

العُبْقَرِي في الرياضيات

السؤال العميق

الثالثة ثانوي

● الشعب: علوم تجريبية؛

● تقني رياضي؛

● رياضيات.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدوال العددية)

الملخص // الشعبة: علوم تجريبية: تقني رياضي.

ملخص: حول الدوال العددية // التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: علوم تج: تر.**1 المستقيمات المقاربة:**

المستقيم المقارب $\mathbb{P}$	النهاية	التفسير الهندسي
① العمودي	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$	المستقيم ذو المعادلة $x = a$ (الموازي لمحور الترتيب) مقارب لـ (C_f) .
② الأفقي	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$	المستقيم ذو المعادلة $y = b$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند ∞ .
③ المائل	$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f) عند ∞ .

ملاحظة: إذا كان: $\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \end{cases}$

فإن: المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f) عند ∞ .

2 الدالة الزوجية، والدالة الفردية:

الدالة f $\mathbb{P}$	معناه	ويكون
① الزوجية	(1) D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر (أي: من أجل كل x من D_f , فإن $-x$ من D_f) (2) $f(-x) = f(x)$	منحناها متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب.
② الفردية	(1) D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر (أي: من أجل كل x من D_f , فإن $-x$ من D_f) (2) $f(-x) = -f(x)$ أو $f(-x) + f(x) = 0$	منحناها متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

3 مركز التناظر، ومحور التناظر:

① محور التناظر	المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر للمنحنى (C_f) , معناه: $f(2\alpha - x) = f(x)$ أو $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$
② مركز التناظر	النقطة $\omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) , معناه: $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ أو $f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$

4 تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب، ومع حامل محور الفواصل:

نكتب	الطريقة	م
$(C_f) \cap (yy') = \{A(0; \dots)\}$	■ نحسب $f(0)$.	① تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب $(C_f) \cap (yy')$
$(C_f) \cap (xx') = \{A(\dots; 0); B(\dots; 0)\}$	■ نحل المعادلة $f(x) = 0$ في D_f .	② تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل $(C_f) \cap (xx')$

5 المماس:

هناك ست (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى معرفة فاصلة نقطة التماس x_0 هي المفتاح للإجابة على أي منها كما سنرى:

الصيغة م	الطرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى (العادية)	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .	نكتب الدستور: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المُعطاة.
الصيغة الثانية	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0 .	نحلّ المعادلة $f(x_0) = y_0$ ، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).
الصيغة الثالثة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) ميله (أو معامل توجيهه) يساوي α .	نحلّ المعادلة $f'(x_0) = \alpha$ ، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). <u>ملاحظة:</u> عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.
الصيغة الرابعة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يُوازي المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$.	نحلّ المعادلة $f'(x_0) = \alpha$ ، عُدنا إلى الحالة الثانية. <u>ملاحظة:</u> مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه.
الصيغة الخامسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يُعامد المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$.	نحلّ المعادلة $\alpha \times f'(x_0) = -1$. <u>ملاحظة:</u> مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيهيهما يساوي (-1) .
الصيغة السادسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ذات الإحداثي $(x_M; y_M)$.	نحلّ المعادلة $y_M = f'(x_0)(x_M - x_0) + f(x_0)$ وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).

6 وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $ax + b$: (Δ) :

الطريقة م	إشارة الفرق	الوضعية النسبية
ندرس إشارة الفرق $f(x) - (ax + b)$	■ $f(x) - (ax + b) > 0$ ■ $f(x) - (ax + b) < 0$ ■ $f(x) - (ax + b) = 0$	■ (C_f) يقع فوق (Δ) . ■ (C_f) يقع تحت (Δ) . ■ (C_f) يقطع (Δ) .

7 النهايات:

(أ) حالات <<عدم التعيين>> (ح ع ت):

توجد $\neq$	الجمع	الجداء	حاصل القسمة
أربع (04) أشكال	$(+\infty) + (-\infty)$ والعكس	$0 \times \infty$ والعكس	$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

(ب) نهاية # دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$:○ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty + (-\infty)$.

$g(x) = x^2 - 2x^3 + 1$	$f(x) = x^3 + x - 2$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)$

(ج) نهاية # دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:○ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty + (-\infty)$.○ لحساب نهايات # دالة ناطقة عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها؛ نتذكر أن: $\frac{l}{0} = \infty$ ويُحدّد بدراسة إشارة المقام على اليمين واليسار وحسب مجموعة التعريف.

المقام من الشكل / حيث	n فردي	n زوجي
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	إشارة x^n من إشارة x النهاية عند 0 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \left(\frac{l}{0^+} \right)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \left(\frac{l}{0^-} \right)$	إشارة x^n موجب ($x^n \geq 0$) النهاية عند 0 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \left(\frac{l}{0^+} \right)$
$(ax + b)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	إشارة $(ax + b)^n$ من إشارة $(ax + b)$ النهاية عند $-\frac{b}{a}$ $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{(ax+b)^n} \left(\frac{l}{0^+} \right)$ عكس إشارة $0^+ a$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{(ax+b)^n} \left(\frac{l}{0^-} \right)$ عكس إشارة $0^- a$	إشارة $(ax + b)^n$ موجب ($(ax + b)^n \geq 0$) النهاية عند $-\frac{b}{a}$ $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{(ax+b)^n} \left(\frac{l}{0^+} \right)$
$ax^2 + bx + c$	ندرس إشارة $ax^2 + bx + c$ باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$	

(ج) إشارة $ax + b$ ($a \neq 0$):

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	مثل إشارة a	عكس إشارة a	مثل إشارة a

(ج) إشارة $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$	حلول المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$	إشارة $P(x)$	تحليل $P(x)$																				
$\Delta < 0$	$S = \emptyset$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">مثل إشارة a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	مثل إشارة a		لا يُمكن تحليل $P(x)$														
x	$-\infty$	$+\infty$																					
$P(x)$	مثل إشارة a																						
$\Delta = 0$	$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>مثل</td><td> </td><td>مثل</td></tr><tr><td></td><td>إشارة a</td><td></td><td>إشارة a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$P(x)$	مثل		مثل		إشارة a		إشارة a	$P(x) = a(x - x_0)^2$ ($x_0 = -\frac{b}{2a}$)								
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$																				
$P(x)$	مثل		مثل																				
	إشارة a		إشارة a																				
$\Delta > 0$	$S = \{x_1; x_2\}$ <u>حيث:</u> $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>مثل</td><td>عكس</td><td>مثل</td><td>مثل</td></tr><tr><td></td><td>إشارة a</td><td> </td><td>إشارة a</td><td> </td></tr><tr><td></td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table> (نفرض أن $x_1 < x_2$)	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	مثل	عكس	مثل	مثل		إشارة a		إشارة a			a	a	a	a	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																			
$P(x)$	مثل	عكس	مثل	مثل																			
	إشارة a		إشارة a																				
	a	a	a	a																			

8 الاشتقاقية:

أ. مشتقات دوال مألوفة:

مجالات قابلية الاشتقاق	$f'(x) =$	$f(x) =$
$\mathbb{R}$	0	$(k \in \mathbb{R}) k$
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) x^n$
$]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) \frac{1}{x^n}$
$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$

ب. المشتقات والعمليات على الدوال: u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)	$\frac{1}{v}$	uv	ku	$u + v$	الدالة
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$-\frac{v'}{v}$	$u'v + v'u$	ku'	$u' + v'$	المشتقة

ناتج:

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

ج. الاشتقاقية والاستمرارية:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I ، فإنّها مستمرة على هذا المجال وعكس هذه الخاصية ليس صحيح.

اشتقاق دالة مركبة:

أ. مشتقة الدالة $v \circ u$: $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدالة $x \mapsto u(ax + b)$ ($a \neq 0$)

$$f(x) = u(ax + b) \quad f'(x) = au'(ax + b)$$

مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

مشتقة الدالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)

$$f(x) = [u(x)]^n \quad f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$$

مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{[u(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

$$f(x) = \frac{1}{[u(x)]^n} \quad f'(x) = \frac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$$

9 الإستمرارية:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، إذا كانت f مستمرة على I فإن تفسيرها البياني (أو الهندسي) هو: أنه يمكن رسم منحناها البياني على I دون رفع القلم (اليد).

نتائج:

- الدّوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدّوال كثيرات الحدود؛ " $\cos$ " و " $\sin$ " هي دوال مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دوال مستمرة هي دوال مستمرة.

مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة القيم المتوسطة (ثقب دون برهان)	التفسير البياني (أو الهندسي) "لمبرهنة القيم المتوسطة"
الحالة العامة ($k \in \mathbb{R}$) إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a; b]$، من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، فإن: المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a; b]$.	المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = k$ على الأقل في نقطة واحدة في المجال $[a; b]$.
الحالة الخاصة ($k = 0$) إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a; b]$، وكان 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$، فإن: المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a; b]$.	المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل على الأقل في نقطة واحدة في المجال $[a; b]$.
وحدانية الحل	
الحالة العامة ($k \in \mathbb{R}$) إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a; b]$، من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، فإن: المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a; b]$.	المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = k$ في نقطة واحدة فاصلتها α في المجال $[a; b]$.

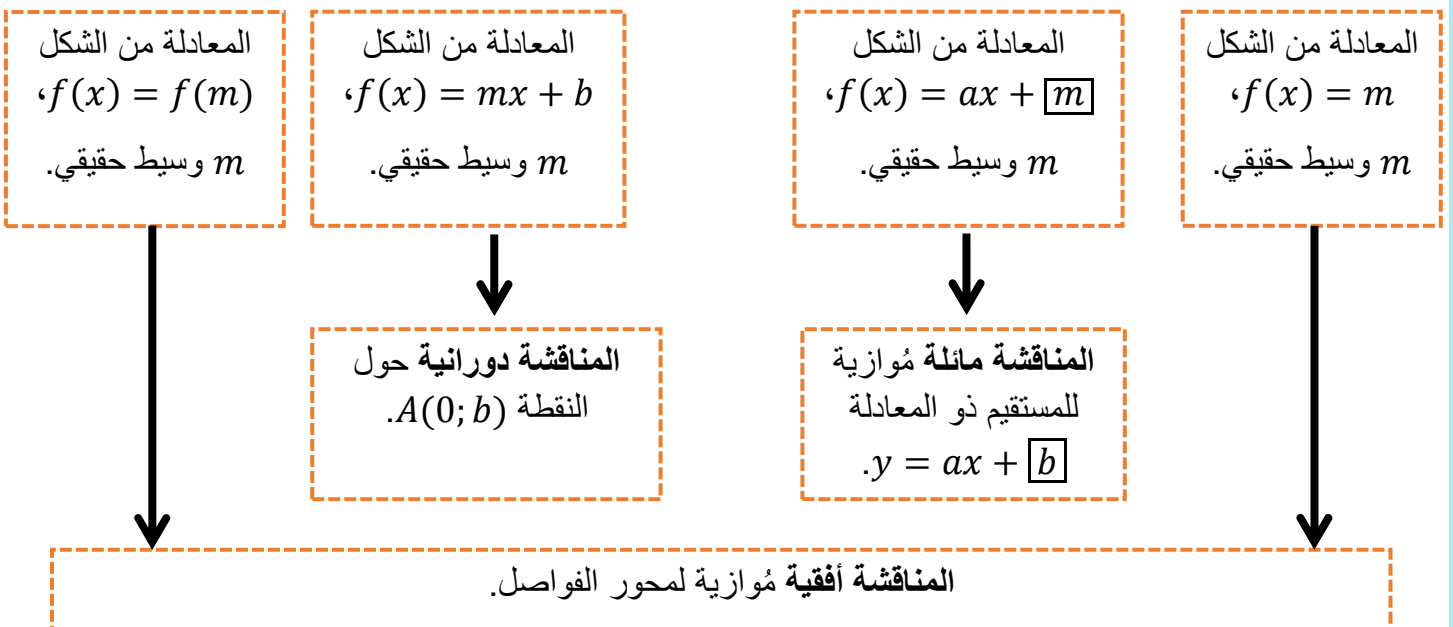
الحالة الخاصة ($k = 0$) إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة ورتبية تماماً على المجال $[a; b]$، وكان 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ أي: $f(a) \times f(b) < 0$، فإن: المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[a; b]$.	المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α في المجال $[a; b]$.
--	---

طُرُق إثبات "وُجُود" حلول معادلة في مجال $[a; b]$ باستعمال "مبرهنة القيم المتوسطة"

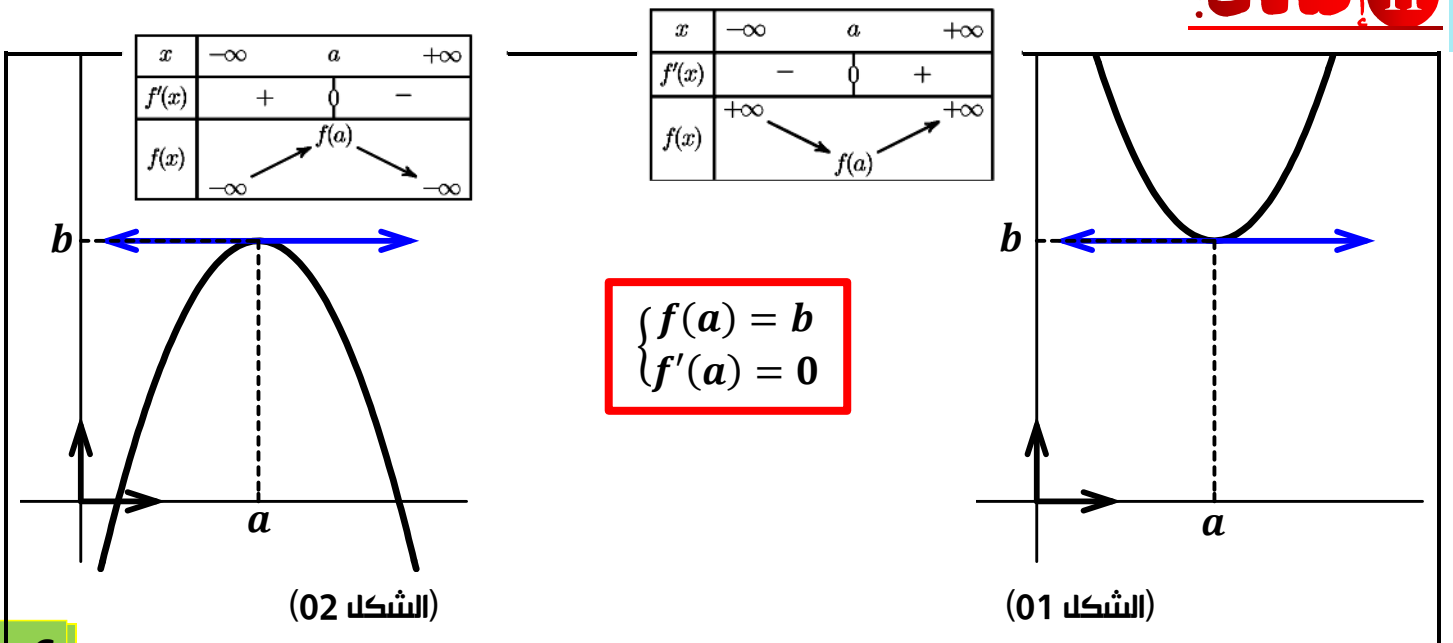
الحالة الخاصة ($k = 0$)	الحالة العامة ($k \in \mathbb{R}$)
1/ نكتب المعادلة من الشكل $f(x) = 0$ (إن لم تُعطى لنا) 2/ نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a; b]$. 3/ نتحقق من أن $f(a) \times f(b) < 0$، وذلك بعد حسابهما.	1/ نكتب المعادلة من الشكل $f(x) = k$ (إن لم تُعطى لنا) 2/ نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a; b]$. 3/ نتحقق من أن k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، وذلك بعد حسابهما.

ملاحظة: تقبل المبرهنات السابقة عدة تمديدات في حالة الدالة f مستمرة ورتبية تماماً على مجال مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

10 المناقشة البيانية:



11 إضافات:



12 استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعد إنشاء (C_f) ، قد يُطلب منا أن نستنتج منحياً آخر (C_h) -مثلاً- لدالة h ؛ ويكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي:

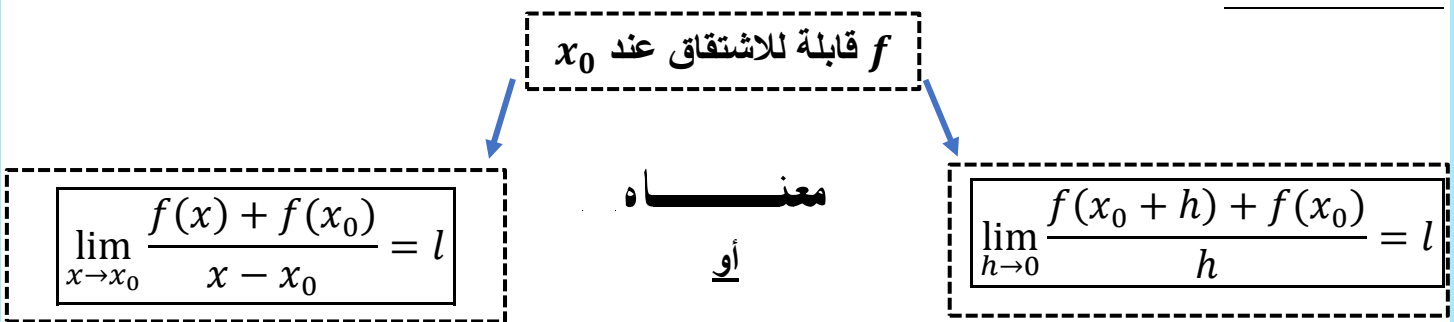
الصيغة	الطـور	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى	استنتج (C_h) منحى الدالة h حيث: $h(x) = f(x) $	- على المجالات التي تكون فيها $f(x) \geq 0$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو فوقه) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f). - على المجالات التي تكون فيها $f(x) \leq 0$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو تحته) نحصل على $h(x) = -f(x)$؛ ومنه يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل.
الصيغة الثانية	استنتج (C_h) منحى الدالة h حيث: $h(x) = f(x)$ <u>ملاحظة:</u> عادةً ما يُطلب منا أولاً أن نُثبت أن h زوجية.	- إذا كان $x \geq 0$ و $x \in D_f$ أي $x \in D_f \cap [0; +\infty[$ (x ينتمي إلى الجزء الموجب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f). - تُكمل الجزء المتبقي من (C_h) بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب لأن h زوجية.
الصيغة الثالثة	استنتج (C_h) منحى الدالة h حيث: $h(x) = f(- x)$ <u>ملاحظة:</u> عادةً ما يُطلب منا أولاً أن نُثبت أن h زوجية.	- إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_f$ أي $x \in D_f \cap]-\infty; 0]$ (x ينتمي إلى الجزء السالب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f). - تُكمل الجزء المتبقي من (C_h) بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب لأن h زوجية.
الصيغة الرابعة	استنتج (C_h) منحى الدالة h حيث: $h(x) = -f(x)$	(C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل.
الصيغة الخامسة	استنتج (C_h) منحى الدالة h حيث: $h(x) = f(-x)$	(C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب.
الصيغة السادسة	استنتج (C_h) منحى الدالة h حيث: $h(x) = -f(-x)$	(C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى مبدأ المعلم.
الصيغة السابعة	استنتج (C_h) منحى الدالة h التي تحقق: $h(x) = f(x + b) + k$	نستنتج (C_h) من (C_f) بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ k \end{pmatrix}$ (أي صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ k \end{pmatrix}$)
الصيغة الثامنة	استنتج (C_h) منحى الدالة h التي تحقق: $h(x) = f(x) + k$	- هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $b = 0$. (C_h) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.
الصيغة التاسعة	استنتج (C_h) منحى الدالة h التي تحقق: $h(x) = f(x + b)$	- هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $k = 0$. (C_h) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-b\vec{i}$.

