تمارين الأعداد المركبة

في البكالوريا

من 2008 إلى 2019

شعبة : علوم تجريبية

كتابة : خالد بخاخشة

آخر تحديث : جانفي 2020

التمرين الأول

[باك 2008][م1]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2-(1+2i)z-1+i=0$.

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1|<|z_2|$. بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: 1، z_1 و z_2 .

ليكن z العدد المركب حيث: $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$.

أ- إنطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$.

برهن أن: $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ حيث θ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

بـ- أكتب z على الشكل الأسي.

جـ- أكتب z على الشكل المثلثي و استنتج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين نسبته و زاويته .

التمرين الثاني

[باك 2008][م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2+iz-2-6i=0$

2) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث: $z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$.

عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3) لتكن C النقطة ذات الاحقة z_C حيث: $z_C=\frac{4-i}{1+i}$.

أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

4) أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

بـ- **تطبيق**: عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرّف بـ: $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.

التمرين الثالث

[باك 2009][م1]

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$ و z عدد مركب .

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

2) نضع: $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$.

أ- أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

بـ- أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

جـ- إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) أ- n عدد طبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

بـ- أحسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

التمرين الرابع

[باك 2009][م2]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$.

2) نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة.

أ- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

بـ- A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

أحسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

جـ- جد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z=\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

د- أحسب z^3 ، z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين الخامس

[باك 2010][م1]

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب : $z_A=1+i$ و $z_B=3i$

1) أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z'=2iz+6+3i$

أ- عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

بـ- عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$.

أ- عين z_D لاحقة النقطة D .

بـ- عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\dfrac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

بـ- أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\dfrac{z_B-z}{z_D-z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين السادس

[باك 2010][م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب :

$z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$.

أ- بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O .

بـ- عين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B .

جـ- بيّن أن النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D .

د- إستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين السابع
[باك 2011][م1]

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$$z_A=-i \quad ، \quad z_B=2+3i \quad و \quad z_C=-4+i$$

1)أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

بـ- عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث :
$z'=iz-1-i$

أ- عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

بـ- ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$

أ- بيّن أن النقط A ، C و D في استقامية.

بـ- عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D .

جـ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

التمرين الثامن
[باك 2011][م2]

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$$z_A=3-2i \quad ، \quad z_B=3+2i \quad و \quad z_C=4i$$

1) أ- علم النقط A ، B و C .

بـ- ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك .

جـ- عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$

3) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$.

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة .

بـ- لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z.

- عيّن مجموعة النقطة M من المستوي التي تحقق : $|z-z_0|=|z-z_1|$

التمرين التاسع
[باك 2012][م1]

1)نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z=\frac{3i\left(z+2i\right)}{z-2+3i}$ (حيث $z\neq 2-3i$)

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2)ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$$z_A=1+i\sqrt{5} \quad و \quad z_B=1-i\sqrt{5}$$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3)نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=\frac{3i\left(z+2i\right)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C=-2i$ ، $z_D=2-3i$ و $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

بـ- إستنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها . تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

التمرين العاشر
[باك 2012][م2]

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

بـ- حدّد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب:

$z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$

أ- أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

بـ- أكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

جـ- إستنتج طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S.

بـ- عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ- بيّن أن النقط A ، B و A' في إستقامية.

التمرين الحادي عشر
[باك 2013][م1]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية :

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ ...... (I) حيث α وسيط حقيقي .

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$.

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

بـ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته .

جـ- عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ، ثم أنشئ G.

د- أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

التمرين الثاني عشر
[باك 2013][م2]

نعتبر في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : $z^2+4z+13=0$ ...... (E)

1) تحقق أن العدد المركّب $-2-3i$ حل للمعادلة (E) ، ثم جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركّب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ- بيّن أن : $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

بـ- أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

3) لتكن النقطة D حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O}$.

أ- بيَن أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما .

بـ- أحسب z_D لاحقة النقطة D .

جـ- بيَن أن $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثالث عشر

[باك 2014][م1]

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

لتكن النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $z_A=3\sqrt{2}\left(1+i\right)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$.

أ- أكتب z_A ، z_B و $\left(1+i\right)z_A$ على الشكل الأسي.

بـ- أحسب $\left(\frac{\left(1+i\right)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

جـ- بيَن أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها .

د- أحسب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- أكتب العبارة المركبة للدوران R .

بـ- عيَن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A، C و C' في إستقامية.

جـ- عيَن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

التمرين الرابع عشر

[باك 2014][م2]

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $\left(z-i\right)\left(z^2-2z+5\right)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (وحدة الطول $1cm$)

تعطى النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=1-2i$.

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

بـ- جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على $\left(BC\right)$.

جـ- أحسب مساحة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- عيَن الكتابة المركَبة للتشابه S .

بـ- بيَن أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

4) M نقطة لاحقتها z ، عيَن مجموعة النقط M حيث: $\left|z\right|=\left|iz+1+2i\right|$.

التمرين الخامس عشر

[باك 2015][م1]

I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 \\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β .

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_A=z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) أـ أكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

بـ ـ تحقق أن العدد المركّب $2\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\dfrac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\dfrac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي .

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$

أـ حدد النسبة و زاوية للتشابه S الذي مركزه O و يحول D إلى A .

بـ ـ أكتب $\dfrac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z=k\left(1+i\right)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

التمرين السادس عشر

[باك 2015][م2]

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

z_A ، z_B و z_C حيث : $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ ، $z_C=-\left(z_A+z_B\right)$.

1) أـ أكتب كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسّي.

بـ ـ استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة $\left(\gamma\right)$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

جـ ـ أنشئ الدائرة $\left(\gamma\right)$ و النقط A ، B و C.

