فاصلة نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) ثم مثل (D_1) و (D_2) في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

المتتالية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\ln(2)u_n+\ln\left(\dfrac{2}{e}\right)$.

2. مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء)
3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-1<u_{n+1}<u_n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=3u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

4. عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .

نضع $\alpha=3$

6. أكتب v_n بدلالة n ثم عبر عن u_n بدلالة n .

7. احسب نهاية المتتالية (v_n) ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $w_n = u_0 + \frac{u_1}{\ln 2} + \frac{u_2}{(\ln 2)^2} + \dots + \frac{u_n}{(\ln 2)^n}$.

8. هل المتتالية (w_n) متقاربة ؟

التمرين الثالث:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^{2x} - e^x - x$ ، (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحني *(Cf)* عند $-\infty$

3) أدرس الوضع النسبي للمنحني *(Cf)* مع المستقيم *(D)*.

4) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

5) حدد إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$.

6) بين أن المنحني *(Cf)* يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) يطلب كتابة معادلة له

7) بين أن المنحني *(Cf)* يقبل نقطة انعطاف يطلب حساب احداثييها .

8) ارسم *(Cf)* والمماس (T) والمستقيم (D)

9) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x: $e^x = 1 + me^{-x}$

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

10) اعتمادا على دراستك لاتجاه تغير الدالة f

أ) استنتج –دون حساب– نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g

11) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = e^x\left(\frac{1}{2}e^x - 1\right) - \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

أ) بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة F على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

التمرين الرابع:

المستوي لمركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = -3 + 2i\sqrt{3}$ و $z_B = -i\sqrt{3}$ ، $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$.

1. بيّن أن $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم عيّن طبيعة المثلث ABC

2. احسب لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

3. احسب لاحقة النقطة D صورة النقطة G بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

4. بين أن $\left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right)^{2021} = -1$

5. استنتج أن النقطة A نظيرة النقطة B بالنسبة إلي D .

الأستاذة قمري سميرة

التمرين الأول :

R1 ; R1 ; R1 ; R2 ; B2 ; B2 ; B3 ; V1 ; V3

1. إثبات أن: $P(A)=\frac{4}{9}$ وأن $P(B)=\frac{5}{84}$

$P(A)=\frac{A_4^1\times A_5^2}{A_9^3}=\frac{4}{9}$ و $P(B)=\frac{A_3^3+A_4^3}{A_9^3}=\frac{5}{84}$

2. حساب $P(A\cap B)$ ثم استنتاج $P(A\cup B)$:

$$P(A\cap B)=\frac{A_3^3}{A_9^3}=\frac{6}{504}=\frac{1}{84}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{31}{63}$$

3. إثبات أن $P(X=0)=\frac{55}{84}$

$$P(X=0)=\frac{C_4^2C_3^1+C_3^2C_6^1+C_2^2C_7^1}{C_9^3}=\frac{55}{84}$$

4. قيم المتغير العشوائي X : $X=\{-5,0,5\}$

5. قانون احتمال المتغير العشوائي X

x_i	-5	0	5
$P(X=x_i)$	$\frac{24}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{5}{84}$

6. حساب $E(X)$: $E(X)=\sum p_ix_i=\frac{-95}{84}$

7. مجموع الربح المتوقع بعد إعادة هذه اللعبة 2000 مرة:
$2000E(X)=-2262$

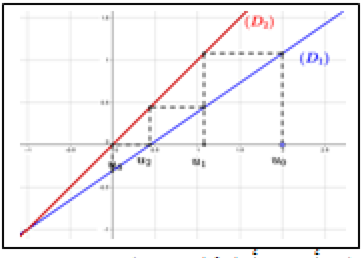
من المتوقع خسارة ما يقارب 2262 دينارا

التمرين الثاني:

1. فاصلة نقطة تقاطع (D_1) و (D_2): بحل المعادلة

$3x-4=x$ نجد: $x=2$

2. تمثيل (D_1) و (D_2) والحدود



3. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-1<u_{n+1}<u_n$ بالتراجع:

أ- لدينا $u_0=2$ و $u_1=\ln(8)-1$ فالخاصية محققة من أجل 0 $-1<u_1<u_0$

ب- نفرض صحة الاستلزام: $-1<u_{n+1}<u_n$ يستلزم $-1<u_{n+2}<u_{n+1}$

$-1<u_{n+1}<u_n$ يستلزم $-\ln(2)<\ln(2)u_{n+1}<\ln(2)u_n$

يستلزم $-\ln(2)+\ln\left(\frac{2}{e}\right)<\ln(2)u_{n+1}+\ln\left(\frac{2}{e}\right)<\ln(2)u_n+\ln\left(\frac{2}{e}\right)$

يستلزم $-1<u_{n+2}<u_{n+1}$

استنتاج اتجاه التغير: المتتالية (u_n) متناقصة تماما

4. تعيين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .

$v_{n+1}=3u_{n+1}+\alpha$ يكافئ $v_{n+1}=3\left(\ln(2)u_n+\ln\left(\frac{2}{e}\right)\right)+\alpha$

يكافئ $v_{n+1}=3\ln(2)u_n+3\ln(2)-3+\alpha$

يكافئ $v_{n+1}=\ln(2)\left(3u_n+3-\frac{3-\alpha}{\ln(2)}\right)$

يكفي أن يكون: $3-\frac{3-\alpha}{\ln(2)}=\alpha$ أي $\alpha=3$

عبارة الحد العام: $v_n=9(\ln 2)^n$

$$u_n=\frac{1}{3}v_n-1=\frac{1}{3}(9(\ln 2)^n)-1=3(\ln 2)^n-1$$

نهاية المتتالية (v_n) و نهاية المتتالية (u_n)

المتتالية (v_n) هندسية أساسها موجب أصغر من 1 فنهايتها 0

$$\lim u_n=\lim\left(\frac{1}{3}v_n-1\right)=-1$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n،

$w_n=u_0+\frac{u_1}{\ln 2}+\frac{u_2}{(\ln 2)^2}+...+\frac{u_n}{(\ln 2)^n}$.

5. تقارب المتتالية (w_n)

$$w_n=u_0+\frac{u_1}{\ln 2}+\frac{u_2}{(\ln 2)^2}+...+\frac{u_n}{(\ln 2)^n}$$

$$w_n=\frac{1}{3}v_0-1+\frac{\frac{1}{3}v_1-1}{\ln 2}+\frac{\frac{1}{3}v_2-1}{(\ln 2)^2}+...+\frac{\frac{1}{3}v_n-1}{(\ln 2)^n}$$

$$w_n=\frac{1}{3}(v_0+v_1+...v_n)-1-\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}+...-\frac{1}{(\ln 2)^n}$$

المتتالية (w_n) مجموع متتاليتين متقاربتين فهي متقاربة

التمرين الثالث:

1. حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}-e^x-x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x(e^x-1)-x=+\infty$$

2. إثبات أن المستقيم (D) مقارب مائل للمنحنى (Cf) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x))=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}-e^x=0$$

3. الوضع النسبي للمنحنى (Cf) مع المستقيم (D).

ندرس إشارة الفرق $e^{2x}-e^x$ حيث $e^{2x}-e^x=e^x(e^x-1)$

$x\in]-\infty,0[$ المنحنى (Cf) تحت المستقيم (D).

المنحنى (Cf) يقطع المستقيم (D) في النقطة التي فاصلتها 0

$x\in]0,+\infty[$ المنحنى (Cf) فوق المستقيم (D).

4. اتجاه تغير الدالة f : f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=2e^{2x}-e^{x}-1=2\left(e^{x}+\frac{1}{2}\right)\left(e^{x}-1\right)$$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$

و متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

5. إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$: f موجبة تماما

المماس (T): (T) يوازي المستقيم (D) يعني $f'(x)=-1$

$2e^{2x}-e^{x}-1=-1$ يكافئ $x=-\ln(2)$

6. معادلة المماس: $y=-x-\frac{1}{4}$

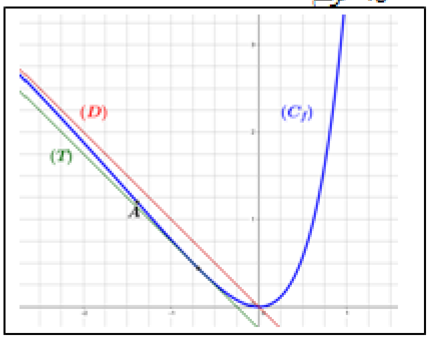
7. نقطة انعطاف المنحنى (C_f): f تقبل الاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

$$f''(x)=4e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(4e^{x}-1\right)$$

الدالة f'' تنعدم عند $-\ln 4$ وتغير إشارتها فالمنحنى (C_f)

يقبل نقطة انعطاف احداثياها: $A\left(-\ln 4, e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{4}}+\ln 4\right)$

8. الرسم



9. المناقشة البيانية:

$e^{x}=1+me^{-x}$ تكافئ: $e^{2x}=e^{x}+m$

تكافئ: $e^{2x}-e^{x}-x=-x+m$

$m\in\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[$ المعادلة لا تقبل حلا

$m=-\frac{1}{4}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

$m\in\left]-\frac{1}{4};0\right[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين

$m\in[0,+\infty[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

10. نهايات الدالة g :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	$+\infty$ ‖	$+\infty$ ↘	0

12. إثبات أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{2}$. F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$F'(x)=e^{2x}-e^{x}-x=f(x)$$

اتجاه تغير الدالة F

f موجبة تماما إذن الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

التمرين الرابع:

1. إثبات أن $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{-3+3i\sqrt{3}}{3+3i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{2}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{-4}$$

$$=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

طبيعة المثلث ABC: $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

معناه $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pi}{3}$

أي $AB=BC$ و $\left(\overline{BC},\overline{BA}\right)=\frac{\pi}{3}$ فالمثلث ABC متقايس الأضلاع

2. لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=i\sqrt{3}$$

3. لاحقة النقطة D: $\frac{z_D-z_G}{z_C-z_G}=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_D=z_G\,e^{i\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(i\sqrt{3}\right)=\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. إثبات أن: $\left(\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}\right)^{2021}=-1$

$$\left(\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}\right)^{2021}=\left(\frac{-3+2i\sqrt{3}-\left(\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-i\sqrt{3}-\left(\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^{2021}$$

$$=\left(\frac{-3+3i\sqrt{3}}{3-3i\sqrt{3}}\right)^{2021}=(-1)^{2021}=-1$$

استنتاج: $\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}=-1$ يعني $\overline{DB}=-\overline{DA}$

إذن النقطة A نظيرة النقطة B بالنسبة إلى D.