

مدالة اللوغاريتم النيبيري



لقد تمكنا من تقرير عمر اللوحات والنقوش المكتشفة في كهف لاسكو بفرنسا بفضل التأريخ بالكربون 14. عندما يموت كائن حي، تقل نسبة الكربون 14 الذي يحتويه بالنسبة للمواد المحيطة بمرور الوقت: نقول أن الكربون يتبع **قانون التناقص الإشعاعي**. يتم حساب عمر فحم الخشب، وبالتالي لوحات الكهوف، باستخدام **اللوغاريتم النيبيري**، نرمز له بـ $\ln$ حيث: $t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right)$ ، حيث t هو الزمن، $A(t)$ عدد ذرات الكربون 14 المضمحلة بدلالة الزمن و A_0 و λ هما ثابتان موهيات تمامًا.

تجدون في هذا الملف

1 الدرس

2 تطبيقات محلولة

3 طرائق هامة لحل التمارين

4 مسائل محلولة من ★ إلى ★★★★★

+ لمزيد من الأعمال...



- قرص الجامع في الرياضيات
- قرص EXTRA BAC
- أولمبياد الرياضيات
- حوليات شهادة البكالوريا مع الحل
- فروض واختبارات محلولة لكل المستويات

1 تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

[1]

تعريف: نسمي الدالة اللوغاريتمية النيبيرية الدالة التي نرمز لها بـ $\ln$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$ ونكتب $f(x) = \ln x$

خواص:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b, \quad \ln(a \times b) = \ln a + \ln b, \quad \ln e = 1, \quad \ln 1 = 0$$

$$e^{\ln a} = a, \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a, \quad \ln a^n = n \ln a$$

$$a \geq b \text{ يعني } \ln a \geq \ln b, \quad a < b \text{ يعني } \ln a < \ln b, \quad a = b \text{ يعني } \ln a = \ln b$$

$$0 < a < 1 \text{ يعني } \ln a < 0 \text{ و } a > 1 \text{ يعني } \ln a > 0$$

$$\ln x^n = \begin{cases} n \ln |x| & \text{زوجي } n \\ n \ln x & \text{فردى } n \end{cases} \quad \text{تنبيه: من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } \mathbb{R} : \ln x^2 = 2 \ln |x| \text{ وبصفة عامة:}$$

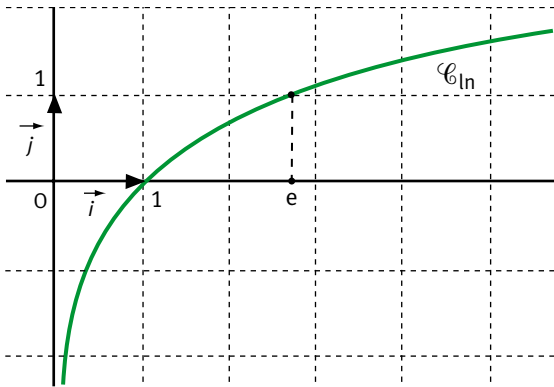
دراسة تغيرات الدالة اللوغاريتمية:

1 مجموعة التعريف: لدينا $f(x) = \ln x$ وهي معرفة من أجل $x > 0$ أي $D_f =]0; +\infty[$

2 النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

4 التمثيل البياني :

3 جدول التغيرات : [2]



x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			+	
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

الانتقال
الى الحل

تطبيق 01:

(1) $\ln 3 + \ln \frac{1}{3}$ (2) $\ln \sqrt{\sqrt{2}+1} + \ln \sqrt{\sqrt{2}-1}$ (3) $\ln \sqrt{e^3} - \ln \frac{\sqrt{e}}{e^2}$ (4) $\ln (128)^2 - \ln (16 \times 32)$

الحل:

2

 [1]



تطبيق 02:

(3

(2)

(1)

(6)

(5

(4)

(9)

(8)

(7)

الحل:

3

 [5]

ولا نحتفظ من هذه الحلول إلا بتلك التي تنتمي إلى المجموعة D .

تط

الحل:

[1]: سلسلة تمارين حول الدوال اللوغاريتمية (بخدة أمين)

الانتقال

➔ إلى الحل

 [5]

 [6]

 [4]

 [3]

تطبيق 04:

$$-1 \leq \ln x \leq 2 \quad (1)$$

$$\ln x + \ln(x-1) > \ln 6 \quad (6) \quad (x^2 - 4x) \ln x \geq 0 \quad (5)$$

الحل:

4

إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I

 [1]



الس الحل

أحسب الدالت المشتقة في كل حالة

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln x \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 5e^x + 6) \quad (2)$$

الحل:

5

 [1]

الحل:

[illegible]



Handwriting practice lines consisting of 25 horizontal dotted lines.

6

 [1]

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

 $\log 10 = 1$, $\log 1 = 0$ ◀

◀ إذا كان x عددا حقيقيا حيث : $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$ فإن $n \leq \log x \leq n+1$

💡 كل الخواص الجبرية للدالة $\ln$ تبقى صحيحة من قبل الدالة $\log$

الس حل

 [3]

• نعتبر العدد الطبيعي n حيث $n = 2^{1234}$

(1) عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.

(2) استنتج الحصر التالي: $10^{371} \leq n < 10^{372}$.

(3) ما هو عدد أرقام العدد 2^{1234}

This image shows a full page of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a template for handwriting practice or general writing. There are no margins, text, or other markings on the page.

7 بعض استعمالات اللوغاريتم العشري :

في علم الزلازل:

الانتقال
إلى الحل

[5]

تطبيق 09:

- يشير المقدار I_0 إلى شدة قاعدية مرجعية، وعندما نقول إن درجة زلزال شدته I تساوي M .
- ◀ إذا كان $M = \log(I/I_0)$ ، فما درجة الزلزال الذي وقع في لوس أنجلوس عام 1971 إذا علمت أن $I = 50.01 \times 10^6 I_0$.

الحل:

في الكيمياء:

الانتقال
إلى الحل

[7]

تطبيق 10:

معدل الحموضة pH في محلول			
			
عصير البرتقال pH = 3	أمطار حمضية pH = 4.5	أمطار صافية pH = 5.6	مياه بحيرة pH = 6.5

- يُقاس التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في محلول معيّن من خلال صيغة pH

$$\text{المعرّفة كما يلي: } \text{pH} = \log \frac{1}{[\text{H}^+]}$$

حيث $[\text{H}^+]$ التركيز المولي لأيونات الهيدروجين بوحدة المول لكل لتر (mol/L).

- ◀ أوجد التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية.

الحل:

أتمم مايلي: [6]

a. $\ln(e^{-5}) = \dots$

b. $e^{\ln(\frac{1}{2})} = \dots$

c. $\ln(\dots) = -1$

d. $\ln(e^{\dots}) = \frac{1}{e}$

e. $e^{\ln(\dots)} = \sqrt{2}$

f. $\ln(\dots) = \frac{3}{7}$

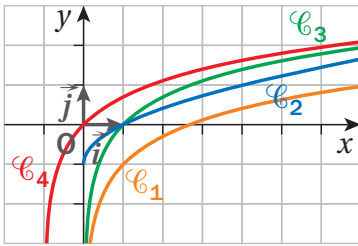
أكمل بعلامة = أو $\neq$ مايلي:

$\ln(6) + \ln(11) \dots \ln(17)$

$\ln(8) - \ln(4) \dots \ln(2)$

$\ln(7) \times \ln(9) \dots \ln(63)$

$\ln[(\sqrt{2} - 1)^{142}] + \ln[(\sqrt{2} + 1)^{142}] \dots 0$



اختر الإجابة الصحيحة:

من بين المنحنيات المقابلة ، أي منها يمثل الدالة اللوغاريتمية النيبيرية؟

☐ C_4 ☐ C_3 ☐ C_2 ☐ C_1

أجزاء مفقودة:

وجد معاذ تمريناً في الرياضيات مع حله ، لكنه يتضمن أجزاء غير مقروءة بسبب ملامسته للحبر. ساعد معاذ على إيجاد الأجزاء التي خالطت بقع الحبر.

النص

أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

$\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

الحل

من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

$$\begin{aligned} x + \ln(1 + e^{-x}) &= \ln(\dots) + \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \ln(e^x (\dots)) \\ &= \ln(\dots + e^{x-x}) \\ &= \ln(e^x + 1) \end{aligned}$$

أجب بـ "صح" أو "خطأ": [4] [6]

☐ $e^{5\ln(2)} \times e^{7\ln(4)} = 2^{19}$ 1

☐ الدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ 2

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم α فإن 3

☐ $\ln 2^\alpha = \ln \alpha^2$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x : 4

☐ $\ln|x| > 0$

إذا كان $|x| < 1$ فإن $\ln|x| < 0$: 5

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ 6

☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(-x)] = +\infty$ 7

☐ $\ln(-2)^{1830} = 1830 \ln 2$ 8

☐ $\frac{\ln 12}{\ln 3} = \ln \frac{12}{3} = \ln 4$ 9

للمعادلة $x \ln(x) = 3 \ln(x)$ في المجال $]0 ; +\infty[$ 10

حلان مختلفان هما : 1 و 3. ☐

من أجل كل عددين حقيقيين موجبان تماماً : 11

☐ $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$

من أجل كل عددين حقيقيين موجبان تماماً : 12

☐ $\ln(a) \times \ln(b) = \ln(a \times b)$

☐ $(\ln(a))^n = n \ln(a) : n \in \mathbb{N}, a > 0$ 13

x و y عددين حقيقيين غير معدومين : 14

☐ إذا كان $\ln(x^2) = \ln(y^2)$ فإن $x = y$

وضح إشارة كل عدد حقيقي مما يلي:

☐ $\ln(3)$ ☐ $\ln(0,5)$ ☐ $\ln(1,01)$

☐ $\ln(0,95)$ ☐ $\ln(e^{-1})$ ☐ $\ln(\sqrt{2})$

الانتقال
إلى الحل



في أقل من دقيقة!

أرفق كل عبارة دالة بالتمثيل البياني الموافق لها:

1. $f(x) = \ln(x) + 3$

2. $g(x) = |\ln(x)|$

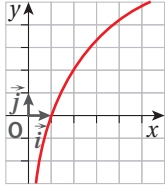
3. $h(x) = 3\ln(-x)$

4. $k(x) = \sqrt{\ln(x)}$

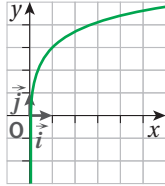
5. $l(x) = \ln(x^3)$

6. $m(x) = \ln(x + 3)$

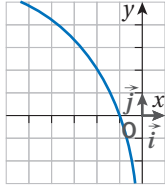
a. ☐



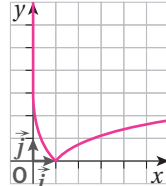
b. ☐



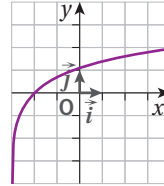
c. ☐



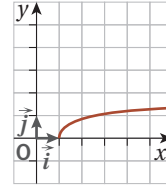
d. ☐



e. ☐



f. ☐



أسئلة الاختيار من متعدد: لكل سؤال من الأسئلة التالية، ضع إطار حول الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة.

	A	B	C	D
01 $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \dots$	$-\ln(6)$	$\ln(6)$	$\ln\left(\frac{1}{6}\right)$	$\ln\left(\frac{5}{6}\right)$
02 $\ln(10e^2) = \dots$	$2\ln(10) + 2$	4,302 585 093	$2\ln(10e)$	$\ln(10) + 2$
03 $e^{\ln(a) + \ln(b)} = \dots$	ab	$a + b$	$\frac{a}{b}$	$a + \ln(b)$
04 $\ln(5a) - \ln(a) = \dots$	$\ln(4a)$	$\ln(5)$	$4\ln(a)$	$\ln(5a - a)$
05 $\ln(e + e^2) = \dots$	$\ln(e) + \ln(e^2)$	$\ln(e + 1) + 1$	$\ln(e^3)$	$\ln(3e)$
06 $\ln(64) = \dots$	$2\ln(8)$	$\ln(2) \times \ln(32)$	$6\ln(2)$	$\ln(4) + \ln(16)$
07 الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$ 1. صورة $\ln(2)$ بـ f هي:	$-2\ln(2)$	$\ln(2)$	$\frac{1}{2}\ln(2)$	$2\ln(2)$
2. صورة $\ln(e^3)$ بـ f هي:	$3e^{-3}$	$\frac{3\ln(e)}{e^3}$	$-3e^{\ln(3)}$	$\frac{3}{e^3}$
08 $g(x) = \ln(\ln(x))$. $D_g =]1; +\infty[$ $g'(x) = \dots$	$\frac{1}{\ln(x)}$	$\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln(x)}$	$\frac{1}{x} \ln(x)$



[5]

[4]

[3]

تطبيق 01:

$$\ln 3 - \ln 3 = 0 \quad 1$$

$$\ln \sqrt{\sqrt{2}+1} + \ln \sqrt{\sqrt{2}-1} = \ln \left(\sqrt{\sqrt{2}+1} \right) \left(\sqrt{\sqrt{2}-1} \right) = \ln \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \ln \sqrt{2-1} = \ln 1 = 0 \quad 2$$

$$\ln \sqrt{e^3} - \ln \frac{\sqrt{e}}{e^2} = \ln(e^3)^{\frac{1}{2}} - \ln e^{\frac{1}{2}} + \ln e^2 = \ln e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \ln e + 2 \ln e = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2 = 3 \quad 3$$

$$\ln(128)^2 - \ln(16 \times 32) = \ln(2^7)^2 - \ln(2^4 \times 2^5) = \ln 2^{14} - \ln 2^9 = 14 \ln 2 - 9 \ln 2 = 5 \ln 2 \quad 4$$



[5]

[4]

تطبيق 02:

$$\ln(x^2) \text{ معرف عندما } x^2 > 0, \text{ أي } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad 1$$

$$\ln(1-x) \text{ معرف عندما } 1-x > 0, \text{ أي } x < 1, \text{ إذن } x \in]-\infty, 1[\quad 2$$

$$\ln(x-3) \text{ معرف عندما } x-3 > 0, \text{ أي } x > 3, \text{ إذن } x \in]3, +\infty[\quad 3$$

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) \text{ معرف في حالة } (1+x > 0 \text{ و } x \neq 0) \text{ أي } (x > -1 \text{ و } x \neq 0), \text{ إذن } \quad 4$$

$$x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\} =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\frac{1}{\ln x} \text{ معرف في حالة } (x > 0 \text{ و } \ln x \neq 0) \text{ أي } (x > 0 \text{ و } x \neq 1), \text{ إذن } \quad 5$$

$$x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\ln(x^2 + 4x) \text{ معرف عندما } x^2 + 4x > 0. \text{ ثلاثي حدود من الدرجة الثانية، جذراه } \quad 6$$

$$\text{و } -4, \text{ فنتحقق المترابحة } x^2 + 4x > 0 \text{ خارج هذين الجذرين، بمعنى أن } x \mapsto \ln(x^2 + 4x) \text{ معرف على }]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[.$$

$$-x > 0 \text{ تكافئ: } x < 0 \text{ ومنه: } D =]-\infty; 0[\quad 7$$

$$\ln|x+1| - \ln|x-1| \text{ معرف في حالة } x+1 \neq 0 \text{ و } x-1 \neq 0 \text{ أي على } \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}, \quad 8$$

$$\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right) \text{ معرف عندما } \frac{x-3}{2-x} > 0. \text{ أي على المجال }]2, 3[. \quad 9$$



[3] [4] [6]

تطبيق 03:

1 هذه المعادلة معرفة من أجل $x > 0$ أي $D =]0, +\infty[$ $2\ln x = \ln 9$

$2\ln x = \ln 9$ تكافئ $2\ln x = 2\ln 3$ ومنه $x = 3$ وأخيرا $S = \{3\}$.

2 لدينا : $\ln x^2 = 4$ مجموعة التعريف : $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ ومنه : $D = \mathbb{R}^*$

وعليه المعادلة تكافئ : $\ln x^2 = 4 \ln e$ أي : $\ln x^2 = \ln e^4$ ومنه : $x^2 = e^4$ أي : $x = e^2$ أو $x = -e^2$
إذن الحلول هي : e^2 , $-e^2$

3 لدينا : $\ln x - \ln(x-2) = 1$ مجموعة التعريف : $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0; x > 2\}$

ومنه : $D =]2; +\infty[$ وعليه المعادلة تكافئ : $\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = \ln e$ أي أن : $\frac{x}{x-2} = e$ ومنه : $x = xe - 2e$

إذن : $(1-e)x = -2e$ ومنه : $x = \frac{-2e}{1-e}$ مقبول (لأن $\frac{-2e}{1-e} > 2$).

4 $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$ مجموعة التعريف : $\ln x = X$; $x > 0 \Rightarrow D =]0; +\infty[$

$(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0 \Rightarrow X^2 - X - 6 = 0 \Rightarrow (X-3)(X+2) = 0$

$\Rightarrow X = 3$ أو $X = -2 \Rightarrow x = e^3$ أو $x = e^{-2}$; $\begin{cases} e^{-2} \in D \\ e^3 \in D \end{cases} \Rightarrow S = \{e^{-2}; e^3\}$

5 $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

المعادلة معرفة على $I = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ وهي تكافئ $|x-2||x+2| = 1$ أو $|x^2 - 4| = 1$ فإمّا

أن يكون $x^2 = 5$ أو يكون $x^2 = 3$. فمجموعة حلول المعادلة المعطاة هي $S = \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$



[3] [4] [6] [5]

تطبيق 04:

1 $-1 \leq \ln x \leq 2$ المتراجحة $-1 \leq \ln x \leq 2$ معرفة من أجل $x > 0$ أي $D =]0, +\infty[$

$-1 \leq \ln x \leq 2$ تكافئ $e^{-1} \leq x \leq e^2$ أي $S = \left[\frac{1}{e}, e^2\right]$

2 المتراجحة $\ln(x^2-1) \geq 0$ معرفة من أجل $x^2-1 > 0$ أي $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$\ln(x^2-1) \geq 0$ تكافئ $(x^2-1) \geq 1$ أي $x^2 \geq 2$ أي $x \geq \sqrt{2}$ أو $x \leq -\sqrt{2}$ إذن $S =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

3 لدينا : $\ln|x| < 1$ مجموعة التعريف : $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ و المتراجحة تكافئ : $\ln|x| < \ln e$

ومنه : $|x| < e$ إذن : $-e < x < e$ وعليه حلول المتراجحة هي المجموعة : $]-e; 0[\cup]0; e[$.

4 $(\ln x)^2 - 1 \leq 0$; $D =]0; +\infty[$

$(\ln x)^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \ln x \leq 1$

$\Rightarrow e^{-1} \leq x \leq e \Rightarrow S = [e^{-1}; e]$

تتبع

5 لدينا : $\ln x \geq 0$ ($x^2 - 4x$) مجموعة التعريف : $D =]0; +\infty[$

x	0	1	4	$+\infty$
$x^2 - 4x$	-	-	0	+
$\ln x$	-	0	+	+
$(x^2 - 4x) \ln x$	+	0	-	+

مجموعة حلول المتراجحة : $]0; 1] \cup [4; +\infty[$.

6 لدينا : $\ln x + \ln(x-1) > \ln 6$ مجموعة التعريف : $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x > 1\}$ حيث : $D =]1; +\infty[$

و المتراجحة تكافئ : $\ln x(x-1) < \ln 6$ إذن : $x^2 - x > 6$

وعليه : $x^2 - x - 6 > 0$ ومنه : $\Delta = 25$ ، $x_1 = -2$ ، $x_2 = 3$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	0	-	+

وعليه حلول المتراجحة هي المجموعة : $] -\infty; -2[\cup]3; +\infty[$

لكن $D =]1; +\infty[$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي : $]3; +\infty[$



تطبيق 05 : [3] [4] [5]

1 لدينا : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln x$ الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث : $f'(x) = x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x}$

2 الدالة f تقبل الاشتقاق على $] \ln 3; +\infty[\cup] -\infty; \ln 2[$ حيث : $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

3 $h(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$. h معرفة على $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

$h'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2 - 1}$ ومنه $h(x) = \ln \frac{x-1}{x+1} = \ln|x-1| - \ln|x+1|$

4 الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[\cup]-\infty; 0[$ حيث : $f'(x) = 1 \ln|x| + x \times \frac{1}{x} = \ln|x| + 1$

5 الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث: $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x) = \frac{\ln x}{x}$

6 $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2 \ln x$. f معرفة على $]0, +\infty[$ و $D_f =]0, +\infty[$ و $f'(x) = \frac{4-x}{2x}$

7 $k(x) = \frac{x}{1-\ln x}$. k معرفة على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ و $k'(x) = \frac{1 \times (1-\ln x) - \left(-\frac{1}{x}\right)x}{(1-\ln x)^2} = \frac{2-\ln x}{(1-\ln x)^2}$

8 $f(x) = \frac{e}{\ln x}$. f معرفة على $]0, +\infty[$ و $D_f =]0, +\infty[$ و $f'(x) = -\frac{e}{x(\ln x)^2}$



تطبيق 06: [2] [4] [5]

1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{1}{x} \ln x \right) = +\infty$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$

3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x \ln x} = -\infty$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right) = -\infty$

5 $\frac{\ln(x+1)}{x^2} = \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x}$ لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty$

وعليه : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right) = +\infty$

6 في جوار $+\infty$ لدينا $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right) \times \frac{x}{\ln x}$ ولكن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} \right) = +\infty$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\tau)}{\tau} = 1$ (بوضع $\frac{1}{x} = \tau$) لما $x \rightarrow +\infty$ فإن $\tau \rightarrow 0^+$

تتبع

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(\sqrt{x})^2]^2}{(\sqrt{x})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2\ln(\sqrt{x})]^2}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0$$

(بوضع $\sqrt{x} = t$) لما : $x \mapsto +\infty$ فإن : $t \mapsto +\infty$

8



[3]

تطبيق 07:

1 $\log n = \log 2^{1234} = 1234 \log 2$ باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\log n \approx 371,47101....$

إذن الجزء الصحيح للعدد $\log n$ هو 371.

2 بمأن الجزء الصحيح للعدد $\log n$ هو 371 فإن $371 \leq \log n < 372$ ومنه $10^{371} \leq 10^{\log n} < 10^{372}$ ومنه $10^{371} \leq n < 10^{372}$.

3 لدينا $10^{371} \leq 2^{1234} < 10^{372}$ ومنه عدد أرقام العدد 2^{1234} هو إذن 372 رقما.



[5]

[4]

تطبيق 08:

1 نعلم أن $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$ ، إذن، $\log(10^n) = \frac{\ln 10^n}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$ ، ومنه

$\log(1) = 0$ و $\log(10) = 1$ و $\log(100) = 2$ و $\log(1000) = 3$ و $\log(10000) = 4$.

2 حساب S : $S = \log \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{88}{99} \times \frac{99}{1000} \right) = \log \left(\frac{1}{1000} \right) = -\log 1000 = -\log 10^3 = -3$

3 حل كل المعادلات و المترجمات :

• $\log 6 = \log x + \log(x-1)$ نكون المعادلة معرفة من أجل : $x > 0$ و $x-1 > 0$

ومن $x > 1$ و عليه فالمعادلة معرفة على $]1; +\infty[$ و المعادلة (1) تكافئ : $\log x(x-1) = \log 6$ و هي تكافئ : $x(x-1) = 6$

إذن : $x^2 - x - 6 = 0$ ومنه : $\Delta = 25$; $x_1 = -2$; $x_2 = 3$ و عليه للمعادلة حل وحيد $s = \{3\}$

• $2(\log x)^2 + 5\log x - 3 = 0$ المعادلة معرفة من أجل $x > 0$ بوضع $\log x = t$ نجد $2t^2 + 5t - 3 = 0$ ومنه :

$\Delta = 49$; $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = -3$ لما $t = \frac{1}{2}$: $\log x = \frac{1}{2}$ ومنه : $\frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{2}$ و عليه : $\ln x = \frac{1}{2} \ln 10$

ومنه : $\ln x = \ln \sqrt{10}$ و عليه : $x = \sqrt{10}$

لما $t = -3$: $\log x = -3$ و عليه : $\frac{\ln x}{\ln 10} = -3$ و عليه : $\ln x = \ln 10^{-3}$ ومنه : $x = 10^{-3}$

مجموعة حلول المعادلة هي : $s = \{\sqrt{10}; 10^{-3}\}$

تتبع

• $\log x > 3$ المتراجحة تكون معرفة من أجل $x > 0$ وهي تكافئ : $\frac{\ln x}{\ln 10} > 3$ أي : $\ln x > \ln 10^3$ وعليه : $x > 10^3$

مجموعة الحلول : $s =]10^3; +\infty[$

• $\log(x-6) > 2\log x$ تكون المتراجحة معرفة من أجل $x > 0$ و $x-6 > 0$ وعليه : $x > 6$ ومنه فهي معرفة على $]6; +\infty[$.
و المتراجحة تكافئ : $\log(x-6) > \log x^2$ وهي تكافئ : $x-6 > x^2$ إذن : $-x^2 + x - 6 < 0$ وعليه ليس للمتراجحة حلول .



[5]

تطبيق 09:

• حساب درجة زلزال لوس انجلس : $M = \log(I/I_0) = \log \frac{50.01 \times 10^6 I_0}{I_0} = \log(50.01 \times 10^6) \approx 7.7$



[7]

تطبيق 10:

• عوّض $\text{pH} = 4.5$ $4.5 = \log \frac{1}{[\text{H}^+]}$

قاعدة القسمة $4.5 = \log 1 - \log [\text{H}^+]$

أوجد قيمة $[\text{H}^+]$ $-4.5 = \log [\text{H}^+]$

اكتب بالصيغة الأسية $10^{-4.5} = \text{H}^+$

إذن، التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية هي $10^{-4.5} \text{ mol/L}$

8 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

أتمم مايلي: [6]

a. $\ln(e^{-5}) = -5$

b. $e^{\ln(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$

c. $\ln(e^{-1}) = -1$

d. $\ln(e^{\frac{1}{e}}) = \frac{1}{e}$

e. $e^{\ln(\sqrt{2})} = \sqrt{2}$

f. $\ln(e^{\frac{3}{7}}) = \frac{3}{7}$

أكمل بعلامة = أو $\neq$ مايلي:

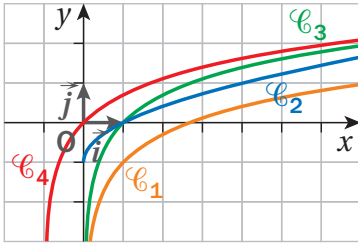
$\ln(6) + \ln(11) \neq \ln(17)$

$\ln(8) - \ln(4) = \ln(2)$

$\ln(7) \times \ln(9) \neq \ln(63)$

$\ln[(\sqrt{2}-1)^{142}] + \ln[(\sqrt{2}+1)^{142}] = 0$

اختر الإجابة الصحيحة:



من بين المنحنيات المقابلة ، أي منها يمثل الدالة اللوغاريتمية النيبيرية؟

☐ C4 ☒ C3 ☐ C2 ☐ C1

أجزاء مفقودة:

وجد معاذ تمريناً في الرياضيات مع حله ، لكنه يتضمن أجزاء غير مقروءة بسبب ملامسته للحبر. ساعد معاذ على إيجاد الأجزاء التي خالطت بقع الحبر.

النص

أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

$$\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x}).$$

الحل

من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

$$\begin{aligned} x + \ln(1 + e^{-x}) &= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \ln(e^x (1 + e^{-x})) \\ &= \ln(e^x + e^{x-x}) \\ &= \ln(e^x + 1) \end{aligned}$$

أجب بـ "صح" أو "خطأ": [4] [6]

☒ $e^{5\ln(2)} \times e^{7\ln(4)} = 2^{19}$ 1

☒ الدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ معرفة على $\mathbb{R}^*_+$ 2

3 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم α فإن

☒ $\ln 2^\alpha = \ln \alpha^2$

4 من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x :

☒ $\ln|x| > 0$

5 إذا كان $|x| < 1$ فإن $\ln|x| < 0$ ☒

☒ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ 6

☒ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(-x)] = +\infty$ 7

☒ $\ln(-2)^{1830} = 1830 \ln 2$ 8

☒ $\frac{\ln 12}{\ln 3} = \ln \frac{12}{3} = \ln 4$ 9

10 للمعادلة $x \ln(x) = 3 \ln(x)$ في المجال $]0; +\infty[$

حلان مختلفان هما: 1 و 3. ☒

11 من أجل كل عددين حقيقيين موجبان تماماً:

☒ $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$

12 من أجل كل عددين حقيقيين موجبان تماماً:

☒ $\ln(a) \times \ln(b) = \ln(a \times b)$

☒ $(\ln(a))^n = n \ln(a) : n \in \mathbb{N}, a > 0$ 13

14 x و y عددين حقيقيين غير معدومين:

☒ إذا كان $\ln(x^2) = \ln(y^2)$ فإن $x = y$

وضح إشارة كل عدد حقيقي مما يلي:

☒ $\ln(3)$ ☐ $\ln(0,5)$ ☒ $\ln(1,01)$

☐ $\ln(0,95)$ ☐ $\ln(e^{-1})$ ☒ $\ln(\sqrt{2})$



حل المراجعة السريعة



[6]

في أقل من دقيقة!

أرفق كل عبارة دالة بالتمثيل البياني الموافق لها:

1. $f(x) = \ln(x) + 3$

2. $g(x) = |\ln(x)|$

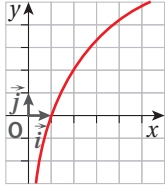
3. $h(x) = 3\ln(-x)$

4. $k(x) = \sqrt{\ln(x)}$

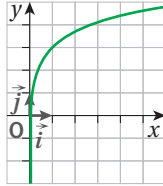
5. $l(x) = \ln(x^3)$

6. $m(x) = \ln(x + 3)$

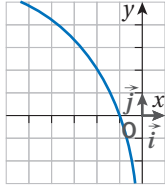
a. 5



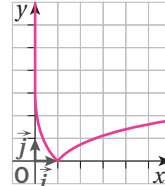
b. 1



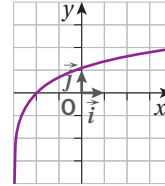
c. 3



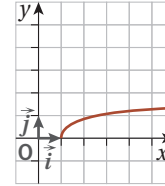
d. 2



e. 6



f. 4



أسئلة الاختيار من متعدد: لكل سؤال من الأسئلة التالية، ضع إطار حول الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة.

	A	B	C	D
01 $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \dots$	$-\ln(6)$	$\ln(6)$	$\ln\left(\frac{1}{6}\right)$	$\ln\left(\frac{5}{6}\right)$
02 $\ln(10e^2) = \dots$	$2\ln(10) + 2$	4,302 585 093	$2\ln(10e)$	$\ln(10) + 2$
03 $e^{\ln(a) + \ln(b)} = \dots$	ab	$a + b$	$\frac{a}{b}$	$a + \ln(b)$
04 $\ln(5a) - \ln(a) = \dots$	$\ln(4a)$	$\ln(5)$	$4\ln(a)$	$\ln(5a - a)$
05 $\ln(e + e^2) = \dots$	$\ln(e) + \ln(e^2)$	$\ln(e + 1) + 1$	$\ln(e^3)$	$\ln(3e)$
06 $\ln(64) = \dots$	$2\ln(8)$	$\ln(2) \times \ln(32)$	$6\ln(2)$	$\ln(4) + \ln(16)$
07 الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$ 1. صورة $\ln(2)$ بـ f هي:	$-2\ln(2)$	$\ln(2)$	$\frac{1}{2}\ln(2)$	$2\ln(2)$
2. صورة $\ln(e^3)$ بـ f هي:	$3e^{-3}$	$\frac{3\ln(e)}{e^3}$	$-3e^{\ln(3)}$	$\frac{3}{e^3}$
08 $g(x) = \ln(\ln(x))$. $D_g =]1; +\infty[$ $g'(x) = \dots$	$\frac{1}{\ln(x)}$	$\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln(x)}$	$\frac{1}{x} \ln(x)$

مسائل المستوى الأول



الانتقال

الى الحل

BAC

1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس . $\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري

1 أ- حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة : $f(x) = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب- حل $f(x)$ إلى جداء عاملين .

ج- حل في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة : $2\ln(x) + 2 \geq 0$.

2 أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

3 يبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

أحجية

01 ماضي المسافة القصوى التي يمكنك السفر

بها مع دراجة بثلاثة إطارات جديدة. علماً أن

كل إطار يجب استبداله بعد 6000 km ؟



الانتقال

الى الحل

الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

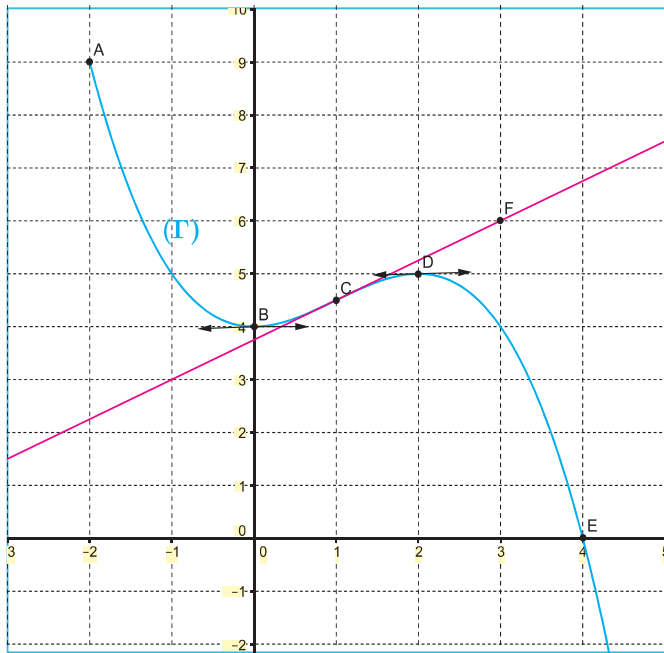
2

f الدالة المعرفة على المجال $[-2, 5]$ و (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ والذي يشمل النقط

$A(-2, 9), B(0, 4), C(1, \frac{9}{2}), D(2, 5), E(4, 0)$

في النقطتين B و D المماس للمنحنى (Γ) يوازي محور الفواصل.

المستقيم (CF) هو المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة C حيث $F(3, 6)$



1 بقراءة بيانية :

أ) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f حسب قيم x على المجال $[-2, 5]$.

ب) أحسب $f(0), f'(1), f'(2)$.

ت) أدرس حسب قيم x من المجال $[-2, 5]$ ، إشارة $f'(x)$.

ث) أدرس حسب قيم x من المجال $[-2, 5]$ ، إشارة $f(x)$.

2 أوجد مجموعة تعريف الدالة g حيث الدالة g

المعرفة بـ $g(x) = \ln(f(x))$.

3 أحسب $g(-2), g(0), g(2)$.

4 عين $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$

5 أحسب $g'(x)$ وانجز جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-2, 4]$.

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = -x^2 + x + 2\ln(x+1)$

(c) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 - أدرس تغيرات الدالة f .

2 - هل توجد مماسات للمنحنى (c) معامل توجيهها 3 حيث يطلب كتابة معادلاتها في حالة وجودها .

3 - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2 < x_0 < \frac{5}{2}$

4 - أنشئ المماسات ذات معامل التوجيه 3 ثم أنشئ (c) .

5 - نعتبر الدالة g المعرفة بالعلاقة : $g(x) = -x^2 + |x| + 2\ln(|x|+1)$

أ - أثبت أن g دالة زوجية .

ب - أكذب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

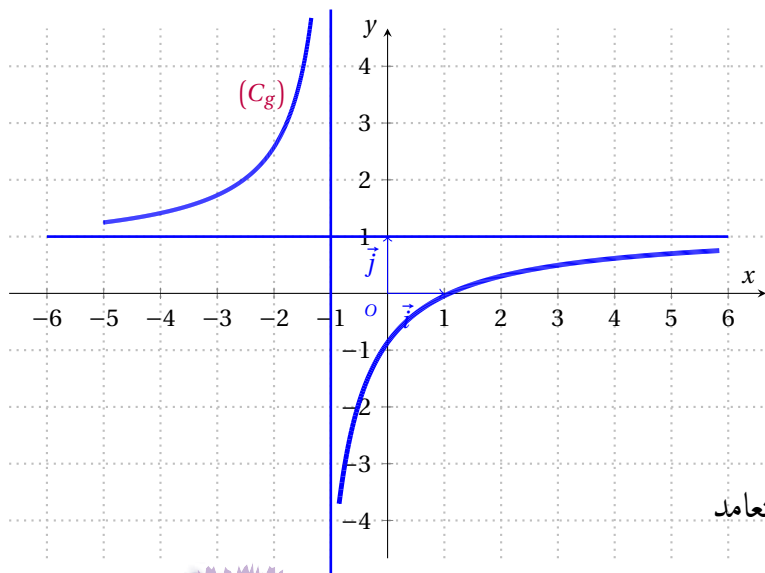
ج - أنشئ التمثيل البياني (γ) للدالة g انطلاقا من (c) .

أدجية

02 أحد قطعي الذهبية التسع مزيقة.

هبي أكثر وزناً من الأخرى.

• كيف يمكن العثور عليها باستعمال ميزان ذو كفتين مرتين فقط.



I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل) بقراءة بيانية :

أ) شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب) حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$.

ج) عين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$

II - لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2 أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$: $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

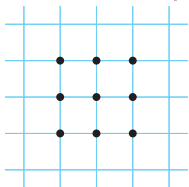
ب) أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

أدجية

03 كيف نربط بين النقاط

التسع برسم أربعة أضلاع

و بدون رفع القلم ؟



- I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln x$

1 أدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

2 احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

- II- f دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{-1 + \ln x}{x} - 2x + 2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 2e$ مقارباً مائلاً له عند $+\infty$.

ج- حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2 أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3 أ- أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_0 في المجال $]0, 4; 0, 5[$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f) .

أحيّة

04

منبه وينعكس في مرآة. نقرأ

الساعة 03:00 عليه، بينما تشير

صورته إلى الساعة 09:00.

● جد توقّيتاً على المنبه بحيث

يكون فرق القراءة بين الإثنين هو 3 ساعات.



أولمبياد الرياضيات مقاطعة باريس

مسائل المستوى الثاني

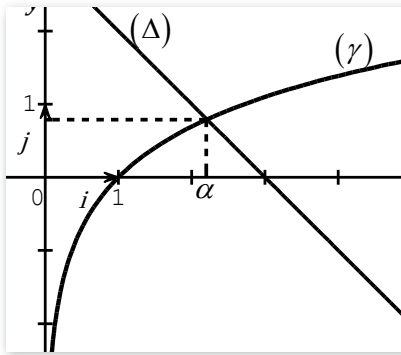


الانتقال

إلى الحل

علوم تجريبية 2015 الموضوع الأول (06.5 نقطة) ★★

1



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 (I) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة

$y = -x + 3$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (γ) .

1 بقراءة بيانية حدّد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0; +\infty[$.

2 الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3 تحقّق أن: $2,2 < \alpha < 2,3$.

(II) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2 أثبت أنّه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 بيّن أنّ: $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ ثمّ استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

4 ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ؛ ثمّ أنشئ (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

(III) الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقّق: $F(1) = -3$.

1 بيّن أنّ منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما.

2 بيّن أنّ $x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$ ؛ ثمّ استنتج عبارة الدالة F .

الانتقال

إلى الحل

علوم تجريبية 2012 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★

2

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6 \ln \left(\frac{x}{x-1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثمّ فسر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 أ/ بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3 أ/ بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4 بين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $-3.5 < \alpha < -3.4$ و $-1 < \beta < -1.1$

5 أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

6 أ/ نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

بين أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكرتية للمستقيم (AB) .

ب/ بين أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتها.

7 لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6 \ln(1-x)$

- بين أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

3 علوم تجريبية 2017 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★ الانتقال إلى الحل

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على D حيث $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$: $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 بين أن الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا.

2 احسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب.

3 أ/ بين أنه من أجل كل x من D ، $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

4 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$.

5 بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية

المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

6 أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

7 m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$.

05 يتدرّب ثلاثة عدائيد A, B و C للماراثون. في نفس الوقت B يتواجد بين A و C ، A يتواجد بين B و C ، و C يتواجد بين A و B. كيف يمكن أن يحدث هذا ؟

4 علوم تجريبية 2018 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★ الانتقال إلى الحل

(I) g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ ب:

$$g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$$

كما هو مبين في الشكل المقابل:

- احسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

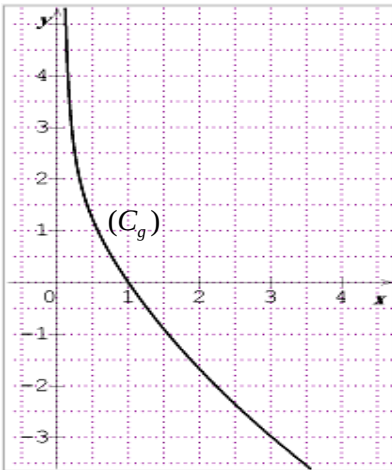
(II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$$

ب: (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

ثم فسّر النتيجة بيانيا.



تتبع

2 أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x \ln x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3 بيّن أنّ $y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور

الفواصل، ثم ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f) .

4 عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلّين متمايزين.

(III) n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f)

والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1 بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1+n \ln n)$.

2 ادرس اتجاه تغير المتتالية (I_n) .

الانتقال

إلى الحل

★★

علوم تجريبية 2009 الموضوع الثاني (07 نقاط)

BAC

5

(I) h دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

2 بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة h ، ثم أنجز جدول تغيراتها.

3 احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

(II) لتكن f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أنّ $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

ج) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

د) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

2 بين أنّه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 بين أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4

4 ارسم (C_f)

5 احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتيها:

$x = 1$ و $x = 0$; $y = x - 1$

مسائل المستوى الثالث

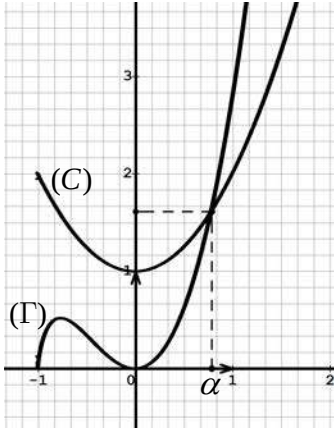


الانتقال

الى الحل

رياضيات 2021 الموضوع الثاني (07 نقاط) BAC

1



المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

في الشكل المقابل (C) و (Γ) هما على الترتيب التمثيلان البيانيان للدالتين العدديتين المعرفتين على المجال $]-1; +\infty[$ بـ:

$$x \mapsto 1+x^2 \quad \text{و} \quad x \mapsto 2x(1+x)\ln(1+x)$$

(C) و (Γ) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α تُحقّق: $0,78 < \alpha < 0,79$

الدالة العددية g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$$

1 بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x من المجال $]-1; +\infty[$ وضعية (C) بالنسبة إلى (Γ)

2 استنتج حسب قيم x من المجال $]-1; +\infty[$ إشارة g(x)

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة: 2 cm)

1 أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

ب. فسّر النهايتين هندسياً.

2 أ. بين أنّه من أجل كلّ x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

ج. بين أنّ: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ ثم استنتج حصراً لـ f(α)

د. اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند المبدأ O

3 ارسم (T) و (C_f) (نأخذ: f(α) ≈ 0,36)

4 الدالة العددية h معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = \frac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بين أنّ الدالة h زوجية.

ب. بين أنّ الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند الصفر ثم فسّر ذلك بيانياً.

ج. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسمه.

أدجية



06 إحد هذه الساعات
تتقدم في التوقيت بـ 45 min
والأخر تتأخر بـ 1h و 10 min، والأخيرة معطلة.
كم التوقيت الصحيح؟

الانتقال

الى الحل

تقني رياضي 2013 الموضوع الأول (07 نقاط) BAC

2

(I) الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$

1 ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

2 بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$.

3 استنتج، حسب قيم x إشارة g(x).

(II) الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

تت

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

2 أثبت أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

3 ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4 بين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5 مثل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

(III) (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1 أثبت أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

2 الدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- بين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

ج- بين أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

الانتقال

الى الحل

رياضيات 2013 الموضوع الأول (06 نقاط) ★★★

3

(I) 1 الدالة u معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$.

(أ) ادرس اتجاه تغير الدالة u .

(ب) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e > 3x - 4$.

2 الدالة v معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$.

(أ) بين أن: $v'(1) = 0$. (يرمز v' الى الدالة المشتقة للدالة v)

(ب) اثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq 0$.

(ج) استنتج، أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$.

3 اثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$.

(II) الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

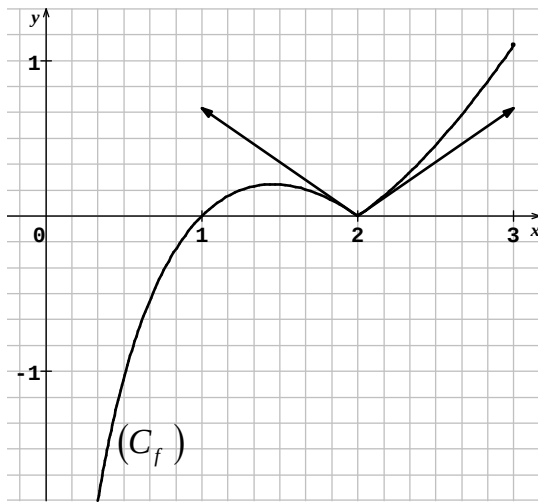
1 احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2 بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 احسب $f(1)$ ، ثم مثل المنحنى (C_f) على المجال $\left]0; \frac{5}{2}\right]$.

(ناخذ: $f(2) \approx 2.3$ ، $f(1.64) \approx 1$ ، و $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx 5.75$).

4 احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 2$ و $x = \frac{1}{2}$.



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

I الدالة المعرفة على المجال $]0; 3]$ بـ: $g(x) = x \ln x + x$

1 أدرس تغيرات الدالة g

2 أ) بين أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا في $]0; 3]$

ثم تحقق أن $1,45 < \sim < 1,46$

ب) استنتج إشارة $g(x) - 2$

II التمثيل البياني المقابل (C_f) هو للدالة f المعرفة على

المجال $]0; 3]$ بـ: $f(x) = |x - 2| \ln x$

1 باستعمال (C_f) ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند 2

2 أثبت صحة تخمينك.

3 أدرس تغيرات الدالة f

III الدالة المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي: $h(x) = (2 - \cos x) \ln(\cos x)$

1 بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) ؛ حيث (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h

2 أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h)



لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة f .

2. أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $y = 1$: (Δ) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

3. احسب $f(-x) + f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-0,71; -0,70[$

5. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0; 1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين

يطلب حساب إحداثيات كل منهما، اكتب معادلة المماس (T) .

6. أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

7. ناقش بيانها، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx + 1$

8. الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$

أ) بين أن h دالة زوجية.

ب) دون دراسة تغيرات h ، أرسم (C_h) ، علل ذلك.

أجبية

07

تعيش زهور "زئبق الماء" في المسطحات المائية، يحتاج

"زئبق الماء" الذي تتضاعف مساحته يوميا 30 يوما لتغطية

نصف البركة. كم عدد الأيام التي يستغرقها لتغطية البركة بأكملها؟



مسائل المستوى الرابع



الانتقال

الى الحل

رياضيات 2020 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★★★

BAC

1

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)$.

ليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$.

ج. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2 نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = f(x) - x$.

أ. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{-9x^2 + 8}{(\sqrt{9x^2 + 1})(3 + \sqrt{9x^2 + 1})}$.

ج. ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها. (نأخذ $g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 0,8$)

3 أ. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right[$ ثم تحقق أن: $2.83 < \alpha < 2.84$.

ب. استنتج إشارة $g(x)$ على $[0; +\infty[$.

ج. حدد الوضع النسبي للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ و المنحنى (C_f) على المجال $[0; +\infty[$.

4 نعتبر الدالة k المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $k(x) = \ln(6x)$ و ليكن (γ) منحنيا البياني في المعلم السابق.

أ. بين أن (γ) هو صورة منحنى الدالة: $x \mapsto \ln x$ بتحويل نقطي بسيط يطلّب تعيينه.

ب. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k(x)]$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.

5 أ. بين الدالة f فردية.

ب. انشئ كلا من (Δ) ، (γ) و (C_f) على المجال $[0; +\infty[$ ثم استنتج انشاء المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$.

أدجية

08 كيف يمكنك صنع 4 مثلثات

مقايضة الأضلاع باستعمال 6

أعواد ثقاب فقط ؟



الانتقال

الى الحل

بكالوريا 1996 كاليديونيا الجديدة (فرنسا) ★★★★★

2

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$.

1 حدد نهاية g عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$.

2 اوجد $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير g ، شكل جدول تغيرات $g(x)$.

3 احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x) = \ln |e^{\frac{x}{2}} - e^x|$.

و نسعي $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

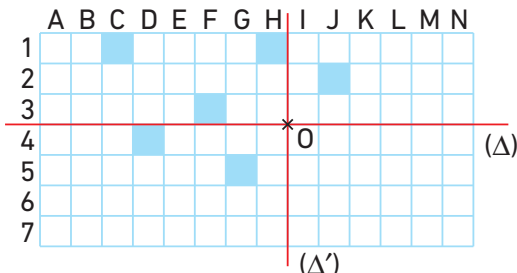
1 حدد نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ وعند 0 .

2 احسب $f'(x)$ ، ثم عين إشارتها باستعمال إشارة $g(x)$ وإشارة $g'(x)$.

أدجية

09 أكمل الشكل بتلوين الحد الأدنى من المربعات بحيث:

- تكون النقطة 0 مركز تناظر الشكل النهائي ،
- يكون المستقيمان (Δ) و (Δ') محورا تناظره.



6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

٢٢٢

أدجية

10 ما قيس الزاوية التي يصنعها عقربا



ساعة تشير إلى 12 h 05 ؟

3 استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها .

4 اوجد فاصلة نقطة تقاطع (ع) بيان f مع محور الفواصل .

5 (أ) بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا $f(x) - x = \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

(ب) استنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب للمنحني (ع) بجوار $(+\infty)$.

(ج) ثم ادرس وضعية (ع) بالنسبة للمقارب (D) في المجال $]0; +\infty[$.

6 (أ) بين أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ لدينا $f(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$.

(ب) استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$ مقارب للمنحني (ع) بجوار $(-\infty)$.

(ج) ثم ادرس وضعية (ع) بالنسبة للمقارب (Δ) في المجال $]-\infty; 0[$.

7 ارسم (ع) ، (D) و (Δ) في المعلم السابق .

8 m عدد حقيقي نعتبر المعادلة (1) ذات المجهول الحقيقي x حيث $\ln |e^{x(\frac{1}{2}-m)} - e^{x(1-m)}| = 0$

(أ) بين أنه (1) تكافئ $f(x) = m x$.

(ب) استنتج بيانيا عدد واطارة حلول المعادلة (1) .

الانتقال

الى الحل



كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

3

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2 - x - \ln(x-1)^2$.

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 عيّن نهايتي الدالة g عند 1 وعند $+\infty$.

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3 أحسب $g(2)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]1; +\infty[$.

4 بيّن أن المعادلة $|g(x)| = 1$ على المجال $]1; +\infty[$ تقبل حلان α و β ، حيث : $1,70 < \alpha < 1,71$ و $2,37 < \beta < 2,38$.

5 (أ) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_g) عند النقطة ذات الترتيبية 1 ، ثم جد حصرًا للعدد $\frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1}$.

(ب) أنشئ كلاً من (Δ) والمنحني (C_g) .

(ج) m عدد حقيقي ، ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة : $2 - 2 \ln(x-1) = \frac{-2}{\alpha - 1}x + m$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = [x - 1 + 2 \ln(x-1)][x - 3 + 2 \ln(x-1)]$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$ يكون : $f(x) = [g(x)]^2 - 1$.

2 عيّن نهايتي الدالة f عند 1 وعند $+\infty$.

3 (أ) أحسب $f'(x)$ وهذا من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4 (أ) جد إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل .

أدجية

11 قسم ، به 9 أولاد و 13 فتاة. نصف التلاميذ

يعانون من نزلات البرد.

ما هو الحد الأدنى لعدد الفتيات المصابات بنزلات

البرد ؟

a. 0 b. 1 c. 2 d. 3 e. 4

(ب) أنشئ المنحني (C_f) في المعلم السابق .

5 لتكن h هي الدالة المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ بـ : $h(x) = (\cos x + 2 \ln(\cos x))(-2 + \cos x + 2 \ln(\cos x))$:

(أ) بين أن : $h = f \circ u$ ، حيث u دالة يطلب تعيين عبارتها .

(ب) عيّن نهاية الدالة h عند $\frac{\pi}{2}$ ، وفسّر النتيجة هندسياً ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h .

(ج) شكّل جدول تغيرات الدالة h ، ثم أنشئ (Γ) منحنى الدالة h .



الانتقال
الى الحل



استعد للكالوريا مع توامي (توامي عمر)

4

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x e^x - 1$

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,567 < \alpha < 0,568$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بالعلاقة : $f(x) = (e^x - \ln |x|)^2$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2\|\vec{j}\|$.

1 أثبت أنه من أجل كل $x > 0$ فإن : $f(x) = x^2 \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)^2$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 -أ- بين أن المعادلة $e^x - \ln(-x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β حيث $\beta \in]-1,4; -1,3[$.

-ب- استنتج على $\mathbb{R} - \{0\}$ حلول المتراجحات : $e^x > \ln(x)$ ، $e^x < \ln(-x)$ و $e^x \geq \ln(-x)$.

3 -أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{0\}$ فإن : $f'(x) = \frac{2}{x}(e^x - \ln |x|)g(x)$.

-ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f .

4 بين أن : $f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right)^2$ ، ثم استنتج حصر العدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .

5 شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) على المجال $[-7; 0[\cup]0; 2]$.

6 ناقش حسب قيم الوسيط m ($m \in \mathbb{R}^+$) ، عدد وإشارة حلول المعادلة : $e^x - \ln |x| - \sqrt{m} = 0$.



الانتقال
الى الحل



BAC تقني رياضي 2013 الموضوع الثاني (07.5 نقطة)

5

(I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^x$.

1 ادرس تغيرات الدالة g .

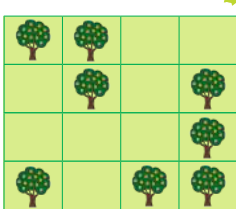
2 بين أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

(II) الدالة f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1 -أ- بين أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

-ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

أدجية



12 قسم هذا البستان إلى أربع قطع من نفس المساحة ونفس الشكل بحيث يحتوي كل منها على نفس عدد أشجار البرتقال .

2 أ- تحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(III) n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على $]0; +\infty[$.

2 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.

3 ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

4 بيّن أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.

5 أ- بيّن أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3; 0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب- بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

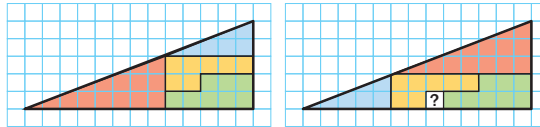
6 أ- بالاعتماد على الجزء II -؛ بيّن أنه، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

ب- استنتج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

ج- جد نهاية المتتالية (α_n) .

أحجية

13 من أيدي أتم المربع الأبيض؟



حل الأحجية

شاهد الحل عبر
الرابط التالي:

2mn

مسائل المستوى الخامس



الانتقال

الى الحل

أشبال الأمة 2016 (شعبة العلوم الدقيقة 2005)

1

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما α ، نعتبر الدالة f_α المعرفة على المجال $\left[-\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$ بـ: $f_\alpha(x) = \ln(\alpha x + 1) - \alpha x$.
($\mathcal{C}_\alpha$) المنحنى الممثل للدالة f_α في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الجزء الأول :

- 1 ادرس اتجاه تغير الدالة f_α .
- 2 استنتج أنه من أجل كل عدد x موجب تماما يكون: $\ln(\alpha x + 1) < \alpha x$.
- 3 بين أن كل المنحنيات ($\mathcal{C}_\alpha$) تتقاطع في نقطة يطلب تحديد إحداثياتها.

الجزء الثاني :

- 1 باستعمال السؤال 2. من الجزء الأول، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم β يكون: $\ln(1 + \beta) - \ln \beta < \frac{1}{\beta}$.
- 2 استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(1 + n) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.
- 3 استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.
- 4 أ- عين إحداثيي النقطة ω التي يكون عندها معامل توجيه المماس للمنحنى ($\mathcal{C}_1$) يساوي 1.
ب- اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى ($\mathcal{C}_1$) عند النقطة ω .
- 5 أ- احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow -1} f_1(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ ؛ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_1 .
ب- أرسم (Δ) ثم المنحنى ($\mathcal{C}_1$).

الجزء الثالث :

- لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \ln(1 + |x|) - |x|$. ($\mathcal{C}_g$) منحنى الممثل في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند الصفر.
 - 2 بين كيف يمكن إنشاء ($\mathcal{C}_g$) اعتمادا على ($\mathcal{C}_1$)؛ ثم أرسم ($\mathcal{C}_g$) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الانتقال

الى الحل

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

2

ليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة f_m المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{2} - m \ln x$.
وليكن ($\mathcal{C}_m$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 أحسب نهاية الدالة f_m عند $+\infty$.
- 2 حسب قيم m ، أحسب نهاية الدالة f_m عند 0.
- 3 أ) أحسب $f'_m(x)$ ، حيث: f'_m هي الدالة المشتقة للدالة f_m .
ب) ثم استنتج حسب قيم m جداول تغيرات الدالة f_m الممكنة.

4 لتكن $M_0(x_0; y_0)$ نقطة من المستوي ، حيث : $x_0 > 0$.

- بين أنه يوجد منحنى وحيد (C_m) يشمل النقطة M_0 .

5 أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثياتها .

6 أنشئ كلا من : (C_0) و (C_4) ، (C_{-1}) في نفس المعلم .

الانتقال

الـ الحـل

★★★★★

مجلة Top Maths في الدوال الوسيطة والمدمجة

3

نعتبر الدالة f_k المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx$ حيث : $(k \in \mathbb{R})$ وليكن (C_k) هو المنحنى الممثل للدالة f_k في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) نفرض فيما يلي : $k=0$ و نعتبر (C_0) المنحنى الممثل للدالة f_0 .

1 أحسب نهاية الدالة f_0 عند 0 و عند $+\infty$ (يمكن وضع : $X = \sqrt{x}$ عند حساب النهاية عند 0) .

2 أدرس إتجاه تغير الدالة f_0 و شكل جدول تغيراتها .

3 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_0) عند النقطة ذات الفاصلة e .

4 أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_0) .

(II) نفرض فيما يلي : k عدد حقيقي كفي .

1 أحسب نهاية الدالة f_k عند كل من 0 و $+\infty$.

2 أحسب : $f'_k(x)$ ، ثم أدرس إشارتها و ذلك حسب قيم k .

3 نعتبر A_k هي النقطة من المنحنى (C_k) التي فاصلتها 1 .

• بين أن المماس (T_k) عند النقطة A_k للمنحنى (C_k) هو المستقيم (OA_k) .

4 بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ الوضع النسبي للمنحنيين (C_k) و $(C_{k'})$ يترتب على مقارنة العددين k و k' .

• إستنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_{-2}) و (C_{-3}) .

5 نعرف على المجال $]0; +\infty[$ الدالة g_k كما يلي :
$$\begin{cases} g_k(x) = f_k(x) ; x > 0 \\ g_k(0) = 0 \end{cases}$$

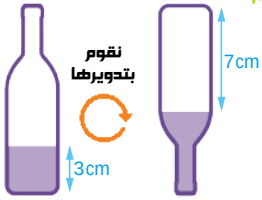
• أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_k(x) - g_k(0)}{x}$. ماذا تعني هذه النتيجة المحصل عليها ؟ .

أدجية

14 قارورة مكوّنة من أسطوانة

وعنق سعتها 1,5 لتر.

• ما كمية السائل الموجودة في القارورة؟





n عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.
و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. وحدته : $2cm$.

1 نعتبر الدالة h_n المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$.

(أ) أدرس اتجاه تغير الدالة h_n .

(ب) أحسب $h_n(0)$ ، ثم عيّن إشارة $h_n(x)$ من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$.

2 (أ) تحقق أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ تكون : $f'_1(x) = h_1(x)$ و $f'_n(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$.

(ب) نفرض n فردي ، بين أن : $f'_n(x)$ و $h_n(x)$ من نفس الإشارة .

❖ شكل عندئذ جدول تغيرات الدالة f_n في حالة n فردي ، مع حساب النهايات عند -1 و $+\infty$.

(ج) نفرض n زوجي ، شكل جدول تغيرات الدالة f_n ، مع حساب النهايات عند -1 و $+\infty$.

3 (أ) حدّد وضعية المنحنيين (C_1) و (C_2) .

(ب) أنشئ كلاً من (C_1) و (C_2) .



نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = 1 + x \ln x$ نرسم (C) إلى التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الرسم المرفق)

الجزء الأول : الهدف من هذا الجزء هو حصر A مساحة الحيز المحدد بـ (C) ومحور الفواصل والمستقيمين

الذين معادلتهما : $x=1$ و $x=2$

نسمي M و N النقطتين من (C) فاصلتهما 1 و 2 على الترتيب و P و Q مسقطاهما العموديان على محور الفواصل

1 (أ) بين ان الدالة f موجبة على $[1; 2]$

(ب) بين ان معامل توجيه المستقيم (MN) هو $2 \ln 2$

(ج) لتكن E النقطة ذات الفاصلة $\frac{4}{e}$. بين انه على المجال $[1; 2]$ النقطة E هي الوحيدة من (C) التي يكون عندها

المماس موازيا للمستقيم (MN)

(د) نسمي (T) المماس عند النقطة E . بين ان معادلة (T) هي : $y = (2 \ln 2)x - \frac{4}{e} + 1$

2 لتكن الدالة g المعرفة على $[1; 2]$ بـ : $g(x) = f(x) - \left[(2 \ln 2)x - \frac{4}{e} + 1 \right]$

(أ) عين مشتقة الدالة g وبين ان $g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

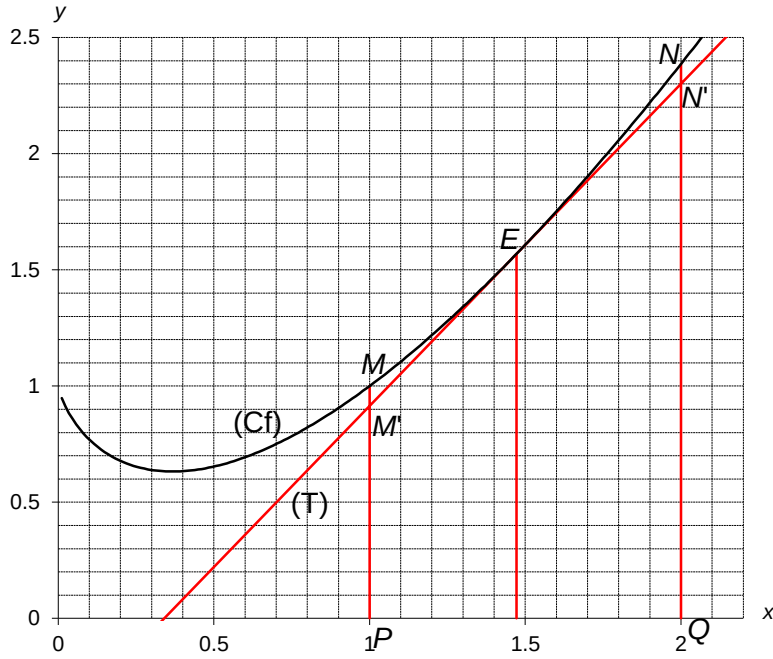
(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $[1; 2]$ ثم استنتج وضعية (C) بالنسبة الى (T) على هذا المجال

3 لتكن M' و N' النقطتين من (T) فاصلتهما 1 و 2 على الترتيب . نقبل ان (C) يبقى تحت المستقيم (MN) على

المجال $[1; 2]$ وان النقطتين M' و N' ترتيباهما موجبان تماما

(أ) احسب مساحة كلا من شبه المنحرف $MNQP$ و $M'N'QP$

(ب) استنتج حصرًا للمساحة A بتقريب 10^{-1}



الجزء الثاني: الهدف من هذا الجزء هو تعيين القيمة

المضبوطة للمساحة A

1 باستعمال مكاملة بالتجزئة احسب $\int_1^2 x \ln x dx$

2 استنتج القيمة المضبوطة لـ A

أجبية

15 من بين 100 شخص تم استجوابهم ، أجاب 96 بأن لديهم تلفازاً

و أجاب 72 شخصاً بامتلاكهم جهاز لوجي رقمي.

● ما هو العدد الأدنى من الأشخاص الذين لديهم كلا الجهازين؟





مجلة العبقرى في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$ و $D_f =]0; +\infty[$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. $\ln$ (حورمز اللوغاريتم النيبيري)

1) حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$

لدينا: $f(x) = 0$ يعني: $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

وبوضع $\ln x = Y$ نجد: $Y^2 + 2Y - 3 = 0$... (1)

مميزها: $\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$

المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين هما، $Y' = \frac{-2+\sqrt{16}}{2(1)} = 1$ و $Y'' = \frac{-2-\sqrt{16}}{2(1)} = -3$

• من أجل $Y' = 1$ يكون $\ln x = 1$ ومنه: $x = e$

• من أجل $Y'' = -3$ يكون $\ln x = -3$ ومنه: $x = e^{-3}$ إذن: $S = \{e^{-3}; e\}$

تفسير النتيجة هندسيا: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما، e و e^{-3} .

ب) تحليل $f(x)$ إلى جداء عاملين:

كثير الحدود $Y^2 + 2Y - 3$ يقبل جذرين متمايزين هما، $Y' = 1$ و $Y'' = -3$.

فيكتب من الشكل: $Y^2 + 2Y - 3 = 1(Y - Y')(Y - Y'') = (Y - 1)(Y + 3)$

ومن أجل $\ln x = Y$ نجد: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = (\ln x - 1)(\ln x + 3)$

ج) حل في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة: $2\ln x + 2 \geq 0$

$2\ln x + 2 \geq 0$ تكافئ $\ln x \geq -1$ ومنه: $x \geq e^{-1}$ أي: $x \geq \frac{1}{e}$ إذن: $S = \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

2) حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة f :

f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا: $f'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x) + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x + 2}{x}$

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(2\ln x + 2)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$2\ln x + 2$		-	+
$f'(x)$		-	+

إذن: f متناقصة تماما على المجال $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ ، ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

3) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها:

لدينا: $f''(x) = \frac{2\left(\frac{1}{x}\right) \times x - 1 \times (2\ln x + 2)}{x^2} = \frac{2 - (2\ln x + 2)}{x^2} = \frac{-2\ln x}{x^2} = \frac{2(-\ln x)}{x^2}$

ومنه: إشارة $f''(x)$ من إشارة $(-\ln x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+
$f''(x)$		+	-

نلاحظ أن: $f''(x)$ تنعدم عند 1 مغيرة إشارتها، إذن: (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي: $I(1; f(1))$ أي: $I(1; -3)$.



الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

1.

أ) دراسة اتجاه تغيرات الدالة f حسب قيم x على المجال $[-2, 5]$:

• الدالة f متناقصة على كل من المجالين $[-2, 0]$ و $[2, 5]$.

• الدالة f متزايدة على المجال $[0, 2]$.

ب) حساب $f(0)$, $f'(2)$, $f'(1)$.

حساب $f(0)$: المنحني يشمل النقطة $B(0, 4)$ إذن $f(0) = 4$.

حساب $f'(2)$: في النقطة $D(2, 5)$ المماس للمنحني يوازي حامل محور الفواصل وبالتالي $f'(2) = 0$.

حساب $f'(1)$: ليكن T هو المماس للمنحني في النقطة التي فاصلتها 1 أي في النقطة $C\left(1, \frac{9}{2}\right)$, إذن

$f'(1)$ هو معامل توجيه المماس T . نختار نقطة ثانية من هذا المماس ولتكن $F(3, 6)$.

$$f'(1) = \frac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = \frac{6 - \frac{9}{2}}{3 - 1} = \frac{3}{4}$$

ت) دراسة إشارة $f'(x)$ على المجال $[-2, 5]$:

• بما أن الدالة f متناقصة على كل من المجالين $[-2, 0]$ و $[2, 5]$ فإن f' سالبة على هذين المجالين.

• بما أن الدالة f متزايدة على المجال $[0, 2]$ فإن f' موجبة على هذا المجال .

ث) دراسة إشارة $f(x)$ على المجال $[-2, 5]$:

• المنحني يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $E(4, 0)$ وبالتالي $f(x)$ تنعدم عند $x = 4$.

• المنحني يقع فوق حامل محور الفواصل في المجال $[-2, 4[$ وبالتالي $f(x) > 0$ على هذا المجال.

• المنحني يقع تحت حامل محور الفواصل في المجال $]4, 5]$ وبالتالي $f(x) < 0$ على هذا المجال.

2) مجموعة تعريف الدالة g حيث $g(x) = \ln(f(x))$.

تكون الدالة g معرفة إذا وفقط إذا كانت $f(x) > 0$ أي $D_g = [-2, 4[$.

3) حساب $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$:

$$g(-2) = \ln f(-2) = \ln 9 = 2 \ln 3 \quad , \quad g(0) = \ln f(0) = \ln 4 = 2 \ln 2 \quad , \quad g(2) = \ln f(2) = \ln 5$$

مسائل المستوى الأول ★

(4) $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \ln f(x) = -\infty$ لأن $f(4) = 0$.

(5) g معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على $D_g = [-2, 4[$ ودالتها المشتقة g' حيث $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f'(x)$ لأن $f(x) > 0$ حسب مجموعة التعريف.

إذن $g'(x) > 0$ على المجال $]0, 2[$ وفي هذا المجال تكون الدالة g متزايدة.

$g'(x) < 0$ على كل من $]2, 4[$ و $]-2, 0[$ وفي هذين المجالين تكون الدالة g متناقصة.

$g'(x) = 0$ من أجل $f'(x) = 0$ أي إذا كان $x = 0$ أو $x = 2$.

x	-2	0	2	4	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$2\ln 3$		$2\ln 2$	$\ln 5$	$-\infty$

جدول تغيرات الدالة g .

التمرين 03



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

1- دراسة تغيرات f :

لدينا: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\}$ حيث: $D_f =]-1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2 + x + 2 \ln(x+1)) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^2 + x + 2 \ln(x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{-x^2 + x}{x+1} + \frac{2 \ln(x+1)}{x+1} \right] = -\infty$$

$$\bullet f'(x) = -2x + 1 + \frac{2}{x+1} = \frac{(-2x+1)(x+1)+2}{x+1} = \frac{-2x^2 - 2x + x + 1 + 2}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - x + 3}{x+1}$$

$f'(x)$ له نفس إشارة البسط.

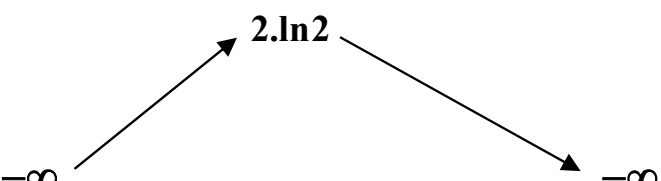
ندرس إشارة $-2x^2 - x + 3$: $\Delta = 25$ ، $x_1 = 1$ ، $x_2 = -\frac{3}{2}$

تتبع

مسائل المستوى الأول ★

x	-1	1	$+\infty$
$-2x^2 - x + 3$	+	0	-

إذن f متناقصة تماماً على $[1; +\infty[$ و متزايدة تماماً على $]-1; 1]$

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$f(1) = 2 \ln 2$ بما أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ فإن $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب

2- إيجاد المماسات ذات معامل التوجيه 3 :

نحل المعادلة $f'(x) = 3$ و عليه : $\frac{-2x^2 - x + 3}{x+1} = 3$ إذن : $-2x^2 - x + 3 = 3x + 3$

و عليه : $-2x^2 - 4x = 0$ و عليه : $-2x(x+2) = 0$ و منه : $x = 0$ أو $x = -2$

إذن : $x = 0$ (-2 قيمة مرفوضة)

إذن هناك مماس واحد عند النقطة ذات الفاصلة 0 ومعادلته $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

حيث $f(0) = 0$ و عليه : $y = 3x$

3- نبين أن $f(x) = 0$ نقبل حلا :

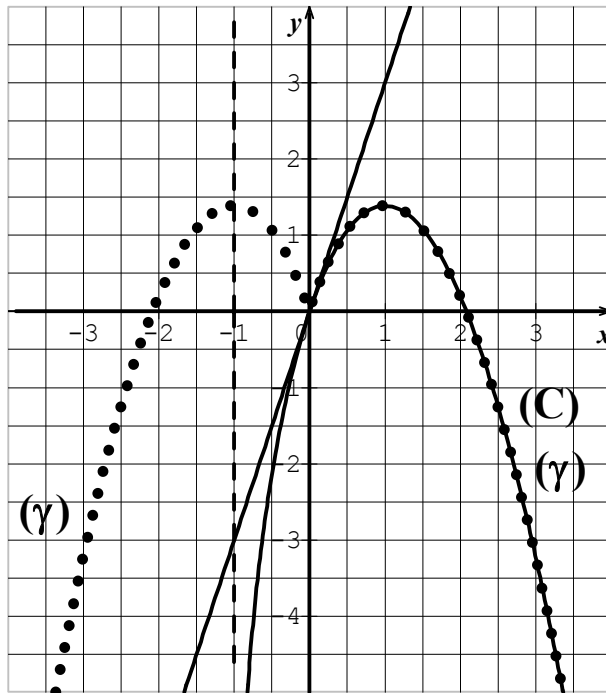
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{5}{2} + 2 \ln \frac{7}{2} = \frac{-15}{4} + 2 \ln \frac{7}{2} \approx -1,24$$

$$f(2) = -2 + 2 \ln 3 \approx 0,19$$

و عليه الدالة f مستمرة و متناقصة تماماً على المجال $\left[2; \frac{5}{2}\right]$ و لدينا : $f(2) \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد x_0 بحيث : $f(x_0) = 0$; $2 < x_0 < \frac{5}{2}$

مسائل المستوى الأول ★



4 - إنشاء المماسات و (C) :

5 - أ) إثبات أن g زوجية :

لدينا: $D_g = \mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عدد x من D_g :

$-x \in D_g$ و $g(-x) = g(x)$ و منه g زوجية .

ب) كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} g(x) = -x^2 + x + 2 \ln(x+1) & ; x > 0 \\ g(x) = -x^2 - x + 2 \ln(-x+1) & ; x < 0 \end{cases}$$

ج) إنشاء (γ) : (في الرسم السابق)

- من أجل $x > 0$: $g(x) = f(x)$

و منه (γ) ينطبق على (c)

- من أجل $x < 0$: الدالة g زوجية و عليه بيانها متناظر بالنسبة لمحور الترتيب .

التمرين 04



مجلة الخليل للرياضيات (قويسم ابراهيم الخليل)

I) أ/ تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	1	$+\infty$	1

ب/ حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$.

لدينا من البيان $g(x) = 0$ لما $x = 1$

إذن: $g(x) > 0$ لما $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

ج/ تعيين بيانيا قيم x التي من أجلها $0 < g(x) < 1$.

من البيان نجد القيم التي من أجلها $0 < g(x) < 1$ هي لما $x \in]1; +\infty[$

مسائل المستوى الأول ★

(II) ① حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_0 + \ln \left(\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{0^+} \right) \right] = -\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_1 + \ln \left(\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_1 \right) \right] = 1$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$

② / تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$: $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

$$g'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب / حساب $f'(x)$ ، ودراسة إشارتها:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} + \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x-1+x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{2(2x)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2} \end{aligned}$$

لدينا: $f'(x) > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$ ومنه:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty \nearrow 1$

- جدول تغيرات الدالة f :

التمرين 05



سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفى عبد العزيز)

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} -2x^2 + 2 = 2 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-2x + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

مسائل المستوى الأول ★

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا: $g'(x) = -4x - \frac{1}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $-4x < 0$ و $-\frac{1}{x} < 0$ عندئذ $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

2. حساب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

$$g(1) = 2(1)^2 + 2 - \ln 1 = 0$$

من أجل $x \in]0; 1[$ ، $g(x) > 0$

من أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $g(x) < 0$

II - دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{-1 + \ln x}{x} - 2x + 2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + \ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty \text{ عندئذ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + \ln x}{x} = -\infty$$

ب - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-2x + 2e) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ ومنه المنحنى } (C_f) \text{ يقبل المستقيم } (\Delta) \text{ ذا المعادلة}$$

$$y = -2x + 2e \text{ مقاربا مائلا له عند } +\infty.$$

ج - تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

$$f(x) - y = \frac{-1 + \ln x}{x} \text{ لدينا } x > 0 \text{ ومنه إشارة } f(x) - y \text{ هي نفس إشارة } -1 + \ln x.$$

$$f(x) - y = 0 \text{ يكافئ } -1 + \ln x = 0 \text{ ويكافئ } \ln x = 1 \text{ أي } x = e.$$

$$f(x) - y > 0 \text{ يكافئ } -1 + \ln x > 0 \text{ ويكافئ } \ln x > 1 \text{ أي } x > e.$$

مسائل المستوى الأول ★

x	0	e	$+\infty$
$f'(x) - y$	-	0	+
الوضعية النسبية	(C_f) تحت (Δ) (C_f) فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(e; 0)$		

2. أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (-1 + \ln x)}{x^2} - 2 = \frac{2 - \ln x - 2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-\infty; 1[$ ، $f'(x) > 0$ ؛ ومن أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $f'(x) < 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty; 1]$ و متناقصة تماما على $]1; +\infty[$.

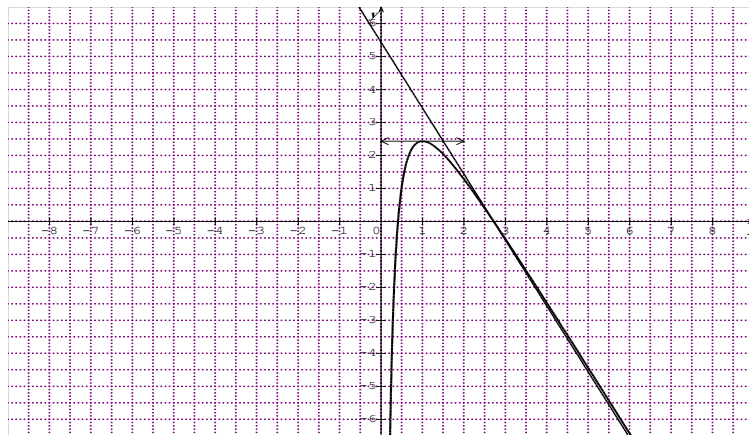
جدول تغيرات الدالة f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$2e - 3$	$-\infty$

3. أ - إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0, 4; 0, 5[$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; 1]$ وخاصة على المجال $]0, 4; 0, 5[$ ولدينا $f(0, 4) \approx -0, 15$ و $f(0, 5) \approx 1, 04$ إذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من المجال $]0, 4; 0, 5[$ بحيث $f(x_0) = 0$ وهذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

ب - رسم (Δ) و (C_f) .





سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفى عبد العزيز)

(1) بقراءة بيانية تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) .

في المجال $]0; \alpha[$ ، (γ) يقع أسفل (Δ) .

وفي المجال $[\alpha; +\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

(γ) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha; \ln \alpha)$.

(2) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

لدينا حسب السؤال السابق من أجل كل $x \in]0; \alpha[$: $\ln x - (-x + 3) < 0$ أي $g(x) < 0$.

ومن أجل كل $x \in [\alpha; +\infty[$: $\ln x - (-x + 3) > 0$ أي $g(x) > 0$.

ومن أجل $x = \alpha$: $\ln \alpha - (-\alpha + 3) = 0$ أي $g(\alpha) = 0$.

(3) التحقق أن $2,2 < \alpha < 2,3$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وبالخصوص على المجال $[2,2; 2,3]$ ولدينا $g(2,2) \approx -0,01$ و $g(2,3) \approx 0,13$ أي $g(2,3) \times g(2,2) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(\alpha) = 0$ حيث

$$2,2 < \alpha < 2,3$$

(II) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2)$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - 2 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

(2) إثبات أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\ln x - 2}{x^2} + \frac{x-1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$f(\alpha)$	$+\infty$

$$\ln \alpha = -\alpha + 3$$

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln \alpha - 2) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(-\alpha + 3 - 2) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha + 1) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha} \text{ ومنه}$$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$$\frac{1,44}{2,3} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \frac{1,69}{2,2} \text{ إذن } 1,44 < (\alpha-1)^2 < 1,69 \text{ يكافئ } 1,2 < \alpha-1 < 1,3 \text{ يكافئ } 2,2 < \alpha < 2,3 \text{ لدينا}$$

مسائل المستوى الثاني

أي $0,62 < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < 0,77$ و عليه $-0,62 < f(\alpha) < -0,77$.

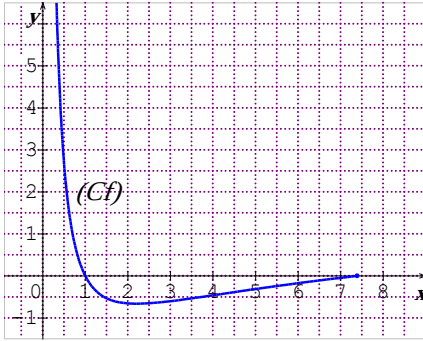
(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.
من أجل ذلك ندرس إشارة $f(x)$.

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) = \frac{1}{x}(x-1)(\ln x - 2)$$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$\ln x - 2$	-	-	0	+
$f(x)$	+	-	+	+

(C_f) فوق محور الفواصل في المجالين $]0;1[$ و $]e^2;+\infty[$ و (C_f) تحت محور الفواصل في المجال $]1;e^2[$.
و (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2 .

الرسم



III الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = -3$.

(1) تبين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = 0$ تعني $f(x) = 0$ ومنه $x = 1$ أو $x = e^2$.

وبالتالي منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2 .

(2) تبين أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

نضع $h(x) = x \ln x - x$ ومنه $h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

وعليه الدالة h هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

استنتاج عبارة F .

لدينا $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = \ln x - 2 - \frac{1}{x} \ln x + 2 \frac{1}{x}$.

ومنه $F(x) = x \ln x - x - 2x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2 \ln x + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

أي $F(x) = x \ln x - 3x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2 \ln x + \lambda$.

بما أن $F(1) = -3$ فإن $-3 + \lambda = -3$ أي $\lambda = 0$ إذن $F(x) = x \ln x - 3x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2 \ln x$.

التمرين 02



إعداد (راهم ف.)

1. أ- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ، وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 5 + 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \right)$.

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب شاقولي معادلته $x = 0$.

مسائل المستوى الثاني ★★

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 5 + 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \right)$ ، وبالتالي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. حساب المشتقة $f'(x)$.

$$f'(x) = 1 + 6 \frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x(x-1)-6}{x(x-1)} \quad \text{لدينا : من }]-\infty; 0[\text{ من } x \text{ حقيقي}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)} = \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-1)} \quad \text{ومنه}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-(x+2)$.

ومنه : الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -2[$

ومتناقصة تماماً على المجال $]-2; 0[$

وتبلغ قيمة حدية محلية كبرى $f(-2) = 3 + 6 \ln \left(\frac{2}{3} \right)$.

3. أ- إثبات أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 5 + 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) - x - 5 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \right) = 0 \quad \text{وبالتالي :}$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 5$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة وضع المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

$$f(x) - y = 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{x}{x-1} < 1 \quad \text{وبالتالي :} \quad \text{لدينا } x > x-1 \quad \text{من }]-\infty; 0[$$

$$\ln \left(\frac{x}{x-1} \right) < 0 \quad \text{ومنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]-\infty; 0[\text{ المنحني } (C_f) \text{ تحت المستقيم } (\Delta) .$$

4. إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β .

- الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $[-3, 5]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[-3, 4]$.

ولدينا : $f(-3, 5) = -0,01$ و $f(-3, 4) = 0,05$ ، أي : $f(-3, 4) \times f(-3, 5) < 0$.

مسائل المستوى الثاني

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد α وحيد حيث $-3,5 < \alpha < -3,4$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

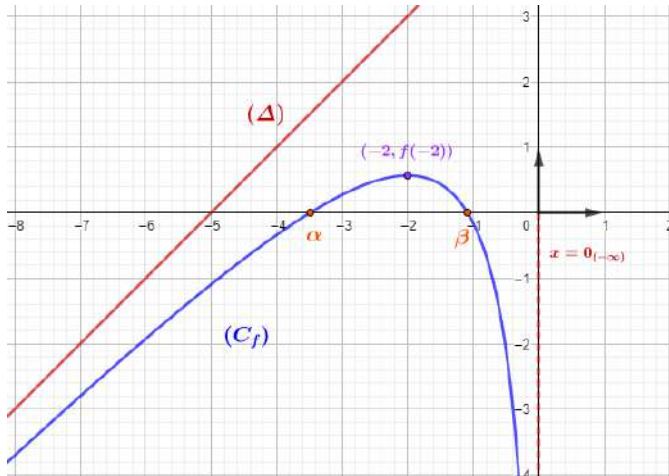
- الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $[-1, 1; -1, 0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1, 1; -1, 0]$.

ولدينا : $f(-1, 0) = -0,16$ و $f(-1, 1) = 0,02$ ، أي : $f(-1, 0) \times f(-1, 1) < 0$.

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد β وحيد حيث $-1,1 < \beta < -1,0$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

5. إنشاء المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

التمثيل بالشكل المقابل



6. أ- كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

لدينا : $\vec{AB} \left(-1; -\frac{1}{2} \right)$ ، نعتبر $M(x; y) \in (AB)$

وبالتالي : $\vec{AM} = t \cdot \vec{AB}$

$$\text{وبالتالي : } \begin{cases} x+1 = -t \\ y-3-6\ln\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ إذن : } y-3-6\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}(x+1)$$

ومنه المعادلة الديكارتية للمستقيم : $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

ب- إثبات أن المستقيم (AB) يمس المنحني (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

نضع : $f'(x) = \frac{1}{2}$ ، وبالتالي : $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)} = \frac{1}{2}$ ، إذن : $2x^2-2x-12 = x^2-x$ ، أي : $x^2-x-12=0$.

نحسب المميز : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-12) = 49 = (7)^2$

إذن : $x_1 = \frac{1-7}{2} = -3$ (مقبول) ، و $x_2 = \frac{1+7}{2} = 4$ (مرفوض) .

ولدينا : $f(-3) = -3 + 5 + 6\ln\left(\frac{-3}{-3-1}\right) = 2 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

نعوض $x = -3$ في معادلة المستقيم نجد : $y = \frac{1}{2}(-3) + \frac{7}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right) = f(-3)$ ،

ومنه : المستقيم (AB) يمس المنحني (C_f) في نقطة M_0 إحداثياتها $\left(-3; \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right) \right)$.

مسائل المستوى الثاني ★★

7. إثبات أن الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

الدالة g معرفة وقابلة للإشتقاق على $]-\infty; 0[$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - 6x \frac{1}{x(x-1)} - \frac{6}{1-x}$

إذن : $g'(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = f(x)$. ومنه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

التمرين 03

مجموعة المتميز (جوابيل أحمد أسامة)

(1) إثبات أن f فردية : هي معرفة على مجال اتحاد مجالين متناظرين بالنسبة إلى O و

$$f(-x) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -\frac{2}{3} + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{3} - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$$

يقبل مركز تناظر هو O .

(2) حساب النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{3}x \right] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{3}x \right] = +\infty$ لأن

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{2}{3} + \ln\left(\frac{x-1}{2}\right) \right] = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[-\frac{2}{3} + \ln\left(\frac{-2}{x+1}\right) \right] = +\infty$$

و منه (C_f) يقبل مستقيمين موازيين لحامل محور الترتيب معادلاتهما هي $x = -1$; $x = 1$.

(3) لدينا $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$(أ) \quad \text{ومنه} \quad f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \quad \text{و منه} \quad f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} \quad \text{أي أن}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+2)}{3(x^2-1)} \quad \text{إذن} \quad f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2x^2-2+6}{3(x^2-1)} = \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)}$$

(ب) استنتاج اتجاه تغير f : من ما سبق $f'(x) = \frac{2(x^2+2)}{3(x^2-1)}$ اشارتها من إشارة x^2-1 و هي موجبة على المجالين

$]-\infty; -1[$ و $]1; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$		$+\infty$

جدول تغيراتها

مسائل المستوى الثاني ★★

(4) تبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$

و $f(1,8) = -0,05$; $f(1,9) = 0,1$ و منه حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$.

(5) إثبات أن $\Delta: y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) : لدينا $f(x) - \frac{2}{3}x = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و منه

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \frac{2}{3}x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{2}{3}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

ومنه Δ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم Δ .

$$\left[f(x) - \frac{2}{3}x \right] = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \text{و} \quad \left[f(x) - \frac{2}{3}x \right] > 0 \quad \text{يكافئ} \quad \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0 \quad \text{و هذا يعني} \quad \left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 1$$

لما $x \in]1; +\infty[$ فإن $\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 1$ يعني $x-1 > x+1$ (الضرب في عدد موجب) و هذا يعني $-2 > 0$ و هذا

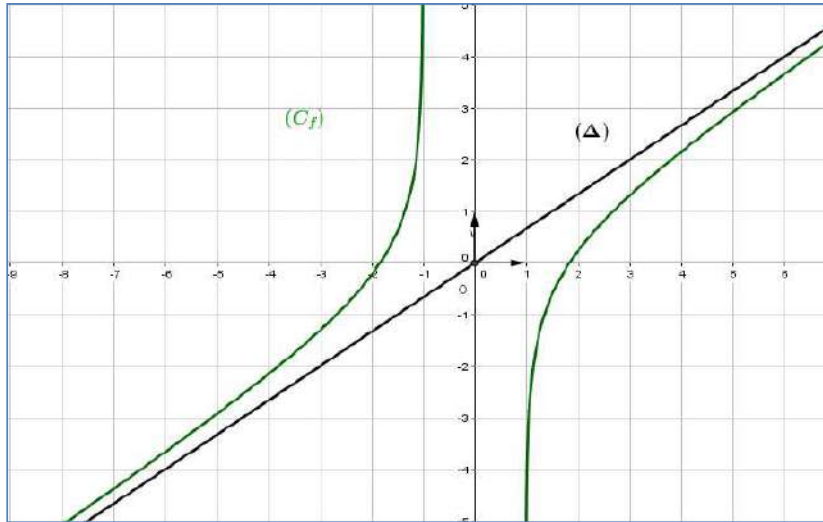
مستحيل و منه $\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 1$ على المجال $]1; +\infty[$ و منه (C_f) يقع تحت Δ على هذا المجال

لما $x \in]-\infty; -1[$ فإن $\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 1$ يعني $x-1 < x+1$ (الضرب في عدد سالب) و هذا يعني $-2 < 0$ و

محقة أي ان

$\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 1$ على المجال $] -\infty; -1[$ و منه (C_f) يقع فوق Δ على هذا المجال

(6) إنشاء المنحنى (C_f) و المستقيم المقارب Δ



مسائل المستوى الثاني ★★

(7) المناقشة بيانياً : $(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ يعني ان $\left(\frac{2}{3}-|m|\right)x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ و منه

$|m|x = f(x)$ يكافئ $|m|x = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و حلها هو ايجاد فواصل تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y = |m|x$

لما $|m| < \frac{2}{3}$ أي ان $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين متميزان

لما $|m| \geq \frac{2}{3}$ أي ان $m \geq \frac{2}{3}$ او $m < -\frac{2}{3}$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه المعادلة ليس لها حلول .

التمرين 04



كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

الجزء الأول: لدينا : $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$.

- حساب : $g(1)$ و استنتاج إشارة $g(x)$:

بعد حساب $g(1) = 0$ نجد جدول إشارة $g(x)$ بيانياً فيكون كما يلي : $g(x) > 0$ لـ $0 < x < 1$ و $g(x) = 0$ لـ $x = 1$ و $g(x) < 0$ لـ $x > 1$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		+	-

الجزء الثاني: لدينا $f(x) = \frac{1+\ln x}{1+x \ln x}$

(1) حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و تبيان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x \ln x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+\ln x = -\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+\ln x}{1+x \ln x} \right) = -\infty$

و منه : $x = 0$ مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} + \ln x} \right) = 0$ و منه : $y = 0$ مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

(2) بيان أنه من أجل كل : $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x \ln x)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و دالته المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x \ln x) - (\ln x + 1)(1+\ln x)}{(1+x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (1+\ln x)^2}{(1+x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(1+x \ln x)^2}$$

و منه : $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x \ln x)^2}$ ، و هو المطلوب .

مسائل المستوى الثاني

(ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f و تشكيل جدول تغيّراتها :
نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، أي : الدالة f متزايدة تماماً على $[0;1]$ و متناقصة تماماً على $[1;+\infty[$.

جدول التغيّرات :

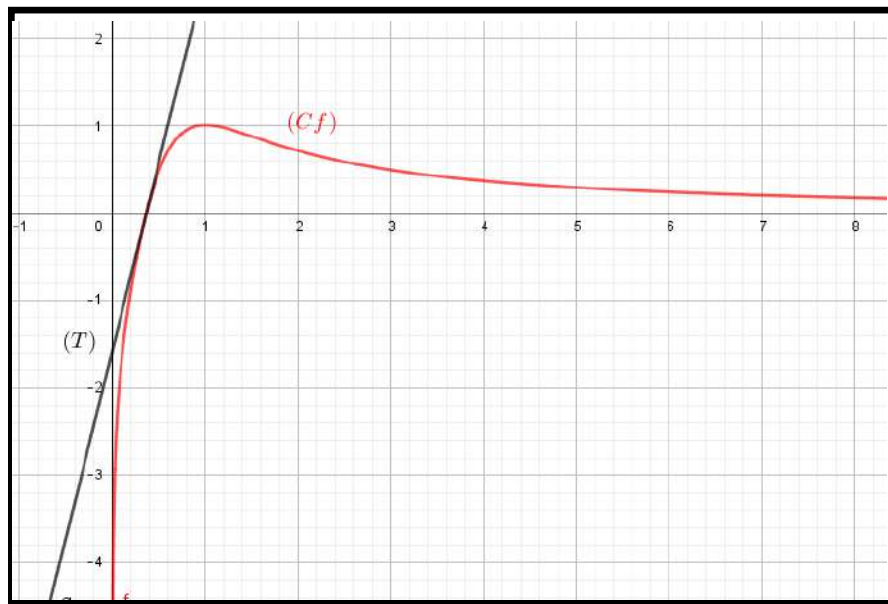
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$		1	0

(3) بيان أنّ : $y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة (T) مماس (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل:

لدينا : بعد حل المعادلة : $f(x) = 0$ نجد : $(C_f) \cap (xx') = \{(e^{-1}; 0)\}$ ، أي : $f'(e^{-1}) = \frac{e^2}{e-1}$ ، و منه معادلة المماس

تكون : $(T): y = f'(e^{-1})(x - e^{-1}) + f(e^{-1})$ ، إذن : $(T): y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$.

رسم كلا من (T) المنحني (C) :



(4) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m :

$(e-1)f(x) = e^2x - me$ ، أي : $f(x) = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}m$ ، أي : $y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x + m'$ و بعد المقارنة مع ،

المماس (T) نجد $m = 1$ ومنه : المعادلة تقبل حلّان لَمّا : $-\infty; -\frac{e}{e-1}$: أي : $m' \in]1; +\infty[$.

مسائل المستوى الثاني ★★

الجزء الثالث :

- (1) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n \ln n)$ ،
 لدينا : $I_n = \int_1^n f(x) dx$ ، أي : $I_n = \int_1^n \left(\frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) dx$ ، نلاحظ أن : $I_n = \int_1^n \frac{u'(x)}{u(x)} dx$ ، و منه : $I_n = [\ln |u(x)|]_1^n$ ،
 أي : $I_n = \ln(u(n)) - \ln(u(1))$ ، أي : $I_n = \ln(1 + n \ln n) - \ln(1)$ ، و منه : $I_n = \ln(1 + n \ln n)$.
 (2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n) :
 ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1} - I_n$ ، لدينا : $I_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x) dx$ ، أي : $I_{n+1} = \int_1^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx$ ، أي :
 $I_{n+1} = I_n + \int_n^{n+1} f(x) dx$ ، و منه : $I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ ، بما أن : $n > 1$ فإن : $\int_n^{n+1} f(x) dx > 0$ ،
 إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (I_n) متزايدة تماماً .

التمرين 05



مجلة الخليل للرياضيات (قويسم ابراهيم الخليل)

1 (I) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = +\infty$$

2 تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$:

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)(x+1) + 1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة h :

لدينا : $\left(\frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1} \right) > 0$ لما $x \in]-1; +\infty[$ ، و منه $h'(x) > 0$

- جدول تغيرات الدالة h :

x	-1	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3 حساب $h(0)$ واستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

و منه : $h(0) = 0^2 + 2(0) + \ln(0+1) = 0$

مسائل المستوى الثاني ★★

II) 1 أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\ln(x+1)}{0^+} \right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0^+ \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

ب/ برهان أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$:

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{t} \right) = +\infty &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln e^t}{\ln t} \right) = +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{\ln t} \right) = +\infty \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{t}{\ln t} \right)} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln t}{t} \right) = 0 \end{aligned}$$

ج/ استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

نضع $x + 1 = t$ ومنه $x - 1 = t - 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t$

$$\text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t - 2 - \frac{\ln(t)}{t} \right) = +\infty$$

د/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x - 1$

هـ/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (d):

$$f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا $x + 1 > 0$ لما $x \in]-1; +\infty[$ ومنه:

$$-\ln(x+1) = 0 \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

ومنه:

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y_{(d)}$	+	0	-

- الوضعية:

- (C_f) فوق (d) لما $x \in]-1; 0[$
- (C_f) فوق (d) لما $x = 0$
- (C_f) تحت (d) لما $x \in]0; +\infty[$

مسائل المستوى الثاني ★★

② تبين أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$

③ تبين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4:

نضع $f(x) = k$ حيث $k = 2$ ونطبق نظرية القيم المتوسطة:

لدينا الدالة f مستمرة و متزايدة على المجال $]-1; +\infty[$

ولدينا: $f(3.3) \approx 1.96$ و $f(3.4) \approx 2.06$

إذن $k = 2$ محصورة بين $1.96 < 2 < 2.06$

وعليه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد c حقيقي محصور بين $3.3 < c < 3.4$

④ رسم (C_f) :

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$ بجوار $+\infty$
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(0; -1)$ نقطة تقاطع (C_f) مع (d)
- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ بواسطة جدول القيم المساعدة.
- نعين نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي $y = 2$
- باستعمال جدول التغيرات نكمل رسم (C_f) مع الاستعانة بجدول الوضعية.

⑤ حساب مساحة الحيز:

نضع: A مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x - 1$ و $x = 0$ و $x = 1$

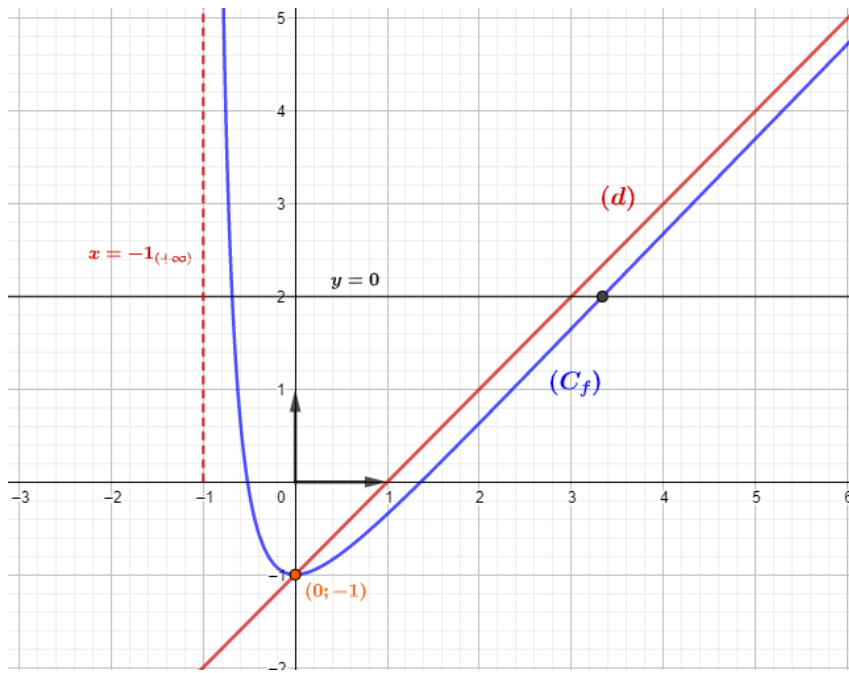
$$A = \int_0^1 (y_d - f(x)) dx = \int_0^1 \left(x - 1 - \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} \ln(x+1) \right) dx = \left[\frac{(\ln(x+1))^2}{2} \right]_0^1 = \frac{(\ln 2)^2}{2} u.a$$

تذكير: $\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

تتبع

مسائل المستوى الثاني ★★



مسائل المستوى الثالث

التمرين 01

مجموعة المتميز (جوابيل أحمد أسامة)

I - الدالة العددية g المعرفة على $]-1; \infty[$ بـ $g(x) = 1 + x^2 - 2x \cdot (1+x) \ln(1+x)$

1. تحديد الوضعية

x	-1	α	$+\infty$
الوضعية	(C) يقع فوق (Γ)	(C) و (Γ) يتقاطعان	(C) يقع تحت (Γ)

2. إشارة $g(x)$

x	-1	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	+	0	-

II - الدالة العددية f المعرفة على $]-1; \infty[$ بـ $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

1. أ- حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty$

إثبات النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)}$ أي أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ بالتزايد المقارن .

ب- التفسير الهندسي للنهائيتين هو أن المستقيمان اللذان معادلاتهما $x = -1$ و $y = 0$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) .

2. أ- إثبات عبارة المشتقة : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ أي أن $f'(x) = \frac{\frac{1+x^2}{1+x} - 2x \cdot \ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$ ومنه

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2} \text{ إذن } f'(x) = \frac{1+x^2 - 2x(1+x) \cdot \ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2} \text{ محققة .}$$

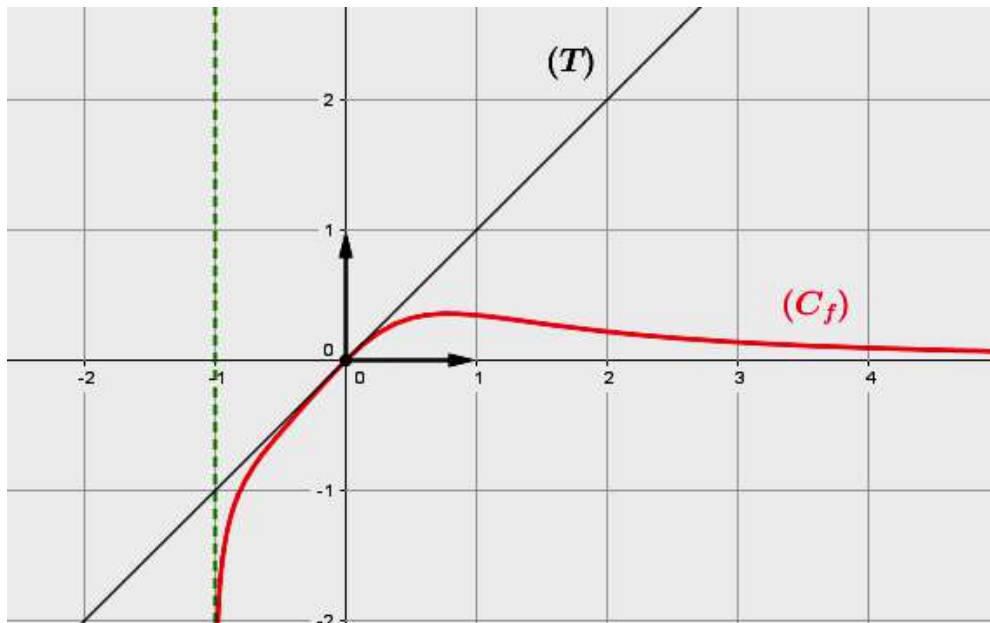
ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$: ومنه الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha; +\infty[$ و متزايدة على

المجال $]-1; \alpha]$.

جدول تغيراتها

x	-1	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f'(\alpha)$	0

مسائل المستوى الثالث ★★★★★



3. رسم (T) و (C_f) :

4. الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = \frac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$

أ - إثبات أن h دالة زوجية: $h(-x) = \frac{\ln(1+|-x|)}{1+(-x)^2} = \frac{\ln(1+|x|)}{1+x^2} = h(x)$ إذن $h(-x) = h(x)$ و منه محققة

ب قابلية الاشتقاق للدالة h عند 0 :

بوضع $t(x) = \ln(1-x)$ و $t(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x}$ أي أن $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x(1+x^2)}$

$$t'(x) = \frac{-1}{1-x} \text{ و } t'(0) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x} = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{t(x) - t(0)}{x - 0} = t'(0) = -1$$

بوضع $m(x) = \ln(1+x)$ و $m(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$ أي أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x^2)}$

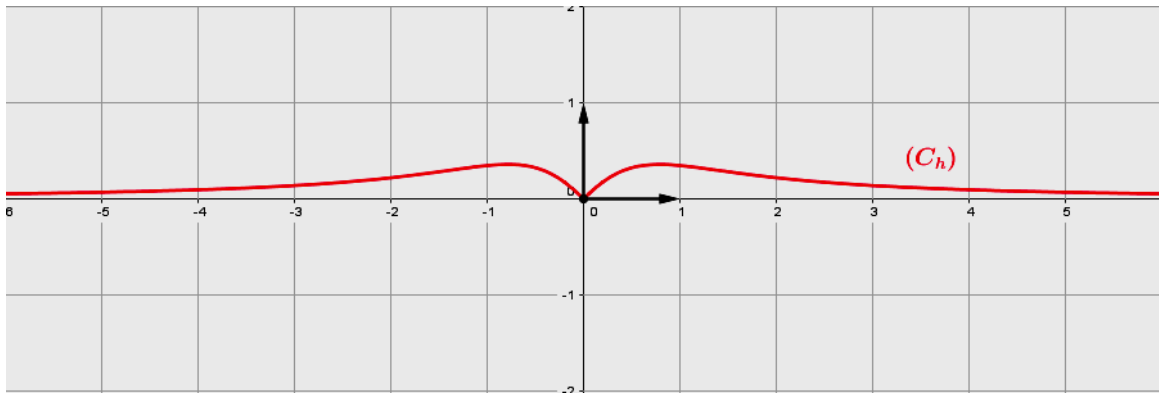
$$m'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ و } m'(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{m(x) - m(0)}{x - 0} = m'(0) = 1$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x}$ و منه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند 0.

مسائل المستوى الثالث

ج- من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$: $h(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = f(x)$ و منه (C_f) و (C_h) منطبقان على المجال $[0; +\infty[$.
و بما أن h دالة زوجية فإن (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب



التمرين 02



سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفى عبد العزيز)

1- الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

1- دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

الدالة g تقبل على الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $x+1 > 0$ و $\frac{1}{x+1} > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ إذن الدالة g متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$.

2- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$.
الدالة g مستمرة على $]-1; +\infty[$ لأنها تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ وهي متزايدة تماماً على هذا المجال و خاصة على المجال $[0,31; 0,32]$ ولدينا $g(0,31) \approx -0,01$ ، $g(0,32) \approx 0,02$ أي $g(0,31) \times g(0,32) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,31; 0,32[$ بحيث $g(\alpha) = 0$

$$g(\alpha) = 0 \text{ معناه } 0 = (\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) \text{ أي } \ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

3- استنتاج، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-1; \alpha[$ لدينا $g(x) < g(\alpha)$ أي $g(x) < 0$

ومن أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ لدينا $g(x) > g(\alpha)$ أي $g(x) > 0$ و $g(\alpha) = 0$.

مسائل المستوى الثالث

II- الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

2- إثبات أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = 2(x+1) + 2 \left(\frac{-1}{x+1} \right) (2 - \ln(x+1)) = 2(x+1) - \frac{2(2 - \ln(x+1))}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 - 2(2 - \ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2[(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)]}{x+1} = \frac{2g(x)}{x+1}$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f .

من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $\frac{2}{x+1} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.

أي f' سالبة على $]-1; \alpha[$ وموجبة على $[\alpha; +\infty[$

نستنتج هكذا أن الدالة f متناقصة تماما على $]-1; \alpha[$ و متزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4- تبين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$

لدينا $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$ إذن $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (2 - \ln(\alpha+1))^2 = (\alpha+1)^2 + (2 - (2 - (\alpha+1)^2))^2$

$$f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (\alpha+1)^4 = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$$

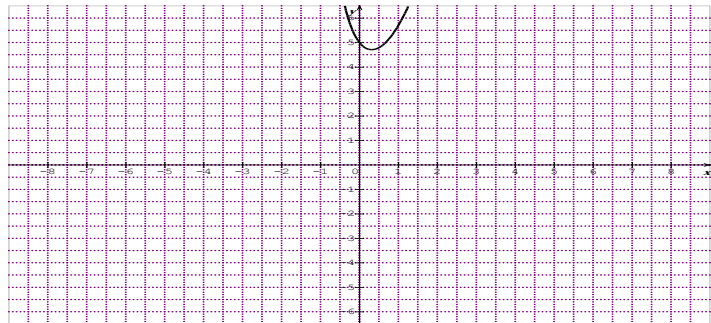
استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$0,31 < \alpha < 0,32$ معناه $1,31 < \alpha+1 < 1,32$ يكافئ $1,7424 < (\alpha+1)^2 < 1,7161$ ويكافئ

مسائل المستوى الثالث

$$2,7161 < 1 + (\alpha + 1)^2 < 2,7424 \text{ ومنه } 1,7424 \times 2,7424 < (\alpha + 1)^2 (1 + (\alpha + 1)^2) < 1,7161 \times 2,7161 \text{ أي } 4,6611 < f(\alpha) < 4,7789$$

5- تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.



III- المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1- إثبات أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

لدينا $M(x; \ln(x+1))$ ومنه

$$AM = \sqrt{(x+1)^2 + (\ln(x+1) - 2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2} = \sqrt{f(x)}$$

2- الدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- تبين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ وهي موجبة على هذا المجال إذن الدالة k تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$

$$\text{ولدينا } k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $2\sqrt{f(x)} > 0$ ومنه إشارة $k'(x)$ هي نفس إشارة $f'(x)$ وبالتالي للدالتين k

و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

ملاحظة: يمكن إتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين.

ب- تعيين إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا الدالة k متناقصة تماماً على $]-1; \alpha]$ و متزايدة تماماً على $[\alpha; +\infty[$ فهي تقبل قيمة حدية صغرى على المجال

$]-1; +\infty[$ تبلغها من أجل $x = \alpha$ ومنه AM تكون أصغر ما يمكن من أجل $x = \alpha$ أي عند النقطة $B(\alpha; \ln(\alpha+1))$

ج- تبين أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

$$AB = k(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{(\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)} = (\alpha+1)\sqrt{1 + (\alpha+1)^2}$$

مسائل المستوى الثالث

التمرين 03



رياضيات 2013 الموضوع الأول (06 نقاط)

1-أ. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $u'(x) = e^x - 3$ وعليه إشارة $u'(x)$ هي :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & - & & \ln 3 & & + & & +\infty \\ & & & & 0 & & & & \end{array} \rightarrow$$

وعليه الدالة u متناقصة تماما على المجال $]0; \ln 3]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 3; +\infty[$.

ب- للدالة u قيمة حدية صغرى هي $u(\ln 3) = e^{\ln 3} - 3\ln 3 + 4 - e = 7 - 3\ln 3 - e \simeq 0.986 > 0$ ومنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $u(x) > 0$ أي $e^x - 3x + 4 - e > 0$ وعليه $e^x - e > 3x - 4$.

2-أ. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $v'(x) = -9x^2 + 8x + \frac{1}{x} = \frac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x}$ ومنه $v'(1) = -9 \times 1^2 + 8 \times 1 + \frac{1}{1} = 0$.

ب- العدد 1 جذر لـ $v'(x)$ وبتحليل $v'(x)$ نجد : $v'(x) = -\frac{(x-1)(9x^2+x+1)}{x}$

ولكون $9x^2 + x + 1 > 0$ (مميزه $\Delta = -35 < 0$ و $9 > 0$) فإن إشارة $v'(x)$ عكس إشارة $x - 1$

أي أن $v'(x) > 0$ على المجال $]0; 1[$ و $v'(x) < 0$ على المجال $]1; +\infty[$ أي أن الدالة v متزايدة تماما على المجال $]0; 1]$

و متناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$ ومنه للدالة v قيمة حدية كبرى هي $v(1) = -3 \times 1^3 + 4 \times 1^2 - 1 + \ln 1 = 0$

أي أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $v(x) \leq 0$.

ج- $v(x) \leq 0$ معناه $-3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x \leq 0$ ومنه $-1 + \ln x \leq 3x^3 - 4x^2$

وعليه $-1 + \ln x \leq x^2(3x - 4)$ ولكون $x \neq 0$ ينتج أن $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$.

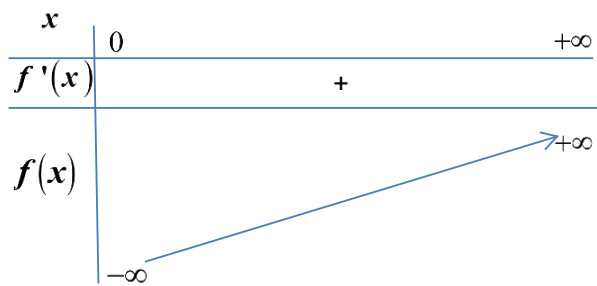
3. من $e^x - e > 3x - 4$ و $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$ نستنتج أن $e^x - e < e^x - e$ و $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$

أي أن $e^x - e < e^x - e$ ومنه $\frac{-1 + \ln x}{x^2} > 0$ و $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$.

1-II. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ex = 1$ و $\lim_{X \rightarrow +\infty} -X \ln X = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - e \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ex = +\infty$

مسائل المستوى الثالث



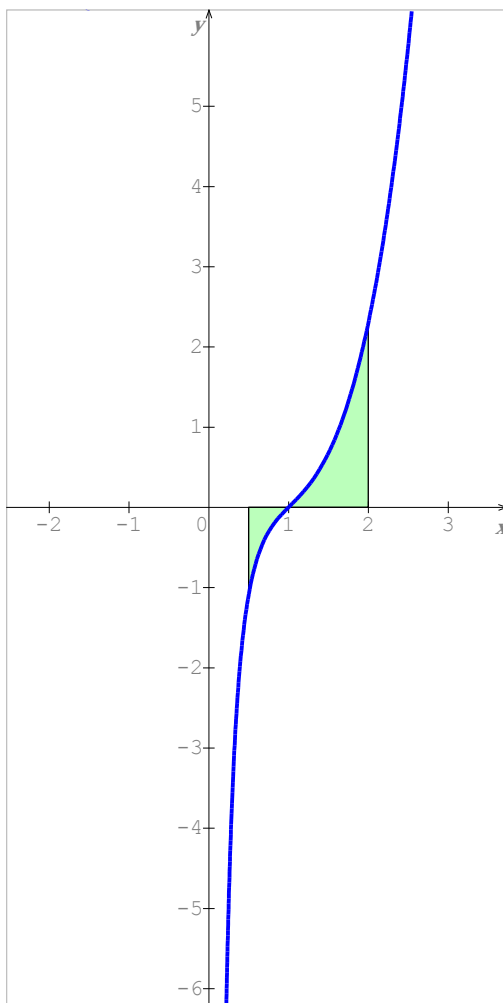
2. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا

$$f'(x) = e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \quad (\text{من السؤال 3-I}) \text{ ومنه}$$

الدالة f متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ وجدول تغيراتها هو

$$f(1) = e^1 - e \times 1 + \frac{\ln 1}{1} = 0$$

تمثيل (C_f) :



4. لتكن A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^1 -f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \quad \text{عندئذ :}$$

$$F(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \quad \text{لدينا الدالة } F \text{ المعرفة بـ}$$

هي دالة أصلية لـ f على $]0; +\infty[$ ومنه :

$$A = -[F(x)]_{\frac{1}{2}}^1 + [F(x)]_1^2 = -F(1) + F\left(\frac{1}{2}\right) + F(2) - F(1) = F(2) + F\left(\frac{1}{2}\right) - 2F(1)$$

$$A = e^2 - \frac{e}{2} \times 2^2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + e^{\frac{1}{2}} - \frac{e}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(e^1 - \frac{e}{2} \times 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right) = e^2 + e^{\frac{1}{2}} - \frac{25}{8}e + (\ln 2)^2$$

$$A \approx 1.024$$

مسائل المستوى الثالث

التمرين 04



إعداد الأستاذ: شداني عبد المالك

$$D_g =]0; 3] \quad , \quad g(x) = x \ln x + x \quad (I)$$

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\text{النهايات: } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x + x) = 0$$

إتجاه التغير: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; 3]$: $g'(x) = 2 + \ln x$ ومنه $g'(x) = \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) + 1$

$$\text{إشارة } g'(x) : g'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad 2 + \ln x = 0 \quad \text{يكافئ} \quad \ln x = -2 \quad \text{أي} \quad x = e^{-2}$$

$$g'(x) > 0 \quad \text{يكافئ} \quad 2 + \ln x > 0 \quad \text{يكافئ} \quad \ln x > -2 \quad \text{أي} \quad x > e^{-2}$$

$$g'(x) < 0 \quad \text{يكافئ} \quad 2 + \ln x < 0 \quad \text{يكافئ} \quad \ln x < -2 \quad \text{أي} \quad x < e^{-2}$$

الخلاصة: g دالة متزايدة تماما على $[e^{-2}; 3]$ ومتناقصة تماما على $]0; e^{-2}]$.

جدول التغيرات:

x	0	e^{-2}	3
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	0	$-e^{-2}$	$3 + 3 \ln 3$

(2) أ) تبيان أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; 3]$:

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على $]0; e^{-2}]$ و لكن $2 \notin]0; -e^{-2}]$ و بتالي المعادلة $g(x) = 2$ لا تقبل حلول على المجال $]0; e^{-2}]$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $[e^{-2}; 3]$ و $2 \in [-e^{-2}; 3 + 3 \ln 3]$ و بتالي المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حل وحيد α على المجال $[e^{-2}; 3]$.

بما أن $g(1,45) = 1,99$ و $g(1,46) = 2,01$ ، نلاحظ أن $g(1,45) < 2 < g(1,46)$ إذن : $1,45 < \alpha < 1,46$.

(ب) إستنتاج إشارة $g(x) - 2$:

x	0	α	3
$g(x) - 2$		-	+

$$D_f =]0; 3] \quad , \quad f(x) = |x - 2| \ln x \quad (II)$$

(1) تخمين حول قابلية الاشتقاق للدالة f عند 2:

الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 2 لأن المنحنى (C_f) لا يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 2 (المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماسين)

$$(2) \text{ إثبات صحة التخمين: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| \ln x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \ln x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \ln x = \ln 2$$

العدد المشتق من يمين العدد 2 هو $\ell_1 = \ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| \ln x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 2) \ln x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} -\ln x = -\ln 2$$

العدد المشتق من يسار العدد 2 هو $\ell_2 = -\ln 2$

توضيح

الخلاصة: نلاحظ أن $\ell_1 \neq \ell_2$ و بتالي الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 2.

مسائل المستوى الثالث

(3) دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x-2| \ln x = -\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-2) \ln x & ; 3 \geq x > 2 \\ -(x-2) \ln x & ; 0 < x < 2 \end{cases} \quad \text{إتجاه التغير: من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]0; 3], \text{ لدينا:}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)-2}{x} \quad \text{أي} \quad f'(x) = 1 \times \ln x + (x-2) \times \frac{1}{x} = \frac{x \ln x + x - 2}{x} : x \in]2; 3]$$

$$\text{ومن أجل } x \in]0; 2[\quad f'(x) = -\frac{g(x)-2}{x} \quad \text{أي} \quad f'(x) = -1 \times \ln x - (x-2) \times \frac{1}{x} = \frac{-x \ln x - x + 2}{x}$$

الخلاصة:

x	0	α	2	3
$f'(x)$		+	-	+

f دالة متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha[$ و على $]2; 3]$ و متناقصة تماما على المجال $]\alpha; 2[$.

جدول التغيرات:

x	0	α	2	3
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0	$\ln 3$

$$D_h = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad h(x) = (2 - \cos x) \ln(\cos x) \quad \text{III}$$

(1) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب لـ (C_h) :

$$\text{لدينا،} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2 - \cos x) \ln(\cos x) = -\infty \quad \text{ومن المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } x = \frac{\pi}{2} \text{ مقارب لـ } (C_h).$$

(2) دراسة إتجاه تغير الدالة h :

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad h(x) = f(\cos x), \quad \text{مركب الدالة } x \mapsto \cos x \text{ متبوعة بالدالة}$$

$$(x \mapsto f(x))$$

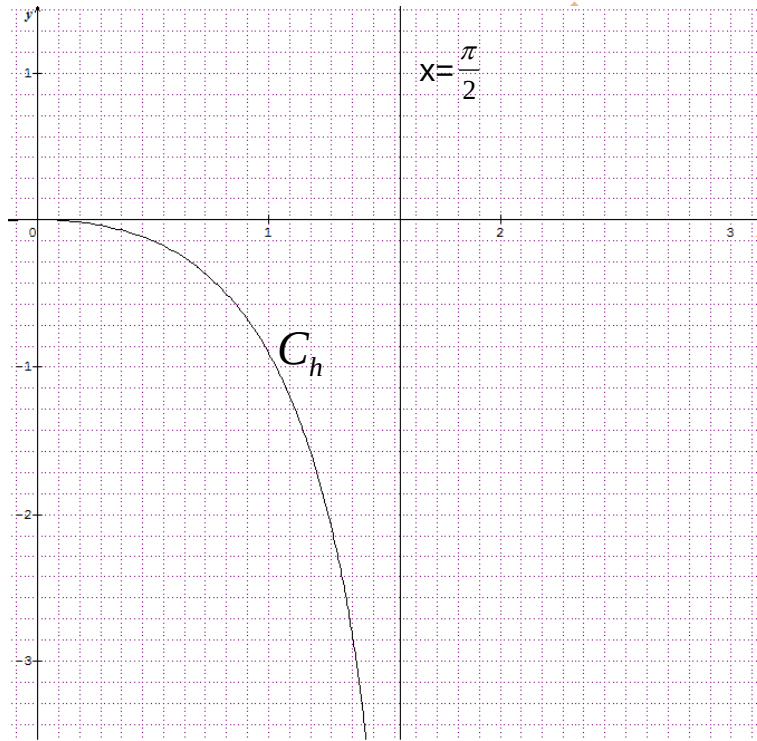
$$\text{الدالة "cos" متناقصة تماما على } \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ و } f \text{ متزايدة تماما }]0; 1] \text{ ومنه } h \text{ متناقصة تماما على } \left[0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

جدول تغيرات:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		-
$h(x)$	0	$-\infty$

مسائل المستوى الثالث

الرسم:



التمرين 05



سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفى عبد العزيز)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 1. دراسة تغيرات الدالة f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{2 \ln -x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln t}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2 \ln x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = -\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln x^2}{x} = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x^2 = -\infty$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^2 = -\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x^2}{x} = -\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x - \ln x^2}{x^2} = \frac{\ln x^2 - 2}{x^2}$$

مسائل المستوى الثالث

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x^2 - 2$.

$f'(x) = 0$ معناه $\ln x^2 - 2 = 0$ ويكافئ $\ln x^2 = 2$ ويكافئ $x^2 = e^2$ أي $x = e$ أو $x = -e$

$f'(x) > 0$ معناه $\ln x^2 - 2 > 0$ ويكافئ $\ln x^2 > 2$ ويكافئ $x^2 > e^2$ أي $x > e$ أو $x < -e$

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+

الدالة f متزايدة على كل من $[-\infty; -e]$ و $[e; +\infty[$ ومتناقصة على كل من $[-e; 0]$ و $[0; e]$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$		$\nearrow \frac{e+2}{e}$	$\searrow -\infty$	$\nearrow \frac{e-2}{e}$	$\nearrow 1$

2. إثبات أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

$f(x) = 1$ معناه $1 - \frac{\ln x^2}{x} = 1$ يكافئ $\ln x^2 = 0$ ويكافئ $x^2 = 1$ أي $x = 1$ أو $x = -1$

إذن $(C_f) \cap (\Delta) = \{A(1;1), B(-1;1)\}$

3. حساب $f(-x) + f(x)$.

$$f(-x) + f(x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2 + \frac{\ln x^2}{x} - \frac{\ln x^2}{x} = 2$$

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$ ولدينا $f(-x) + f(x) = 2$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4. تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0,71; -0,70[$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-0,71; -0,70[$ ولدينا $f(-0,71) \approx 0,04$ ، $f(-0,70) \approx -0,02$ أي f

$f(-0,71) \times f(-0,70) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال

$]-0,71; -0,70[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

5. إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين.

لدينا معادلة المماس (T) من الشكل: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$-x_0 \left(\frac{\ln x_0^2 - 2}{x_0^2} \right) + 1 - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 1 \text{ وتكافئ } 1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \text{ معناه } A(0;1) \in (T)$$

$$\text{وتكافئ } \left(\frac{-\ln x_0^2 + 2}{x_0} \right) - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } \frac{-2\ln x_0^2 + 2}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } \ln x_0^2 = 1 \text{ ومنه } x_0^2 = e$$

مسائل المستوى الثالث

أي $x_0 = \sqrt{e}$ أو $x_0 = -\sqrt{e}$. إذن (C_f) يقبل مماسين يشملان النقطة $A(0;1)$ عند النقطتين اللتين فاصلتيهما $\sqrt{e}$ و $-\sqrt{e}$ ولدينا $f'(\sqrt{e}) = -\frac{1}{e}$ و $f'(-\sqrt{e}) = -\frac{1}{e}$ إذن المماسان متوازيان وبالتالي هما متطابقان أي أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))$ و $(-\sqrt{e}; f(-\sqrt{e}))$.
كتابة معادلة المماس (T) .

$$y = \frac{-1}{e}x + 1 \text{ ومنه } y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$$

6. رسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

7. المناقشة ببياناً، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m

عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx + 1$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم

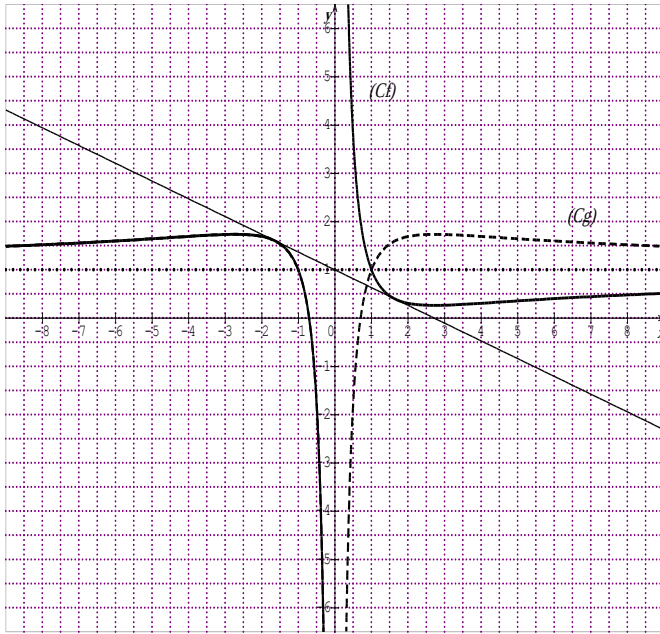
ذو المعادلة $y = mx + 1$.

إذا كان $m < -\frac{1}{e}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m = -\frac{1}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $-\frac{1}{e} < m < 0$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m \geq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.



8. h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$

(أ) تبين أنّ h دالة زوجية.

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$.

$$h(-x) = 1 + \frac{\ln(-x)^2}{|-x|} = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|} = h(x) \text{ ولدينا}$$

$$\begin{cases} h(x) = f(-x); x > 0 \\ h(x) = f(x); x < 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{x}; x > 0 \\ h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{-x}; x < 0 \end{cases}$$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty; 0[$ وبما أنّ h زوجية فإنّ (C_h) متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب.



مجموعة المتميز (جوابيل أحمد أسامة)

لدينا $f(x) = \ln(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)$.

1. حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(6x) = +\infty$

و النهاية الثانية نضرب في المرافق داخل اللوغاريتم النيري لانها حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - 3x}\right) = -\infty$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - 3x}\right) = 0$$

ب. حساب المشتقة $f'(x) = \frac{18x}{2\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} + 3$ أي $f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} + 3$ أي $f'(x) = \frac{3(3x + \sqrt{9x^2 + 1})}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x}$

$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$ و هو المطلوب .

ج. f متزايدة على $\mathbb{R}$ لأن المشتقة موجبة

جدول تغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. لدينا $g(x) = f(x) - x$.

أ- إثبات النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln(6x)}{x} - 1 \right] = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(6x)}{x} \right] = 0$

ب. إثبات عبارة المشتقة $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}} - 1$ أي $g'(x) = \frac{3 - \sqrt{9x^2 + 1}}{\sqrt{9x^2 + 1}}$ ومنه $g'(x) = \frac{9 - (9x^2 + 1)}{(3 + \sqrt{9x^2 + 1})\sqrt{9x^2 + 1}}$

أي أن $g'(x) = \frac{8 - 9x^2}{(3 + \sqrt{9x^2 + 1})\sqrt{9x^2 + 1}}$ و هو المطلوب .

ج. إشارة المشتقة من إشارة البسط $8 - 9x^2$ والتي تنعدم عند $\frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ وهي موجبة على المجال $\left[0; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ و سالبة على المجال

$\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right]$ و منه g متزايدة على المجال $\left[0; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right]$

x	0	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	0	0,8	$-\infty$

3. أ. إثبات أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,83 < \alpha < 2,84$

حساب $g(2,83) = 0,005$ و $g(2,84) = -0,001$ بما أن الدالة مستمرة و متناقصة على المجال $[2,83; 2,84]$ فحسب مبرهنة القيم

المتوسطة للمعادلة حل وحيد α

ب- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$ إشارة		+	-

تت

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

x	0	α	$+\infty$
الوضعية			
		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)
		(Δ) و (C_f) يتقاطعان	

ج- تحديد وضعية (C_f) بالنسبة للمنصف الأول (Δ): من إشارة $g(x)$

4. نعتبر $k(x) = \ln(6x)$ و (γ) التمثيل البياني للدالة k

أ. إثبات أن صورة للمنحنى الدالة $x \mapsto \ln(x)$ بتحويل نقطي بسيط $k(x) = \ln(6x)$ يعني أن $k(x) = \ln 6 + \ln(x)$ أي أن (γ)

صورة المنحنى الدالة $x \mapsto \ln(x)$ بتحويل نقطي عبارته التحليلية $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \ln 6 \end{cases}$ و هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0; \ln(6))$.

ب. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x) - \ln(6x)]$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k(x)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x}{6x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{6x}{6x} \right) = 0$$

التفسير البياني أن المنحنى (γ) مقارب للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

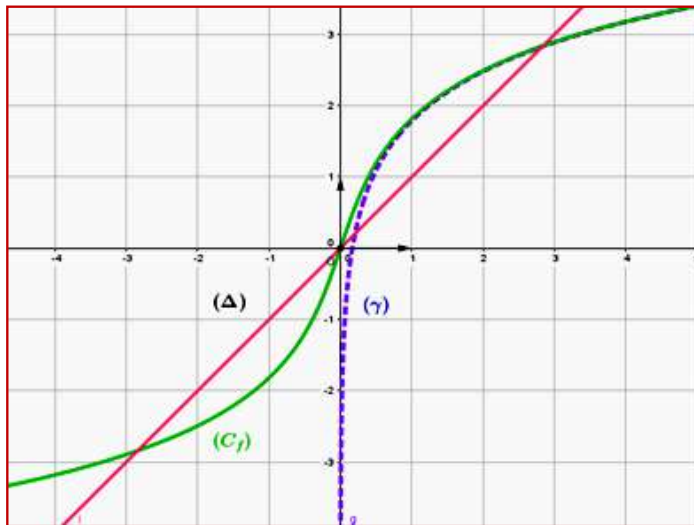
5. إثبات أن f دالة فردية : مجموعة تعريفها متناظرة بالنسبة الى 0 و

$$f(-x) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} \right) = -\ln(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x) \text{ أي } f(-x) = \ln(\sqrt{9(-x)^2 + 1} + 3(-x)) = \ln(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)$$

و منه الدالة فردية محققة . $f(-x) = -f(x)$

ب. إنشاء المنحنى من ما سبق نستنتج أن (C_f)

متناظر بالنسبة للمبدأ O



التمرين 02

تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين)

1. تحديد نهاية g عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$:

- لدينا $g(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x = e^{\frac{x}{2}} \left(1 - e^{\frac{x}{2}} \right)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0^+$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0^+$

و

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

- لدينا $g(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x = e^x \left(e^{-\frac{x}{2}} - 1 \right)$ و $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{x}{2}} - 1 \right) = -1 \end{cases}$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

2. إيجاد $g'(x)$:

- لدينا $g(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$ ومنه $g'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} \right)' - (e^x)' = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - e^x = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} (1 - 2e^{\frac{x}{2}})$ وذلك من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

- دراسة اتجاه تغير g :

- ندرس إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

وبما أن $g'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} (1 - 2e^{\frac{x}{2}})$ فإن إشارتها من إشارة $(1 - 2e^{\frac{x}{2}})$ على $\mathbb{R}$

- لدينا $1 - 2e^{\frac{x}{2}} = 0$ من أجل $\frac{x}{2} = -\ln 2$ ومنه $x = -2\ln 2$

x	$-\infty$	$-2\ln 2$	$+\infty$
$1 - 2e^{\frac{x}{2}}$	+	0	-

وبذلك متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -2\ln 2]$

و متناقصة تمام على المجال $[-2\ln 2; +\infty[$

x	$-\infty$	$-2\ln 2$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	-
$g(x)$	0^+	$\frac{1}{4}$	0	$-\infty$

- تشكيل جدول تغيرات $g(x)$:

$g(-2\ln 2) = e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2} = e^{\ln \frac{1}{2}} - e^{\ln \frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

3. احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية :

$g(0) = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$ و من جدول تغيرات g نستنتج إشارة $g(x)$

إذا $\begin{cases} g(x) > 0 & / x < 0 \\ g(x) = 0 & / x = 0 \\ g(x) < 0 & / x > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

لدينا

الجزء الثاني :

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث $f(x) = \ln |e^{\frac{x}{2}} - e^x|$ و (c) تمثيلها البياني .

1. تحديد نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ و عند 0 :

- لدينا $f(x) = \ln |e^{\frac{x}{2}} - e^x|$ ومنه $f(x) = \ln |g(x)|$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$

- لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0^+$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} |g(x)| = 0^+$ وبذلك $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln |g(x)| = -\infty$

بـ

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty$ وبذلك $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |g(x)| = -\infty$.

- لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} |g(x)| = 0^+$ وبذلك $\lim_{x \rightarrow 0} \ln |g(x)| = -\infty$.

2. حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ ومنه } f(x) = \ln |g(x)| \text{ فان } x \in \mathbb{R}^* \text{ لدينا من اجل كل}$$

- إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	$-2\ln 2$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$-$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & / x \in]-\infty; -2\ln 2[\cup]0; +\infty[\\ f'(x) = 0 & / x = -2\ln 2 \\ f'(x) < 0 & / x \in]-2\ln 2; 0[\end{cases} \quad \text{اذا}$$

3. استنتج اتجاه تغير f :

من إشارة $f'(x)$ نستنتج ان f متناقصة تماما على المجال $]-2\ln 2; 0[$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -2\ln 2]$ و $]0; +\infty[$.

- تشكيل جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$-2\ln 2$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$$f(-2\ln 2) = \ln g(-2\ln 2) = \ln \frac{1}{4} = -2\ln 2$$

4. إيجاد فاصلة تقاطع (c) مع محور الفواصل :

- نحل المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} e^2 - e^x = -1 & / x \in]0; +\infty[\text{ ومنه } \ln |e^2 - e^x| = 0 \text{ ومنه } |e^2 - e^x| = 1 \\ e^2 - e^x = 1 & / x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

$$\begin{cases} -t^2 + t - 1 = 0 & / t \in \mathbb{R}_+^* \text{ ومنه } -\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 + e^{\frac{x}{2}} - 1 = 0 & / x \in]-\infty; 0[\\ t = e^{\frac{x}{2}} & / x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-1)(-1) = -3$$

$$\begin{cases} -t^2 + t + 1 = 0 & / t \in \mathbb{R}_+^* \text{ ومنه } -\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 + e^{\frac{x}{2}} + 1 = 0 & / x \in]0; +\infty[\\ t = e^{\frac{x}{2}} & / x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

$$x = 2 \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ ومنه } e^{\frac{x}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ومنه } \begin{cases} t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{R}_+^* \end{cases} \text{ ومنه } \Delta = 1^2 - 4(-1)(1) = 5 -$$

وبذلك (c) يقطع محور الفواصل في النقطة $\left(2 \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); 0\right)$.

5. أ- التحقق أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا $f(x) - x = \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$:

- من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن $e^{\frac{x}{2}} - e^x < 0$ ومنه $e^{\frac{x}{2}} - e^x = e^x \left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$$\text{ومنه } f(x) = \ln\left[e^x \left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)\right] = \ln e^x + \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) = x + \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

$$\text{وبذلك } f(x) - x = \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

ب- استنتاج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب للمنحني (c) بجوار $(+\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0 \text{ وبذلك } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\frac{x}{2}} = 1$$

ومن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب للمنحني (c) بجوار $(+\infty)$

ج- دراسة وضعية (c) بالنسبة للمقارب (D):

- ندرس إشارة الفرق $[f(x) - x]$ على $\mathbb{R}^*$

$$\text{لدينا } f(x) - x = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^x\right| - x = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^x\right| - \ln(e^x) = \ln\left|\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^x}{e^x}\right| = \ln\left|e^{-\frac{x}{2}} - 1\right|$$

$$\text{ومن إشارة الفرق } [f(x) - x] \text{ من إشارة } \left|e^{-\frac{x}{2}} - 1\right| - 1 \text{ على } \mathbb{R}^* .$$

$$\text{لدينا } \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{|e^{-\frac{x}{2}} - 1| + 1} > 0 \text{ وبما أن } |e^{-\frac{x}{2}} - 1| - 1 = \frac{\left(e^{-\frac{x}{2}} - 1\right)^2 - 1}{|e^{-\frac{x}{2}} - 1| + 1} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{|e^{-\frac{x}{2}} - 1| + 1} \left[e^{-\frac{x}{2}} - 2\right]$$

$$\text{وبذلك إشارة الفرق } [f(x) - x] \text{ من إشارة } \left[e^{-\frac{x}{2}} - 2\right] \text{ على } \mathbb{R}^* .$$

$$\text{لدينا } e^{-\frac{x}{2}} - 2 = 0 \text{ من أجل } e^{-\frac{x}{2}} = 2 \text{ ومنه } -\frac{x}{2} = \ln 2 \text{ وبذلك } x = -2 \ln 2$$

ومن (c) يقع فوق (D) في المجال $]-\infty; -2 \ln 2[$

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

x	$-\infty$	$-2\ln 2$	0	$+\infty$
$e^{-\frac{x}{2}} - 2$	$+$	0	$-$	$-$

و اسفله في المجال $]-2\ln 2; 0[\cup]0; +\infty[$

ويتقاطعان في النقطة $(-2\ln 2; -2\ln 2)$

6. أ- التحقق أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ لدينا $f(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$

- من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ فإن $e^{\frac{x}{2}} - e^x > 0$ ومنه $e^{\frac{x}{2}} - e^x = e^{\frac{x}{2}}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$

$$f(x) = \ln\left[e^{\frac{x}{2}}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)\right] = \ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right) + \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right) = \frac{x}{2} + \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$$

ومنه $f(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$ وبذلك

ب- استنتج ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$ مقارب للمنحني بجوار $(-\infty)$:

- بما ان $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^{\frac{x}{2}} = 1$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right) = 0$ وبذلك $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \frac{x}{2} = 0$

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$ مقارب للمنحني بجوار $(-\infty)$.

ج- ثم ادرس وضعية بالنسبة للمقارب (Δ) :

- ندرس إشارة الفرق $\left[f(x) - \frac{x}{2}\right]$ على $\mathbb{R}^*$

$$f(x) - \frac{x}{2} = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^x\right| - \frac{x}{2} = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^x\right| - \ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right) = \ln\frac{|e^{\frac{x}{2}} - e^x|}{e^{\frac{x}{2}}} = \ln|1 - e^{\frac{x}{2}}|$$

لدينا

ومنه إشارة الفرق $\left[f(x) - \frac{x}{2}\right]$ من إشارة $|1 - e^{\frac{x}{2}}| - 1$ على $\mathbb{R}^*$.

$$|1 - e^{\frac{x}{2}}| - 1 = \frac{\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 1}{|1 - e^{\frac{x}{2}}| + 1} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{|1 - e^{\frac{x}{2}}| + 1} \left[e^{\frac{x}{2}} - 2\right]$$

لدينا

و بما ان $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{|1 - e^{\frac{x}{2}}| + 1} > 0$ مهما كان $x \in \mathbb{R}^*$

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

وبذلك إشارة الفرق $\left[f(x) - \frac{x}{2} \right]$ من إشارة $\left[e^{\frac{x}{2}} - 2 \right]$ على $\mathbb{R}^*$.

لدينا $e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$ من أجل $e^{\frac{x}{2}} = 2$ ومنه $\frac{x}{2} = \ln 2$ وبذلك $x = 2 \ln 2$

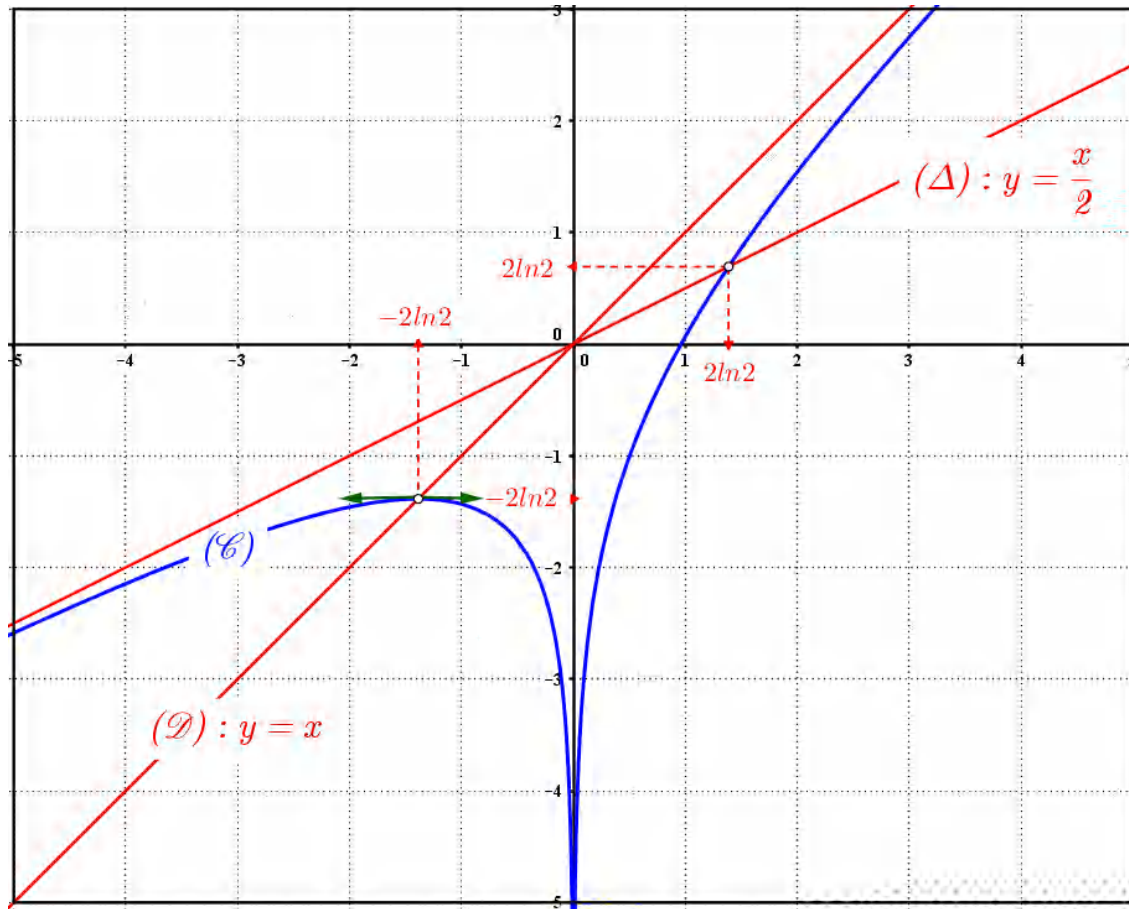
ومنه يقع أسفل (Δ) في المجال $] -\infty; 0[\cup] 0; 2 \ln 2[$

وفوقه في المجال $] 2 \ln 2; +\infty[$

ويتقاطعان في النقطة $(2 \ln 2; 2 \ln 2)$

x	$-\infty$	0	$2 \ln 2$	$+\infty$
$e^{\frac{x}{2}} - 2$	-	0	+	+

7. رسم $(\mathcal{C})$ ، (D) و (Δ) في المعلم السابق :



1.8- التحقق ان المعادلة (1) تكافئ $f(x) = mx$:

لدينا $\ln | e^{\frac{1}{2}x - m} - e^{x(1-m)} | = 0$ تكافئ $\ln | e^{\frac{1}{2}x - xm} - e^{x - xm} | = 0$ تكافئ $\ln | e^{\frac{x}{2}} - e^x | = 0$ تكافئ $\ln(e^{-mx}) | e^{\frac{x}{2}} - e^x | = 0$

تكافئ $\ln(e^{-mx}) + \ln | e^{\frac{x}{2}} - e^x | = 0$ تكافئ $-mx + \ln | e^{\frac{x}{2}} - e^x | = 0$ تكافئ $\ln | e^{\frac{x}{2}} - e^x | = mx$ تكافئ $f(x) = mx$

تتبع

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

(ب)- استنتاج بيانيا عدد وإشارة حلول المعادلة (1) :

لدينا (1) تكافئ $f(x) = mx$ تكافئ $y = f(x)$ ومنه حلول (1) هي فواصل نقط تقاطع (c) والمستقيم $y = mx$

من البيان نستنتج : عندما $x \in]-\infty; \frac{1}{2}]$ فان المعادلة (1) تقبل حلا موجبا .

عندما $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ فان المعادلة (1) تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

عندما $x \in [1; +\infty[$ فان المعادلة (1) تقبل حلا سالبا .

التمرين 03



كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

الجزء الأول : $g(x) = 2 - x - \ln(x-1)^2$

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} -\ln(x-1)^2 = +\infty \end{cases} \cdot \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty \quad (\diamond)$$

المستقيم ذو المعادلة : $x = 1$ مقارب موازي لحامل محاور الترتيب للمنحني (C_g) بجوار $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x-1)^2 = -\infty \end{cases} \cdot \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad (\diamond)$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$$(\diamond) \text{ الدالة المشتقة : } g'(x) = -1 - \frac{2}{x-1} \text{ ، أي : } g'(x) = \frac{-x-1}{x-1} .$$

نلاحظ أنه من أجل كل $x > 1$ تكون : $g'(x) < 0$ ، و منه : الدالة g متناقصة تماما على $]1; +\infty[$.
(\diamond) جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(3) حساب $g(2)$:

$g(2) = 0$ ، سنلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	1	2	$+\infty$
$g(x)$		+	-

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

(4) لدينا : $|g(x)| = 1$ تكافئ : $g(x) = 1$ ، أو $g(x) = -1$.

❖ على المجال $]1; 2]$ ، الدالة g مستمرة ورتيبة ، وصورة هذا المجال هي $[0; +\infty[$ ، و $1 \in [0; +\infty[$ ،

إذن المعادلة : $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1; 2]$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) .

❖ على المجال $[2; +\infty[$: الدالة g مستمرة ورتيبة ، وصورة هذا المجال هي $] -\infty; 0]$ ، و $-1 \in] -\infty; 0]$ ،

إذن المعادلة : $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا β من المجال $[2; +\infty[$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) .

❖ نحسب : $\begin{cases} g(1,70) = \dots \\ g(1,71) = \dots \end{cases}$ ومنه : $1,70 < \alpha < 1,71$ ، $\begin{cases} g(2,37) = \dots \\ g(2,38) = \dots \end{cases}$ ومنه : $2,37 < \beta < 2,38$.

(5) كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الترتيبية 1 ، أي عند النقطة $A(\alpha; 1)$:

$$(\Delta) : y = g'(\alpha)(x - \alpha) + g(\alpha) ، \text{ أي : } y = \frac{-\alpha - 1}{\alpha - 1}(x - \alpha) + 1$$

$$\text{ومنه : } (\Delta) : y = \frac{-\alpha - 1}{\alpha - 1}x + \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1} + 1$$

❖ حصر العدد $\frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1}$:

لدينا : $1,70 < \alpha < 1,71$ ، أي : $2,89 < \alpha^2 < 2,92$ ، أي : $4,59 < \alpha^2 + \alpha < 4,63$ (1)

لدينا : $1,70 < \alpha < 1,71$ ، أي : $0,70 < \alpha - 1 < 0,71$ ، أي : $\frac{1}{0,71} < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{0,70}$ (2)

بضرب (1) في (2) نجد : $\frac{4,59}{0,71} < \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1} < \frac{4,63}{0,70}$ ، ومنه : $6,46 < \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1} < 6,61$.

(ب) إنشاء (Δ) والمنحني (C_g) :

(ج) المناقشة البيانية :

لدينا من أجل كل $x > 1$: $2 - 2\ln(x-1) = \frac{-2}{\alpha - 1}x + m$ ،

$$\text{أي : } 2 - x - 2\ln(x-1) = \frac{-2}{\alpha - 1}x - x + m$$

$$\text{أي : } g(x) = \left(\frac{-\alpha - 1}{\alpha - 1}\right)x + m ، \text{ ومنه : } g(x) = \left(\frac{-2}{\alpha - 1} - 1\right)x + m$$

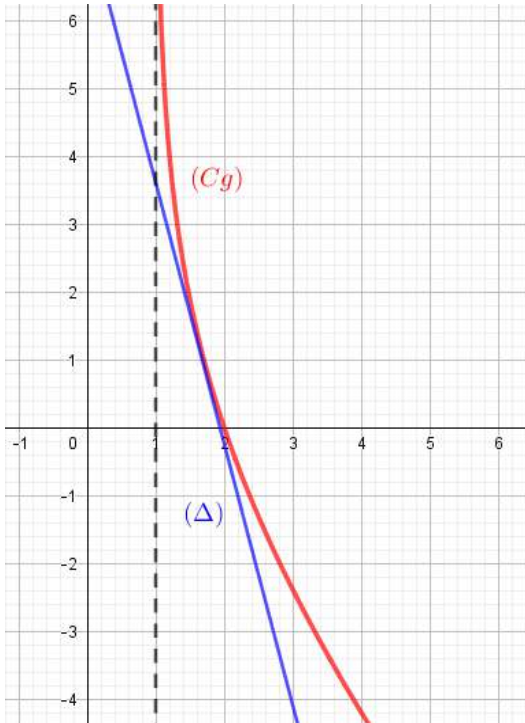
$$\text{و لدينا : } (\Delta) : y = \frac{-\alpha - 1}{\alpha - 1}x + \underbrace{\frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1} + 1}_m$$

، ومنه المناقشة تكون كالتالي :

❖ إذا كان : $m > \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1} + 1$ فإن المعادلة تقبل حلين متميزين .

❖ إذا كان : $m = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1} + 1$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد .

❖ إذا كان : $m < \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1} + 1$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .



مسائل المستوى الرابع ★★★★★

الجزء الثاني: $f(x) = [x - 1 + 2\ln(x - 1)][x - 3 + 2\ln(x - 1)]$

(1) نعلم أن:

$$\begin{aligned} [g(x)]^2 - 1 &= [g(x) - 1][g(x) + 1] = [2 - x - \ln(x - 1)^2 - 1][2 - x - \ln(x - 1)^2 + 1] \\ [g(x)]^2 - 1 &= [1 - x - 2\ln(x - 1)][3 - x - 2\ln(x - 1)] \text{ فإن } x > 1 \\ \text{وبحكم: } (-a) \times (-b) &= a \times b, \text{ أي: } [g(x)]^2 - 1 = [x - 1 + 2\ln(x - 1)][x - 3 + 2\ln(x - 1)] \\ \text{وعليه: } f(x) &= [g(x)]^2 - 1 \end{aligned}$$

(2) حساب النهايات: (نستعمل الشكل: $f(x) = [g(x)]^2 - 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty, \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [g(x)]^2 - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)]^2 - 1 = +\infty$$

(3) (i) حساب $f'(x)$ من أجل كل عددي حقيقي من $]1; +\infty[$: (نستعمل الشكل: $f(x) = [g(x)]^2 - 1$)
 $f'(x) = 2 \times g(x) \times g'(x)$ ، ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x) \times g'(x)$.

x	1	2	$+\infty$
$g(x)$	+	○	-
$g'(x)$	-		-
$g(x) \times g'(x)$	-	○	+

(ب) الدالة f متناقصة على المجال $]1; 2[$ ، ومتزايدة على المجال $[2; +\infty[$.

(❖) جدول التغيرات:

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

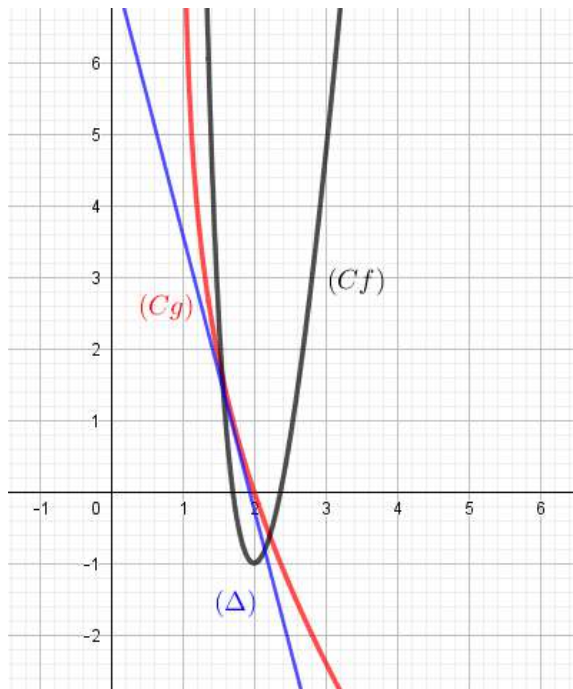
(4) نكتب تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محاور الفواصل:

$$\begin{cases} g(x) = 1 \\ g(x) = -1 \end{cases} \text{ أي: } [g(x)]^2 - 1 = 0, \text{ أي: } [g(x)]^2 = 1, \text{ أي: } g(x) = 1, \text{ ومنه: } g(x) = -1$$

وعليه: $x = \alpha$ ، أو $x = \beta$. إذن: (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في النقطتين: $A(\alpha; 0)$ و $B(\beta; 0)$.

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

(❖) الإنشاء :



(5) لدينا : $h(x) = (\cos x + 2 \ln \cos x)(-2 + \cos x + 2 \ln \cos x)$.
(ا) نلاحظ أنّ : $h(x) = f(1 + \cos x)$ ، ومنه : $h = f \circ u$ ، حيث : $u(x) = 1 + \cos x$.

(ب)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 + \cos x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأنّ : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(1 + \cos x) = +\infty$$

(❖) التفسير الهندسي : المنحني (Γ) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محاور الترتيب معادلته : $x = \frac{\pi}{2}$.

(❖) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة h : لدينا $h(x) = f(1 + \cos x)$.

- من أجل كل $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، يكون : $0 < \cos x \leq 1$ ، أي : $1 < 1 + \cos x \leq 2$ ، ومنه : $1 + \cos x \in]1; 2]$

والدالة f متناقصة على $]1; 2]$.

- ومن جهة أخرى لدينا الدالة $x \mapsto 1 + \cos x$ متناقصة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

ومنّه : الدالة h متزايدة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، وذلك حسب مبرهنة إتجاه تغيّر دالة مركبة .

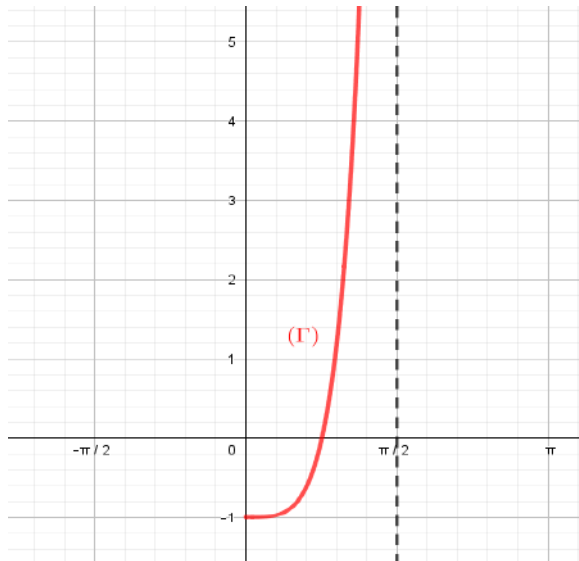
x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	-1	$+\infty$

(ج) جدول التغيرات للدالة h :

(❖) $h(0) = f(1 + \cos(0))$ أي :

$$h(0) = f(2) = -1$$

❖ الإنشاء :



التمرين 04



استعد للبيكالوريا مع توامي (توامي عمر)

I- 1/ دراسة تغيرات الدالة g :

① مجموعة التعريف: لدينا $D_g =]-\infty; +\infty[$.

② حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - 1) = +\infty - 1 = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 1) = 0 - 1 = -1$

③ اتجاه التغير: الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $g'(x) = e^x(x+1)$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x+1)$ لأن e^x دوما موجب إذن:

❖ إذا كان: $x \in]-\infty; -1[$ فإن $g'(x) < 0$ أي الدالة g متناقصة تماماً.

❖ إذا كان: $x \in [-1; +\infty[$ فإن $g'(x) \geq 0$ أي الدالة g متزايدة تماماً.

④ جدول التغيرات: $g(-1) = -\frac{1}{e} - 1 \approx -1,37$

2/ لنبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α :

لدينا: $g(0,567) \approx -0,22$ و $g(0,568) \approx 0,0006$ منه: $g(0,567) \times g(0,568) < 0$

و g دالة مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $[0,567; 0,568]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,567 < \alpha < 0,568$.

3/ استنتاج إشارة g(x) :

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج:

❖ إذا كان: $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن $g(x) > 0$.

❖ إذا كان: $x \in]-\infty; \alpha[$ فإن $g(x) < 0$.

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

II- 1/ إثبات أنه من أجل $x > 0$ يكون لدينا : $f(x) = x^2 \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)^2$

نعلم أنه إذا كان: $x > 0$ فإن: $|x| = x$ منه: $f(x) = x^2 \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)^2 = \left(x \times \frac{e^x - \ln x}{x} \right)^2$ إذن: $f(x) = x^2 \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)^2$

- استنتاج: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)^2 = +\infty$$

2/ أ- لنبين أن المعادلة $e^x - \ln(-x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β :

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي: $h(x) = e^x - \ln(-x)$

منه: $h'(x) = e^x - \frac{1}{x} > 0$ أي الدالة h مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $]-\infty; 0[$

و $h(-1,3) \approx 0,01$ ، $h(-1,4) \approx -0,08$ أي: $h(-1,4) \times h(-1,3) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β حيث $\beta \in]-1,4; -1,3[$

ب- استنتاج حلول المتراجحتين :

لدينا من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x > \ln(x)$ ، إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S_1 =]0; +\infty[$

و من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $h(x) = 0$ دالة متزايدة تماماً و $h(\beta) = 0$ وعليه مجموعة حلول المتراجحة $e^x < \ln(-x)$

هي: $S_2 =]-\infty; \beta[$ و مجموعة حلول المتراجحة $e^x \geq \ln(-x)$ هي: $S_3 = [\beta; 0[$

3/ أ- لنبين أن: $f'(x) = \frac{2}{x} (e^x - \ln|x|) g(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{0\}$ حيث: $f'(x) = 2(e^x - \ln|x|) \left(e^x - \frac{1}{x} \right) = 2(e^x - \ln|x|) \left(\frac{x e^x - 1}{x} \right)$

منه: $f'(x) = \frac{2}{x} (e^x - \ln|x|) g(x)$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

الجدول المقابل يوضح إشارة $f'(x)$.

إذا كان: $x \in]-\infty; \beta] \cup]0; \alpha[$ فإن: $f'(x) \leq 0$ أي الدالة f متناقصة .

إذا كان: $x \in [\beta; 0[\cup [\alpha; +\infty[$ فإن: $f'(x) \geq 0$ أي الدالة f متزايدة .

4/ لنبين أن: $f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right)^2$

لدينا: $f(x) = (e^x - \ln|x|)^2$ منه: $f(\alpha) = (e^\alpha - \ln \alpha)^2$ (1)...

و حسب الجزء الأول لدينا: $g(\alpha) = 0$ معناه: $\alpha e^\alpha - 1 = 0$ تكافئ: $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ و $\alpha = -\ln \alpha$ (2)...

نعوض (2) في (1) نجد: $f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right)^2$

مسائل المستوى الرابع

- تعيين حصر العدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} :

لدينا: $0,567 < \alpha < 0,568$ منه: $\frac{1}{0,568} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,567}$ و منه: $1,761 < \frac{1}{\alpha} < 1,764$

و منه: $1,761 + 0,567 < \frac{1}{\alpha} + \alpha < 1,764 + 0,568$ أي: $2,328 < \frac{1}{\alpha} + \alpha < 2,331$ بالتربيع نجد: $5,42 < f(\alpha) < 5,43$.

5/ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	β	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\beta)=0$			$+\infty$	$+\infty$

6/ المناقشة البيانية:

لدينا: $e^x - \ln|x| - \sqrt{m} = 0$ تكافئ: $\sqrt{m} = e^x - \ln|x|$ بالتربيع الطرفين نجد: أي: $\begin{cases} m = f(x) \\ x \in [\beta; 0[\cup]0; +\infty] \end{cases}$

إن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل.

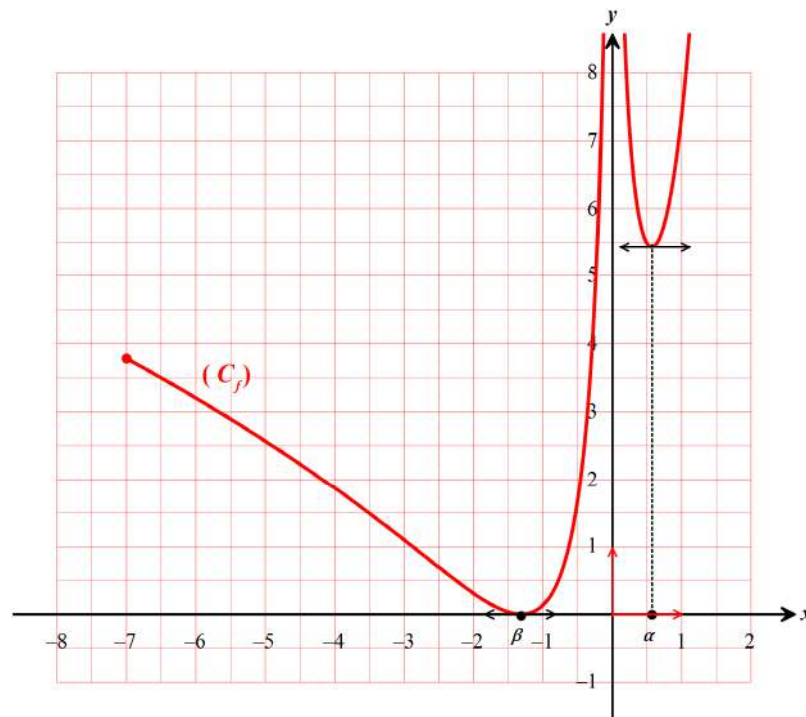
⚡ إذا كان: $m \in]-\infty; 0[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.

⚡ إذا كان: $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وهو β .

⚡ إذا كان: $m \in]0; f(\alpha)[$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد سالب.

⚡ إذا كان: $m = f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر مضاعف موجب و هو α .

⚡ إذا كان: $m \in]f(\alpha); +\infty[$ فإن المعادلة تقبل ثلاث حلول، اثنان موجبان و الآخر سالب.





الموضوع المقترح الرابع عشر (مصطفى عبد العزيز)

I- الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.

1- دراسة تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x على $\mathbb{R}$.

$$\text{من أجل } x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0$$

$$\text{من أجل } x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0 \text{ و } g'(0) = 0$$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$			

2- تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq -1$ معناه $(x-1)e^x \geq -1$ أي $(x-1)e^x + 1 \geq 0$

$$\text{II- الدالة } f \text{ معرفة على } [0; +\infty[\text{ كما يلي: } \begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- أ- تبين أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

لدينا الدالة $e^x - 1 \mapsto x$ مستمرة على المجال $[0; +\infty[$ والدالة $x \mapsto x$ مستمرة على المجال $[0; +\infty[$

وهي لا تنعدم على هذا المجال إذن حاصل قسمتهما يكون دالة مستمرة على المجال $[0; +\infty[$ أي الدالة f

مستمرة على المجال $[0; +\infty[$.

$$\text{ولدينا } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0) \text{ ومنه الدالة } f \text{ مستمرة على يمين } 0.$$

وبالتالي الدالة f مستمرة على $[0; +\infty[$.

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

2- أ - التحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.
ليكن $x \in]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .
لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $(x-1)e^x + 1 > 0$ و $x^2 > 0$ إذن من أجل كل $x \in]0; +\infty[$:
 $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.
جدول تغيرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$+\infty$

III - n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.
و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- دراسة اتجاه تغير الدالة f_n على $]0; +\infty[$.
الدالة f_n هي مجموع دالتين متزايدتين تماماً على المجال $]0; +\infty[$ (الدالة f والدالة $x \mapsto n \ln x$)
إذن الدالة f_n متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

2- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} n \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n \ln x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = +\infty$$

3- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + (n+1) \ln x - \left[\frac{e^x - 1}{x} + n \ln x \right] = n \ln x + \ln x - \ln x = \ln x$$

$$x = 1 \text{ أي } \ln x = 0 \text{ تعني } f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$$

$$x > 1 \text{ أي } \ln x > 0 \text{ تعني } f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$$

$$0 < x < 1 \text{ أي } \ln x < 0 \text{ تعني } f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		0	+
الوضعية النسبية		(C_{n+1}) تحت (C_n)	(C_{n+1}) فوق (C_n)

(C_n) و (C_{n+1}) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(1; e-1)$.

4- تبين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتها .
من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $f_n(1) = e - 1$ وعليه $B(1; e-1)$.

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

5- أ - تبين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.
الدالة f_1 مستمرة ومتزايدة تماماً على $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $]0,3;0,4[$ و $f_1(0.3) \approx -0.03$ ، $f_1(0.4) \approx 0.31$ أي $f_1(0.3) \times f_1(0.4) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من المجال $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

ب - تبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$.
$$f_n(\alpha_1) - f_1(\alpha_1) = \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} + n \ln \alpha_1 - \left[\frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} + \ln \alpha_1 \right] = n \ln \alpha_1 - \ln \alpha_1 = (n-1) \ln \alpha_1$$

لكن $f_1(\alpha_1) = 0$ ومنه $f_n(\alpha_1) = (n-1) \ln \alpha_1$ لدينا من أجل كل $n > 1$ ، $n-1 > 0$ وبما أن $0 < \alpha_1 < 1$ فإن $\ln \alpha_1 < 0$ إذن $(n-1) \ln \alpha_1 < 0$ أي $f_n(\alpha_1) < 0$. (يمكن استعمال عدة طرق).

تبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.
الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماماً على $]0;+\infty[$ وبالخصوص على $]\alpha_1;1[$ و $f_n(1) = e-1$ ولدينا $f_n(\alpha_1) < 0$ إذن $f_n(1) \times f_n(\alpha_1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

6- أ - تبين أنه، من أجل كل x من $]0;1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e-1$.
لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0;1[$ إذن من أجل كل $x \in]0;1[$ لدينا $f(x) \leq f(1)$ ومنه $f(x) \leq e-1$ أي $\frac{e^x - 1}{x} \leq e-1$.

ب - استنتاج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.
لدينا $\alpha_n \in]0;1[$ ومنه $\frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} \leq e-1$

ولدينا $f_n(\alpha_n) = 0$ معناه $\frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} + n \ln \alpha_n = 0$ ومنه $\frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} = -n \ln \alpha_n$

إذن $-n \ln \alpha_n \leq e-1$ وتكافئ $\ln \alpha_n \geq \frac{1-e}{n}$ وبالتالي $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

ج - إيجاد نهاية المتتالية (α_n) .

لدينا $e^{\frac{1-e}{n}} \leq \alpha_n \leq 1$ ولدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-e}{n}} = 1$ إذن حسب النهايات بالمقارنة نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$.



مجلة Top Maths في الدوال الوسيطة والمدمجة (بوشناق يوسف)

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما α ، نعتبر الدالة f_α المعرفة على المجال $\left[-\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$ بـ:

$$f_\alpha(x) = \ln(\alpha x + 1) - \alpha x$$

$(\mathcal{C}_\alpha)$ المنحنى الممثل للدالة f_α في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الجزء الأول:

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f_α .

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\alpha x + 1} - \alpha = \frac{-\alpha^2 x}{\alpha x + 1} : x \in \left[-\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$$

لدينا من أجل كل $x \in \left[-\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$ ، $\alpha x + 1 > 0$ ، ومنه: $f'_\alpha(x) = 0$ معناه $x = 0$ ؛ $f'_\alpha(x) < 0$ معناه

$$x \in \left[-\frac{1}{\alpha}; 0\right] \text{ و } f'_\alpha(x) > 0 \text{ معناه } x \in \left[0; +\infty\right]$$

ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

2. استنتج أنه من أجل كل عدد x موجب تماما يكون: $\ln(\alpha x + 1) < \alpha x$.

الدالة f_α متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ومنه إذا كان $x > 0$ فإن $f_\alpha(x) < f_\alpha(0)$ أي

$$\ln(\alpha x + 1) - \alpha x < 0 \text{ ومعناه } \ln(\alpha x + 1) < \alpha x \text{ إذا من أجل كل } x \in [0; +\infty[.$$

3. بين أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_\alpha)$ تتقاطع في نقطة يطلب تحديد إحداثياتها.

لدينا من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ، $f_\alpha(0) = 0$ ومنه: من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ، $O \in (\mathcal{C}_\alpha)$.

الجزء الثاني:

1. باستعمال السؤال 2. من الجزء الأول، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم β يكون:

$$\ln(1 + \beta) - \ln \beta < \frac{1}{\beta}$$

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ وليكن $x \in \mathbb{R}_+^*$ حيث $\alpha x = \frac{1}{\beta}$ ؛ لدينا $\ln(1 + \beta) - \ln \beta = \ln\left(\frac{1 + \beta}{\beta}\right) = \ln\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$ معناه

$$\ln(1 + \beta) - \ln \beta < \alpha x \text{ وباستعمال السؤال 2. من الجزء الأول، يكون } \ln(1 + \beta) - \ln \beta < \frac{1}{\beta}$$

$$\ln(1 + \beta) - \ln \beta < \frac{1}{\beta}$$

2. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(1 + n) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

$$\ln(n + 1) - \ln n < \frac{1}{n} ; \dots ; \ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3} ; \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2} ; \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{2}$$

$$\ln(1 + n) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

3. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(1+n) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ولدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1+n) = +\infty$

إذا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

4. أ عيّن إحداثيي النقطة ω التي يكون عندها معامل توجيه المماس للمنحنى (C_1) يساوي 1.

معامل توجيه المماس للمنحنى (C_1) يساوي 1 يكافئ $f'_1(x) = 1$ وتكافئ $\frac{-x}{x+1} = 1$ معناه $-x = x + 1$ أي

$$x = -\frac{1}{2}$$

ومنه $\omega\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \ln 2\right)$ إذا $f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \ln 2$

ب- اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_1) عند النقطة ω ؛ ثم أنشئ المماس والمنحنى (C_1) .

أي $y = x + 1 - \ln 2$ أي $y = \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \ln 2$

5. أ- احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f_1(x)$ ؛ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f_1 ؛

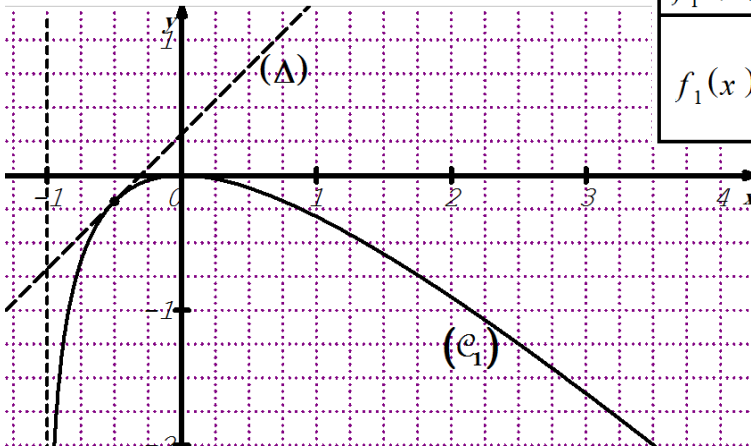
؛ $\lim_{x \rightarrow -1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [\ln(x+1) - x] = -\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1} \right] = -\infty$

؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{x+1} = -1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$

x	-1	0	$+\infty$
$f'_1(x)$		+	0
$f_1(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

ب- أرسم (Δ) ثم المنحنى (C_1) .



مسائل المستوى الخامس ★★★★★

الجزء الثالث: لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \ln(1+|x|) - |x|$. $(\mathcal{C}_g)$ منحنها الممثل في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند الصفر.

لدينا $g(0) = 0$ ؛ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ و $g(x) = \ln(1+x) - x$ ومن أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ ،
 $g(x) = \ln(1-x) + x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} + 1 = 0$$

لدينا إذا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$ ومنه الدالة g تقبل الاشتقاق عند الصفر.

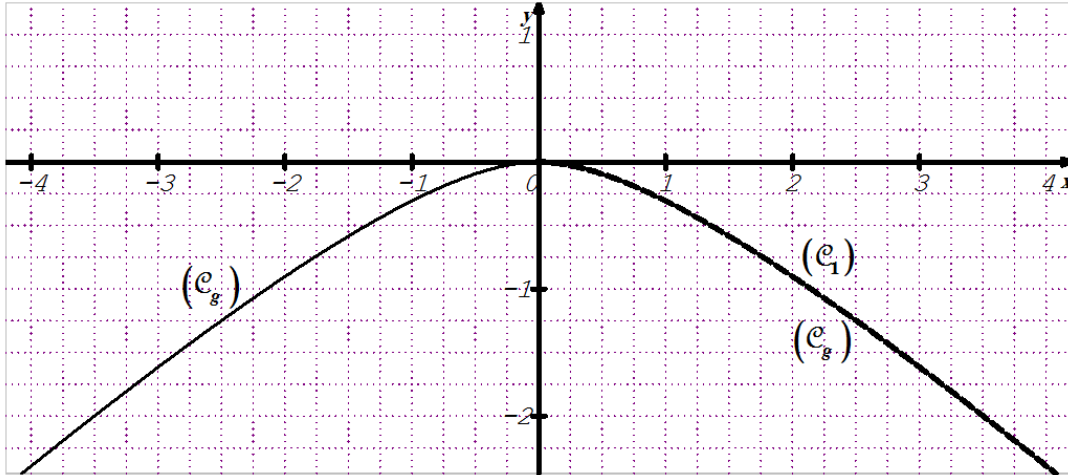
2. بين كيف يمكن إنشاء $(\mathcal{C}_g)$ اعتمادا على $(\mathcal{C}_1)$ ؛ ثم أرسم $(\mathcal{C}_g)$ في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$ و $g(-x) = \ln(1+|-x|) - |-x| = \ln(1+|x|) - |x| = g(x)$ إذا الدالة

g زوجية وبما أن المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ متعامد فإن المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ يكون متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب.

لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g(x) = \ln(1+x) - x = f_1(x)$ ، $x \in]0; +\infty[$ ينطبق على $(\mathcal{C}_1)$ في المجال

$]0; +\infty[$ أما في المجال $] -\infty; 0[$ ، يرسم $(\mathcal{C}_g)$ بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب.





كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{2} - m \ln x$.

(1) حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} - m \ln x - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} \left(1 - 2m \frac{\ln x}{x^2} \right) - \frac{1}{2} = +\infty$

لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$ و $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \right)$. ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$.

(2) حساب : $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x)$: (حسب قيم m) : لدينا : $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2} \right)$ و $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \right)$.

ومنه : أ - إذا كان : $m < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = -\infty$.

ب - إذا كان : $m = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = -\frac{1}{2}$.

ج - إذا كان : $m > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = +\infty$.

(3) الدالة f_m قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $f'_m(x) = x - \frac{m}{x} = \frac{x^2 - m}{x}$.

• عند استنتاج جدول التغيرات للدالة f_m نميز ثلاث حالات :

أ- حالة $m < 0$: من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'_m(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$f'_m(x)$		+
$f_m(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ب - حالة $m = 0$: من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'_m(x) = x$ ، و $f_0(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. ومنه :

x	0	$+\infty$
$f'_m(x)$		+
$f_m(x)$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$

ج - حالة $m > 0$: من أجل كل x من $]0; +\infty[$: إشارة $f'_m(x)$ من إشارة $x^2 - m$: أي : $\begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases}$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

x	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	○	+
$f_m(x)$	$+\infty$	$f_m(\sqrt{m})$	$+\infty$

و عليه :

(4) إثبات وجود منحنى وحيد (C_m) يشمل النقطة M_0 :

لدينا : النقطة $M_0(x_0; y_0)$ حيث : $x_0 > 0$ ، ومنه f_m معرفة عند x_0 ، ولدينا من جهة أخرى المنحنى (C_m) يشمل

النقطة $M_0(x_0; y_0)$ أي : $f_m(x_0) = y_0$. و عليه : $\frac{x_0^2 - 1}{2} - m \ln x_0 = y_0$ أي : $(\ln x_0)m = \frac{x_0^2 - 1}{2} - y_0$.
أي : $(\ln x_0)m = \frac{x_0^2 - 1 - 2y_0}{2}$ ، و عليه : $m = \frac{x_0^2 - 1 - 2y_0}{2 \ln x_0}$. ومنه يوجد حل وحيد هو : $\frac{x_0^2 - 1 - 2y_0}{2 \ln x_0}$.
إذن نستنتج أنه يوجد منحنى وحيد (C_m) يشمل النقطة M_0 .

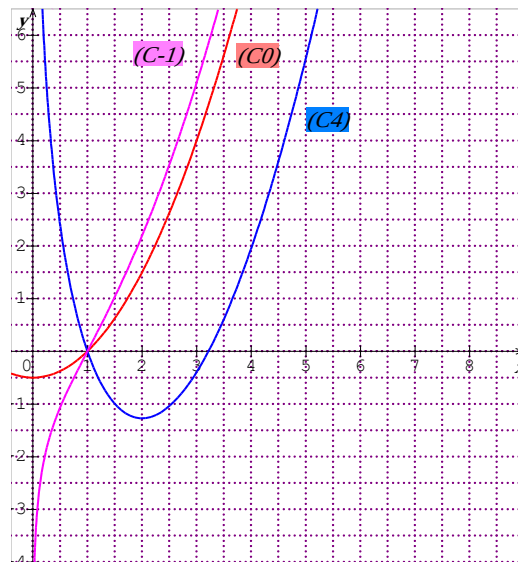
(5) إثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة A مع تعيين إحداثياتها :

ط (1) جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة معناه : $f_m(x_0) = y_0$ أي : $y_0 = \frac{x_0^2 - 1}{2} - m \ln x_0$ أي :

$$A(1;0) \text{ تشمل جميع المنحنيات } (C_m) \text{ ومنه } \begin{cases} \ln x_0 = 0 \\ y_0 - \frac{x_0^2 - 1}{2} = 0 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ معناه : } m \ln x_0 + y_0 - \frac{x_0^2 - 1}{2} = 0$$

أو كحالة خاصة : أي أن إحداثيات النقطة A لا تتعلق بـ m أي : (نعدم الذي هو مضروب في m في العبارة) ، (نعلم أن : $\ln(1) = 0$) . أي : نضع $x = 1$ ومنه : $f_m(1) = 0$ ، إذن : كل المنحنيات (C_m) تشمل النقطة $A(1;0)$.

(6) رسم كلا من : (C_0) و (C_4) ، (C_{-1}) : باستعمال مبرمج : (sine qua non) :





مجلة Top Maths في الدوال الوسيطة والمدمجة (بوشناق يوسف)

لدينا من أجل $f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx : x \in]0; +\infty[$

(I) من أجل $k=0$ يكون $f_0(x) = x(\ln x)^2$

(1) حساب نهايات الدالة f_0 :

(*) نضع : $\begin{cases} \sqrt{x} = X \\ x = X^2 \end{cases}$ أي : $\begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ X \rightarrow 0 \end{matrix}$ و منه :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x(\ln x)^2] = \lim_{X \rightarrow 0} [X^2 (\ln X^2)^2] = \lim_{X \rightarrow 0} [(X \ln X^2)^2]$$

$$\text{أي يكون : } \lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \left[\left(\underbrace{2X \ln X}_0 \right)^2 \right] = 0 \text{ ، إذن : } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = 0}$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln x)^2] = +\infty \text{ ، إذن : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty}$$

(2) دراسة إتجاه تغير الدالة f_0 :

(*) الدالة f_0 قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f'_0(x) = 1 \times (\ln x)^2 + 2 \ln x \times \frac{1}{x} \times x$

أي : $f'_0(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x$ و منه : $f'_0(x) = \ln x (\ln x + 2)$

نضع : $f'_0(x) = 0$ معناه : $\ln x = 0$ أو $\ln x + 2 = 0$ أي : $x = 1$ أو $x = e^{-2}$

(*) نلخص إتجاه تغير الدالة f_0 في جدول تغيراتها :

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$f'_0(x)$		+	-	+
$f_0(x)$	0	$4e^{-2}$	0	$+\infty$

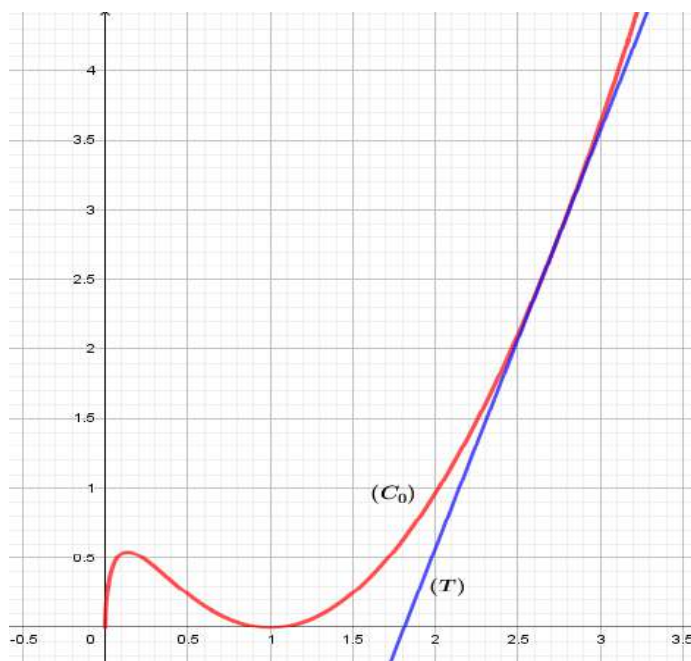
$$\begin{cases} f_0(e^{-2}) = 4e^{-2} \\ f_0(1) = 0 \end{cases} \text{ لدينا :}$$

(3) كتابة معادلة المماس (T) :

لدينا : $(T): y = f'_0(e)(x - e) + f_0(e)$ أي : $(T): y = 3(x - e) + e$ ، لأن : $\begin{cases} f'_0(e) = 3 \\ f_0(e) = e \end{cases}$

و منه : $\boxed{(T): y = 3x - 2e}$

(4) الإنشاء :



(II) نعتبر k عدد حقيقي كفي أي : $f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx$.

(1) حساب نهايات الدالة f_k :

(*) $\lim_{x \rightarrow 0} kx = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x(\ln x)^2 + kx] = 0$

(*) النهاية عند $+\infty$ نميز حالتين :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} kx = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln x)^2 + kx] = +\infty$: $k > 0$ و

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln x)^2 + kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x[(\ln x)^2 + k] = +\infty$: $k < 0$ و

(2) لنحسب $f'_k(x)$:

الدالة f'_k قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f'_k(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x + k$.

(*) نضع : $\ln x = t$ أي تصبح : $t^2 + 2t + k$ لندرس إشارة هذا الأخير و ذلك حسب قيم k . لدينا : $\Delta_k = 4 - 4k$

- حالة $\Delta_k = 0$: $k = 1$ و منه المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $t_0 = \frac{-2}{2} = -1$ أي $\ln x = -1$ و منه : $x = e^{-1}$.

إذن : إشارة كثير الحدود من إشارة المعامل a و بالتالي تكون : $f'_k(x) \geq 0$.

أي جدول التغيرات في هذه الحالة يكون :

ملاحظة : النقطة ذات الفاصلة e^{-1} هي نقطة

الإنعطاف للمنحنى (C_1) .

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	+
$f_1(x)$	0	$2e^{-1}$	$+\infty$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

- حالة $\Delta_k > 0$: يكون $k < 1$ و منه المعادلة تقبل حلان هما : $t_1 = \frac{-2 - \sqrt{4-4k}}{2} = -1 - \sqrt{1-k}$ و

$$t_2 = -1 + \sqrt{1-k}$$

أي : $\ln x = -1 + \sqrt{1-k}$ و $\ln x = -1 - \sqrt{1-k}$ و منه : $x_1 = e^{-1-\sqrt{1-k}}$ و $x_2 = e^{-1+\sqrt{1-k}}$.
و بالتالي جدول التغيرات للدالة f_k في هذه الحالة يكون :

x	0	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'_k(x)$	+	0	-	0	+
$f_k(x)$	0	$f_k(x_1)$	$f_k(x_2)$	$+\infty$	

- حالة $\Delta_k < 0$: يكون $k > 1$ و منه إشارة كثير الحدود من إشارة المعامل a و بالتالي تكون : $f'_k(x) > 0$.
أي جدول التغيرات في هذه الحالة يكون :

x	0	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	
$f_k(x)$	0	$+\infty$

(3) لدينا المماس (T_k) عند النقطة A_k ذات الفاصلة 1 أي :

$$\begin{cases} f'_k(1) = k \\ f_k(1) = k \end{cases} \text{ أي } (T_k): y = f'_k(1)(x-1) + f_k(1) : (T_k): y = k(x-1) + k , \text{ لأن } : \begin{cases} f'_k(1) = k \\ f_k(1) = k \end{cases}$$

و منه يكون : $(T_k): y = kx$ و بالتالي المماس (T_k) يمر بالمبدأ O أي أن (T_k) هو المستقيم (OA_k) .

(4) دراسة وضعية المنحني (C_k) بالنسبة لـ $(C_{k'})$:

$$\text{لندرس إشارة الفرق : } f_k(x) - f_{k'}(x) = kx - k'x \text{ و منه : } f_k(x) - f_{k'}(x) = (k-k')x$$

(*) بما أن $x > 0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $(k-k')$ و بالتالي الوضع النسبي للمنحنيين (C_k) و $(C_{k'})$ متعلقة بإشارة $(k-k')$ أي بمقارنة العددين k و k' .

(*) الوضع النسبي للمنحنيين (C_{-2}) و (C_{-3}) :

لدينا : $-3 < -2$ إذن حسب الدراسة السابقة فإن : المنحني (C_{-3}) يقع تحت المنحني (C_{-2}) .

$$(5) \text{ لدينا : } \begin{cases} g_k(x) = f_k(x) ; x > 0 \\ g_k(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{لنحسب : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_k(x) - g_k(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\ln x)^2 + kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [(\ln x)^2 + k] = +\infty$$

(*) تفسير النتيجة : الدالة g_k لا تقبل الاشتقاق عند 0 و المنحني (C_{g_k}) يقبل نصف مماس موازي لحامل محور الترتيب عند المبدأ O .



كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا : $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$

(1) لدينا : $h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$

(أ) دراسة اتجاه تغير الدالة h_n :

❖ لنحسب $h'_n(x)$: $h'_n(x) = n \times \frac{1}{1+x} + \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2}$ ، ومنه : $h'_n(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(x+1)^2}$

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ومن أجل كل عدد طبيعي n تكون : $h'_n(x) > 0$.
إذن الدالة h_n متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$.

(ب) $h_n(0) = 0$ ، إذن : نلخص إشارة $h_n(x)$ في الجدول التالي :

x	-1	0	$+\infty$
$h_n(x)$		○	+

(2) $f_1(x) = x \ln(1+x)$ و $h_1(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$

❖ حساب $f'_1(x)$: $f'_1(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \times x = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$ ، ومنه : $f'_1(x) = h_1(x)$

❖ حساب $f'_n(x)$: $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1} \times \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \times x^n$ ، نعلم أن : $x^n = x \times x^{n-1}$ ، أي تصبح :

$f'_n(x) = x^{n-1} \left[n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right]$ ، ومنه : $f'_n(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$. وهو المطلوب

(ب) في حالة n فردي يكون : $(n-1)$ زوجياً ، ومنه يكون : $x^{n-1} \geq 0$ ،

وبالتالي تكون إشارة $f'_n(x)$ من إشارة $h_n(x)$.

❖ جدول التغيرات في حالة n فردي :

x	-1	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		○	+
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

❖ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f_n(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^n) = -1$

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

(ج) في حالة n زوجي يكون: $(n-1)$ فردياً، أي إشارة x^{n-1} تكون كما يلي:

x	-1	0	$+\infty$
x^{n-1}	-	○	+

وبالتالي:

x	-1	0	$+\infty$
x^{n-1}	-	○	+
$h_n(x)$	-	○	+
$f'_n(x)$	+	○	+

❖ جدول التغيرات في حالة n زوجي:

x	-1	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	○	+
$f_n(x)$	$-\infty$		$+\infty$

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^n) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f_n(x) = -\infty \quad (❖)$$

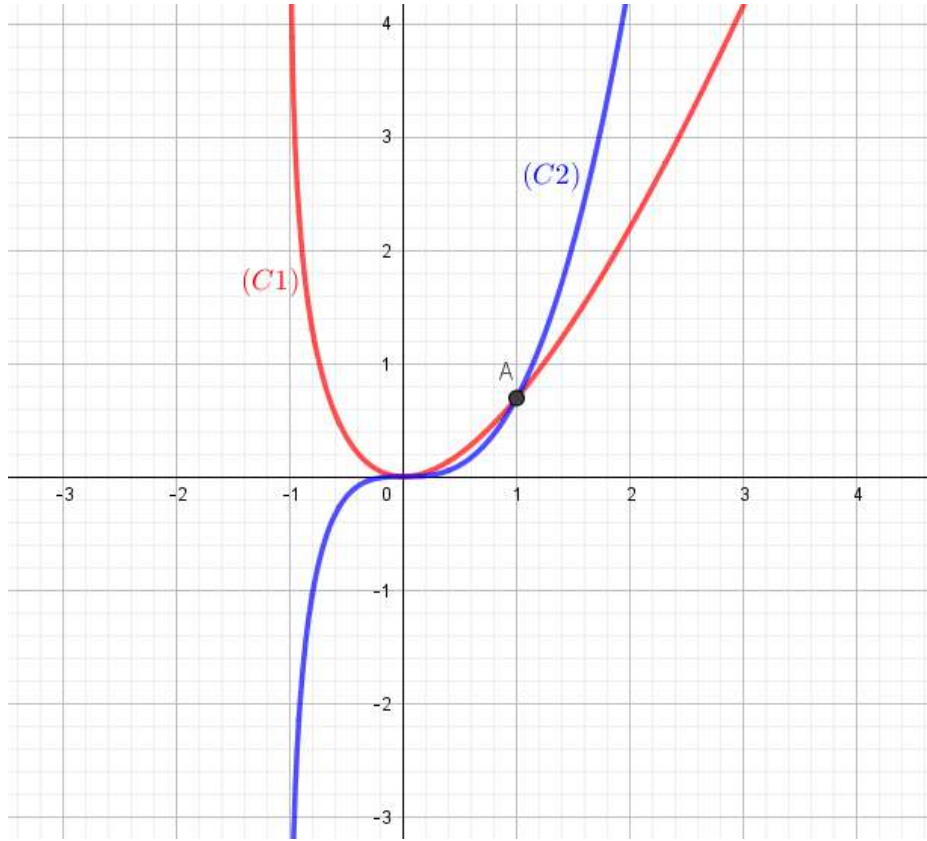
$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \quad (❖)$$

(3) دراسة وضعيّة المنحنيين (C_1) و (C_2) :

أي ندرس إشارة الفرق: $f_1(x) - f_2(x)$ ، حيث: $f_1(x) = x \ln(1+x)$ و $f_2(x) = x^2 \ln(1+x)$.
 $f_1(x) - f_2(x) = x \ln(1+x) - x^2 \ln(1+x) = x \ln(1+x)(1-x)$ ، ومنه: $f_1(x) - f_2(x) = x \ln(1+x)(1-x)$ ، توضيح: (أخرجنا $(x \ln(1+x))$ كعامل مشترك). إذن الوضعيّة تكون كما يلي:

x	-1	0	1	$+\infty$
x	-	○	+	+
$\ln(1+x)$	-	○	+	+
$1-x$	+	+	○	-
$f_1(x) - f_2(x)$	+	+	+	-
الوضعيّة	(C_1) يقع فوق (C_2)		(C_1) يقع فوق (C_2)	
	(C_1) يمس (C_2) في النقطة $O(0,0)$		(C_1) يقطع (C_2) في النقطة $A(1; \ln 2)$	

(ب) الإنشاء :



التمرين 05



تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفى)

الجزء الأول : $f(x) = 1 + x \ln x$

(1) (أ) من أجل x من $[1; 2]$ فإن $\ln x > 0$ ومنه $1 + x \ln x > 0$ إذن الدالة f موجبة على $[1; 2]$

(ب) $M(1; 1)$ و $N(2; 1 + 2 \ln 2)$ ومنه معامل توجيه (MN) هو $\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-2 \ln 2}{-1} = 2 \ln 2$

(ج) نشتق الدالة f نجد $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$. يكون المماس موازيا للمستقيم (MN) معناه لهما نفس

معامل التوجيه أي : $f'(x_0) = 2 \ln 2$ أي $\ln x + 1 = 2 \ln 2$ إذن $\ln x = -1 + 2 \ln 2$ ومنه $x = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{1}{e} (e^{\ln 2})^2 = \frac{4}{e}$

إذن النقطة E هي الوحيدة من (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (MN)

(د) معادلة (T) المماس عند النقطة E :

$$y = 2 \ln 2 \left(x - \frac{4}{e} \right) + \left(1 + \frac{4}{e} \ln \left(\frac{4}{e} \right) \right) = (2 \ln 2) x - 2 \ln 2 \times \frac{4}{e} + 1 + \frac{4}{e} \ln 4 - \frac{4}{e} = (2 \ln 2) x + 1 - \frac{4}{e}$$

$$y = (2 \ln 2) x - \frac{4}{e} + 1 \quad \text{إذن}$$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

$$g(x) = f(x) - \left[(2 \ln 2)x - \frac{4}{e} + 1 \right] \quad (2)$$

$$(أ) \text{ مشتقة الدالة } g : g'(x) = f'(x) - 2 \ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln \frac{x}{4}$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $[1; 2]$:

$$g'(x) \geq 0 \text{ تعني } 1 + \ln \left(\frac{x}{4} \right) \geq 0 \text{ أي } \ln \frac{x}{4} \geq -1 \text{ ومنه } \frac{x}{4} \geq e^{-1} \text{ إذن } x \geq \frac{4}{e}$$

إذن من أجل $x = \frac{4}{e} = 1,47$ تنعدم الدالة g ومتزايدة من أجل $x \geq \frac{4}{e}$ ومتناقصة من أجل $x \leq \frac{4}{e}$

$$g\left(\frac{4}{e}\right) = 0 \text{ ومنه جدول تغيرات } g :$$

من جدول التغيرات على المجال $[1; 2]$ والقيمة 0 هي قيمة حدية صغرى للدالة g عند $x = \frac{4}{e}$ إذن $g(x) \geq 0$

ومنه نستنتج أن وضعية (C) هي فوق (T) على هذا المجال

(3) M' و N' نقطتان من (T) فاصلتاها 1 و 2 على

الترتيب . (C) تحت المستقيم (MN) على $[1; 2]$

(أ) حساب مساحة شبه المنحرف $MNQP$:

ترتيباً النقطتين M' و N' هما :

$$y_{N'} = (4 \ln 2) + 1 - \frac{4}{e} \text{ و } y_{M'} = (2 \ln 2) + 1 - \frac{4}{e}$$

$$\text{إذن مساحة } MNQP \text{ هي } \frac{(PM + QN)}{2} \times PQ = \frac{(y_M + y_N)}{2} \times 1 = 1 + \ln 2 \approx 1,693$$

$$\text{ومساحة } M'N'QP \text{ هي : } \frac{(PM' + QN')}{2} \times PQ = \frac{(y_{M'} + y_{N'})}{2} \times 1 = 3 \ln 2 + 1 - \frac{4}{e} \approx 1,608$$

(ب) استنتاج حصر للمساحة A : المساحة محصورة بين هذين العددين $A \approx 1,6$

الجزء الثاني :

$$(1) \text{ نستعمل مكاملة بالتجزئة لحساب } \int_1^2 x \ln x dx$$

$$\text{ونضع : } u'(x) = x \text{ و } v(x) = \ln x \text{ ومنه } u(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ و } v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{إذن } \int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \approx 0,636$$

(2) القيمة المضبوطة لـ A :

$$A = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 1 dx + \int_1^2 x \ln x dx = 1 + 2 \ln 2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + 2 \ln 2 \approx 1,636$$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