2) أـ تحقق أن : $\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

بـ ـ استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع و أن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث .

جـ ـ عيّن و أنشئ مجموعة النقط $\left(E\right)$ M ذات اللاحقة z حيث : $\left|z\right|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|$.

3) أـ عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O و يحول C إلى A .

بـ ـ أثبت أن صورة $\left(E\right)$ بالدوران r هي محور القطعة $\left[OB\right]$.

التمرين السابع عشر

[باك 2016] [د1] [م1]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث: $z' = \dfrac{z-2}{z-1}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما z_1 و z_2 على الترتيب حيث: $z_1 = 1-i$ ، $z_2 = \overline{z_1}$.

أ- أكتب $\dfrac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي.

ب- بيّن أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O، يطلب تعيين زاوية له.

3) نضع: $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ (Γ).

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

أ- عيّن طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ و عناصره المميزة.

ب- أكتب العبارة المركبة للتحويل S.

جـ- عيّن ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S.

التمرين الثامن عشر

[باك 2016] [د1] [م2]

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $\left(z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\left(z^2 + \sqrt{3}z + 1\right) = 0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ، $z_B = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ و $z_C = \overline{z_B}$.

أ- أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب- بيّن أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) أ- عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، ثم حدد بدقة طبيعته.

ب- عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق: $|z - z_A| = |\overline{z} - z_B|$.

جـ- عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على، ثم تحقق أن $A \in (\Gamma)$

التمرين التاسع عشر

[باك 2016] [د2] [م1]

1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$

أ- تحقق أن: $P\left(2\sqrt{3}\right) = 0$.

ب- جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = \left(z - 2\sqrt{3}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب:

$z_A = -\sqrt{3} + 3i$ ، $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ و $z_C = 2\sqrt{3}$

أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

ب- بيّن أنه يوجد دوران R مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C، يطلب تعيين زاويته.

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC.

د- عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين العشرون
[باك 2016] [د2] [م2]

نعتبر في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : (E) .... $2\overline{z}^3+3\overline{z}^2-3\overline{z}+5=0$

يشير الرمز $\overline{z}$ إلى مرافق العدد المركب z .

1) أ- أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(2\overline{z}+5)(\overline{z}^2-\overline{z}+1)=0$.

بـ- حل في المجوعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad z_B=\overline{z_A} \quad ، \quad z_C=-1 \quad ، \quad z_D=-\frac{5}{2}$$

بـ أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي.

بـ- أنشئ النقط A ، B ، C و D .

جـ- أثبت أن : $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$.

د- إستنتج طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S .

أنشئ النقطة F ثم حدد طبيعة المثلث AFC .

4) عيّن طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z+1=kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

التمرين الواحد و العشرون
[باك 2017] [د ع] [م1]

I) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$

1) أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي.

2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث :. $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$

تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و أنشئها .

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C و نسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h .

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة .

التمرين الثاني و العشرون
[باك 2017] [د ع] [م2]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي :

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$.

2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)(\overline{z}+2)=|z+2|^2$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$.

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 و نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ و نصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ و نصف القطر 9

5) من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان $z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ فإن : $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$

حيث k عدد صحيح .

التمرين الثالث و العشرون

[باك 2017] [د إ] [م1]

I) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$.

II) المستوي المركَب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث : $\|\vec{u}\|=2cm$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

1) أ- أكتب z_B على الشكل الأسي ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد المركَب z_C .

ب- عين مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشئ النقط A ، B و C .

2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S .

أ- أكتب العبارة المركَبة للتشابه S ثم عين لاحقة كل A' ، B' و C' من صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتشابه S ، ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C' .

ب- أحسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع و العشرون

[باك 2017] [د إ] [م2]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$

1) عين النسبة و زاوية للتشابه S المباشر ذي المركز A و الذي يحول النقطة B إلى النقطة C .

2) أكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

عين كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I ، ثم بين أن النقط B ، G و I في إستقامية .

4) نعتبر النقطة D نظيرة النقطة B بالنسبة إلى I . حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|=5\sqrt{2}$.

أ- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) .

ب- عين طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها .

التمرين الخامس و العشرون

[باك 2018][م1]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ ، $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$

3) أ- تحقق أن: $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و حدد طبيعة المثلث OBC .

بـ- إستنتج أن: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميّزة.

4) نسمّي (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z|=\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$.

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r .

التمرين السادس و العشرون

[باك 2018][م2]

I) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(\overline{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z)

II) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب:

$z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z_A}$.

1) تحقق أن: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث: $\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A|\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

بيّن أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و أحسب z_D.

3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عيّن نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D .

4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث: $\arg\left(\frac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

التمرين الرابع عشر

[باك 2019][م1]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-i)\left(z^2-4z+5\right)=0$.

II) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها:

i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

1) أكتب العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع: $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$.

أ- عيّن المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $|f(z)|=\frac{1}{2}$.

بـ- بيَن أن العدد $\left[f\left(i\right)\right]^{1440}$ حقيقي موجب.

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- عيَن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r و بيَن أن النقط D ، A و C في إستقامية.

بـ- استنتج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة.

التمرين الرابع عشر

[باك 2019][م2]

المستوي المركَب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A، z_B و z_C على الترتيب حيث: $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

1) أ- أكتب العدد المركَب z_A على الشكل الأسي.

بـ- أحسب العدد $\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2) أ- T الإنسحاب الذي يحول A إلى C ، عيَن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T.

بـ- استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) أكتب العدد المركب z_C-z_A على الشكل الأسي.

4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث تختلف عن A و تختلف عن C.

عيَن (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A-z}{z_C-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما