

## تمارين الروال اللوغاريتمية في البكالوريا

الشعبة: تسيير وإقتصاد

التعريف [1]

[باك 2010] [م1] [ن4]

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .  $(\ln)$  هو رمز اللوغاريتم النبيري (1) أـ حل في المجال  $]0; +\infty[$  المعادلة :  $f(x) = 0$  ثم فسر النتيجة هندسيا .

بـ حلل إلى  $f(x)$  جداء عاملين .

جـ حل في المجال  $]0; +\infty[$  المتراجحة :  $2\ln(x) + 2 \geq 0$  .

(2) أحسب  $f'(x)$  واستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  .

(3) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

التعريف [2]

[باك 2010] [م2] [ن9]

(I) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  بـ :  $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$  ( $\ln$  هو رمز اللوغاريتم النبيري)

و  $(\Gamma)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس كما هو في الشكل التالي :

(1) بقراءة بيانية ، عين عدد حلول المعادلة  $g(x) = 0$  .

(2) أحسب  $g(2)$  .

(3) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا  $\alpha$  حيث :  $2,87 < \alpha < 2,88$  .

(4) استنتج حسب قيم  $x$  ، إشارة  $g(x)$  في المجال  $]1; +\infty[$  .

(II) لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  بـ :

$$f(x) = x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$$

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أـ أوجد نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  . (لاحظ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ) .

بـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا .

جـ بين أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x - 3$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$  .

دـ أوجد فاصلة نقطة تقاطع  $(\Delta)$  مع  $(C_f)$  .

هـ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  .

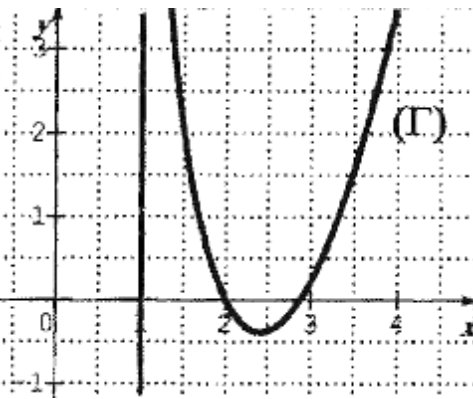
(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  لدينا :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$  ، ( $f'$  هي الدالة المشتقة للدالة  $f$ )

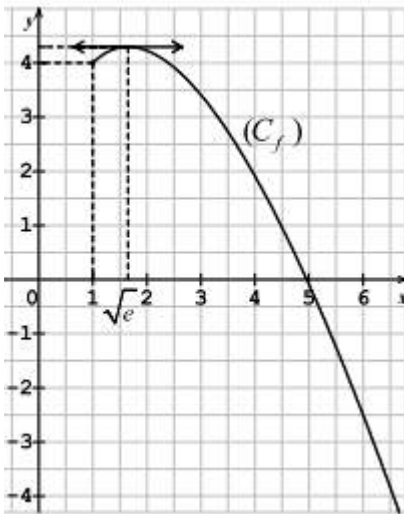
بـ استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها .

(3) أرسم المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  . (تأخذ  $f(\alpha) = 3,9$ ) .

(4) أـ عين مشتقة الدالة :  $x \mapsto [\ln(x-1)]^2$  ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$  .

بـ أحسب :  $\int_2^5 f(x) dx$  ، فسر النتيجة هندسيا .





التمثيل البياني ( $C_f$ ) المقابل هو للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty[$  بالعلاقة:

$$f(x) = ax + b + cx \ln x \text{ حيث } a, b, c \text{ أعداد حقيقية.}$$

(1) خمن بقراءة بيانية إتجاه تغير  $f$  ونهاية  $f$  عند  $+\infty$ .

(2) أـ أحسب بدلالة  $a$  و  $c$  عبارة  $f'(x)$  حيث  $f'$  هي الدالة المشتقة

للدالة  $f$  على  $[1; +\infty[$ .

بـ باستعمال معطيات في الشكل، وعلما أن  $f(5) = 16 - 10 \ln 5$ .

$$\text{بين أن: } f(x) = 3x + 1 - 2x \ln x$$

جـ. تحقق من صحة تخمينك في السؤال 1، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(3) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على  $]-\infty; 1[$ ، ثم

$$\text{تحقق أن } 4,95 < \alpha < 4,96.$$

(4) نعرف العدد الحقيقي  $S$  كما يلي:  $S = \int_1^{\alpha} f(x) dx$  (حيث  $\alpha$  هو حل المعادلة  $f(x) = 0$ )

أـ بين أن الدالة  $g: x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $[1; +\infty[$ .

بـ أعط تفسيراً هندسياً للعدد  $S$ ، ثم أحسبه بدلالة  $\alpha$ .

جـ. بين أن:  $S = \frac{1}{2} \alpha(\alpha + 1) - 3$ ، ثم استنتج حصراً للعدد  $\alpha$ .

(I) الدالة العددية  $g$  معرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2}$ .

(1) عين، تبعا لقيم  $x$ ، إشارة  $g(x)$ .

(2) أـ تحقق أنه، من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$ .

بـ. استنتج الدوال الأصلية للدالة  $g$  على  $]0; +\infty[$ .

(II) الدالة العددية  $f$  معرفة على المجال  $]0; 8[$  كما يلي:  $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x} + \ln x$ .

و ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أـ تحقق أن  $f$  هي الدالة الأصلية للدالة  $g$  على المجال  $]0; 8[$  والتي تنعدم عند 1.

بـ. استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; 8[$ .

جـ. أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

دـ شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(2) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين، أحدهما  $\alpha$ ، حيث:  $3,8 < \alpha < 3,9$ .

(3) مثل بيانياً ( $C_f$ ).

(III) الدالة العددية  $h$  معرفة على  $]-\frac{2}{3}; 2[$  كما يلي:  $h(x) = f(3x + 2)$ .

(1) بين أنه إذا كان  $-\frac{2}{3} < x \leq 0$  فإن  $0 < 3x + 2 \leq 2$  وإذا كان  $0 \leq x \leq 2$  فإن  $2 \leq 3x + 2 \leq 8$ .

(2) أحسب  $h'(x)$ . (عبارة  $h(x)$  غير مطلوبة)

(3) شكل جدول تغيرات  $h$ .

(I) الدالة العددية  $g$  معرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$ .

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$ .

(2) أحسب  $g(1)$  ثم استنتج تبعا لقيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

(II) الدالة العددية  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$ .

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (يعطى  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ )

ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(2) أ- بين أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  فإن:  $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(3) أ- بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

ب- أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(D)$ .

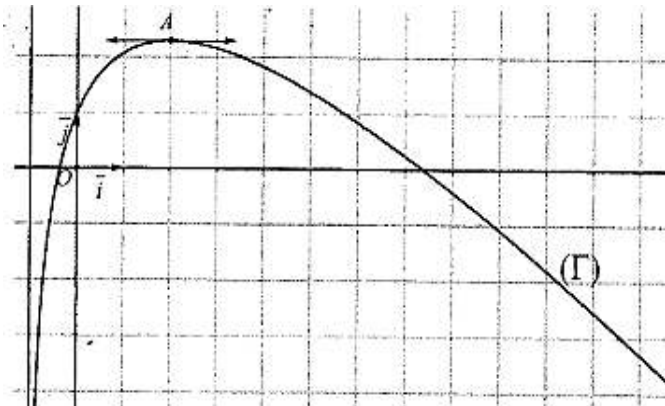
(4) عين فاصلة النقطة  $A$  من  $(C_f)$  التي يكون فيها المماس  $(T)$  موازيا للمستقيم  $(D)$  ثم أكتب معادلة للمماس  $(T)$ .

(5) أرسم  $(D)$ ،  $(T)$  و  $(C_f)$ .

(6) أحسب القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[1; 3]$ .

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(I)  $f$  دالة معرفة على المجال  $] -1; +\infty[$  ب:  $f(x) = ax + b + 3 \ln(x+1)$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان.



( $\Gamma$ ) التمثيل البياني للدالة  $f$ ، المعطى في الشكل

المقابل، يقبل في النقطة  $A(2; -1 + 3 \ln 3)$  مماسا

موازيا لحامل محور الفواصل.

(1) بقراءة بيانية:

أ- ضع تخميناً حول  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(2) باستعمال المعطيات المتوفرة، جد قيمة كل من  $a$  و  $b$ .

(II) نعتبر في هذا الجزء:  $f(x) = -x + 1 + 3 \ln(x+1)$ .

(1) أحسب نهاية الدالة  $f$  عند  $-1$  بقيم أكبر.

(2) أحسب نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$ . (يعطى:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$ )

(3) أ- عين النقطة  $B$  من المنحنى  $(\Gamma)$  التي يكون فيها المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\Gamma)$  موازيا للمستقيم الذي معادلته  $y = x$ ، ثم

أكتب معادلة للمماس  $(T)$ .

ب- استنتج بيانياً، قيم العدد الحقيقي  $m$  التي تقبل من أجلها المعادلة  $f(x) = x + m$  حلين موجبين تماماً.

(4)  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $] -1; +\infty[$  ب:  $g(x) = (x+1) \ln(x+1) - x$

أ- أحسب  $g'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $] -1; +\infty[$ .

ب- لتكن  $\alpha$  و  $\beta$  فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى  $(\Gamma)$  مع حامل محور الفواصل،

بين أن:  $\alpha \in ]7, 37; 7, 38[$  و  $\beta \in ]-0, 37; -0, 36[$ .

ج- أحسب  $S$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(\Gamma)$  و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما:  $x = \alpha$  و  $x = 0$ .

د- تحقق أن:  $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right)ua$  ، ثم عين حصرا لـ  $S$  . ( وحدة مساحة )

(III) تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر .

تمنذج الكلفة الهامشية  $C_m$  (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال  $[0; 7]$  بالدالة  $f$  المعرفة في الجزء (II) ، أي من أجل  $x \in [0; 7]$  لدينا  $C_m(x) = f(x)$  .  
نرمز بـ  $C_T(x)$  إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج  $x$  قطعة .

- (1) عين عبارة الكلفة الإجمالية  $C_T(x)$  علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي  $\frac{5}{2}$  .
- (2) قدر الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة .

[باك 2016] [م1] [7,5] (ن)

التعريف [7]

(I)  $g$  دالة عددية معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = ax + b + \ln x$  حيث  $a$  و  $b$  عددان حقيقيان .

$$(1) \text{ عين } a \text{ و } b \text{ بحيث : } g(1) = 2 \text{ و } g'(2) = \frac{3}{2} .$$

$$(2) \text{ نضع : } g(x) = x + 1 + \ln x$$

$$\text{أ- أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها .

ج- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا حقيقيا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $0,2 < \alpha < 0,3$  .

د- حدد تبعا لقيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$  .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$  ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  .

$$(2) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ . (يعطى : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{)}$$

(3) تحقق أن :  $f(\alpha) = -\alpha$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

(4) أحسب  $f(1)$  و  $f(5)$  ثم أرسم  $(C_f)$  على المجال  $[0; 5]$  .

[باك 2016] [م2] [7] (ن)

التعريف [8]

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = -4 + 2x(1 + \ln x)$

$$(1) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \text{ . (يعطى : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{)}$$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $]0; +\infty[$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1,4 < \alpha < 1,5$  .

(4) حدد إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = (2x - 4) \ln x$  .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

$$(1) \text{ أ- أحسب } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ . فسر النتيجة هندسيا .}$$

$$\text{ب- أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) عين نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل .

(4) أ- أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب- أنشئ  $(T)$  و  $(C_f)$  . (تعطى :  $f(\alpha) \approx 0,41$ )

(5) نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  ب:  $F(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x$  .

أ- بين أن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلاتها :  $x = 1, y = 0$  و  $x = 2$  .

[بأك 2017] [م1] [8 ن]

التعريف [9]

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = x^2 + 3 \ln x - 3$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  .

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1,40 < \alpha < 1,41$  ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  ب:  $f(x) = x + 1 - \frac{3 \ln x}{x}$  .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  .

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أ- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  .

ب- أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  .

(5) أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  . (تعطى :  $f(\alpha) \approx 1,68$ )

(6) أ- بين أن الدالة  $h$  حيث  $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$  أصلية للدالة  $\frac{\ln x}{x}$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

ب- أحسب  $S$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلاتها :  $x = 1, x = e$  و  $y = x + 1$  .

[بأك 2018] [م1] [8 ن]

التعريف [10]

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $] -2; 8[$  ب:  $f(x) = \ln(x+2) + \ln(-x+8) - \ln 16$

و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  . نأخذ الوحدة البيانية :  $2cm$  .

(1) أحسب نهايتي الدالة  $f$  عند طرفي مجموعة التعريف  $] -2; 8[$  وفسّر النتيجة بيانيا .

(2) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $] -2; 8[$  :  $f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$  . (هي الدالة المشتقة للدالة  $f$ )

(3) أدرس إشارة  $f'(x)$  على المجال  $] -2; 8[$  و شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

(4) عين نقط تقاطع  $(C_f)$  مع محوري الإحداثيات .

(5) بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $] -2; 8[$  :  $(6-x)$  ينتمي إلى  $] -2; 8[$  و  $f(6-x) = f(x)$  ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

(6) أرسم المنحنى  $(C_f)$  .

(7) لتكن الدالة العددية  $F$  المعرفة على المجال  $] -2; 8[$  ب:  $F(x) = (x+2) \ln(x+2) + (x-8) \ln(-x+8) - 2x - x \ln 16$

بين أن  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على المجال  $] -2; 8[$  .

(8) أحسب بـ  $cm^2$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلاتها :  $x = 0, x = 4$  و  $y = 0$  .