الصيغة العاشرة	استنتج (C_h) منحنى الدالة h التي تحقق: $h(x) = kf(x)$ ؛ $k \in \mathbb{R}^*$.	■ نحصل على نقطة من (C_h) ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد k ؛ حيث M نقطة من (C_f) فاصلتها x .
----------------	--	---

13 قابلية اشتقاق دالة عند عدد حقيقي: (العدد المشتق)

تكون f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كانت	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0)}{h} = l$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0} = l$
حيث $f'(x_0) = l \in \mathbb{R}$ يسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 . وتفسيرها البياني (أو الهندسي) هو: المنحنى (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، ومعادلته من الشكل:	$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

مخطط توضيحي (خريطة ذهنية)



l يسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 ، ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

نكتب:

التفسير الهندسي للعدد المشتق:

يُمثل بيانياً (أو هندسياً) معامل توجيه مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(x_0; y_0)$ ، حيث $y_0 = f(x_0)$. بصيغة أخرى: يُمثل بيانياً (أو هندسياً) معامل توجيه مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .
--

القراءة البيانية للعدد المشتق:

يمكن إيجاد بيانياً بأخذ نقطتين A و B من هذا المماس معلومتين الإحداثيات فنجد: $f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.	إذا كان المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 مُوازيًا لمحور الفواصل فإن معامل توجيهه معدوم أي $f'(x_0) = 0$ وتكون معادلته من الشكل $y = f(x_0)$.
--	--

14 نقطة زاوية:

إذا كان: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2$ ، حيث l_1 و l_2 عدنان حقيقيان.

فإن f قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليسار وعددها المشتق هو $f'_g(x_0) = l_1$.

و f قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليمين وعددها المشتق هو $f'_d(x_0) = l_2$.

في حالة ($l_1 \neq l_2$)، نقول أن f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 .

ويكون التفسير الهندسي هو أن النقطة ذات الفاصلة x_0 : نقطة زاوية للمنحنى (C_f).

ملاحظة 01: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشكل التالي: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$

ملاحظة 02: المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماسين عند نقطة الزاوية معادلتهما:

$$\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

تنبيه: تبقى النقطة الزاوية موجودة حتى لو كانت إحدى النهايتين السابقتين عدداً حقيقياً والأخرى ∞ .

15 نقطة الانعطاف:

بصفة عامة، لتعيين نقطة الانعطاف؛ نقوم بما يلي:

▪ نحسب المشتق الثاني $f''(x)$ ، وندرس إشارته، فإذا وجدنا $f''(x)$ انعدم عند قيمة x_0 من D_f ، مُغيّراً إشارته،

تكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ (C_f)؛ أي: $E(x_0; f(x_0))$.

▪ حالة خاصة:

في بعض الحالات، يُمكن تعيين نقطة الانعطاف دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$ ، وذلك إذا انعدم المشتق

الأول $f'(x)$ عند قيمة x_0 من D_f ، ولم يُغيّر إشارته، فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ (C_f)؛ أي:

$$E(x_0; f(x_0))$$

▪ ملاحظة:

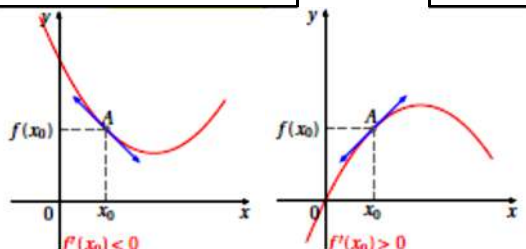
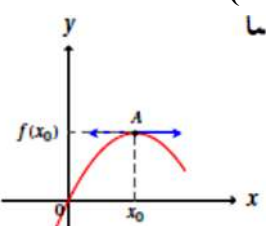
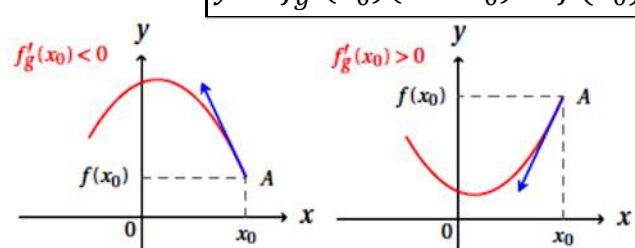
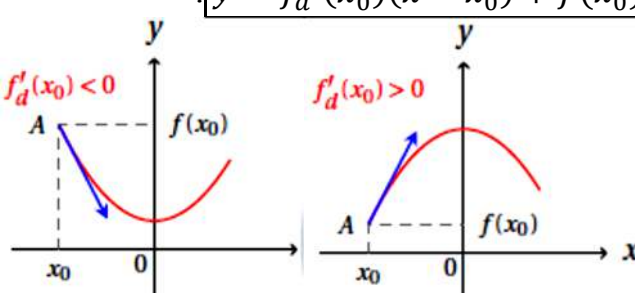
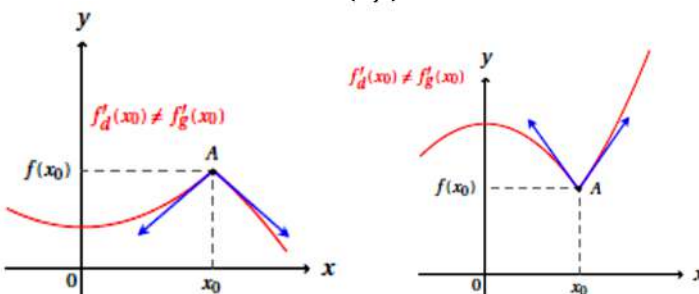
في بعض الحالات، يُفرض علينا سياق التمرين أن نُعين نقطة الانعطاف بالكيفية التالية:

يُطلب منا أن ندرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ، فإذا وجدنا أن (C_f)

غير وضعيته بالنسبة إلى المماس (قبل وبعد نقطة التماس) نستنتج أن النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ (C_f)؛

$$E(x_0; f(x_0))$$

16 بعض التفسيرات الهندسية للاشتقاقية:

النهاية	الاستنتاج	التفسير البياني (أو الهندسي)
$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$	الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0، وعددها المشتق هو $f'(x_0) = l$	المنحنى (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0، معامل توجيهه (ميله) $f'(x_0) = l$، ومعادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. 
$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$	الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0، وعددها المشتق هو $f'(x_0) = 0$	المنحنى (C_f) يقبل مماس (موازي لمحور الفواصل) عند النقطة ذات الفاصلة x_0، معامل توجيهه (ميله) $f'(x_0) = 0$، ومعادلته: $y = f(x_0)$. 
$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$	الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 على اليسار، وعددها المشتق هو $f'_g(x_0) = l_1$	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0، معادلته: $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. 
$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$	الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 على اليمين، وعددها المشتق هو $f'_d(x_0) = l_2$	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0، معادلته: $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. 
$l_1 \neq l_2$	الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0.	المنحنى (C_f) يقبل نصفين مماسين عند النقطة ذات الفاصلة x_0، تسمى هذه النقطة: نقطة زاوية للمنحنى (C_f). 

مجلة العبقرى في الرياضيات (الدّوال العددية - بكالوريا جزائرية)

التمارين // الشعبة: علوم تجريبية.

التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: علوم تجريبية.

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يأتي:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1- (أ) بقراءة بيانية شكل جدول تغيّرات الدالة g وحدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

(ب) علّل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ يُحقّق: $g(\alpha) = 0$.

(ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

2- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بما يأتي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

(ب) عيّن دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسّر النتيجة بيانياً.

(ج) احسب: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ وفسّر النتيجتين بيانياً.

(د) شكل جدول تغيّرات الدالة f .

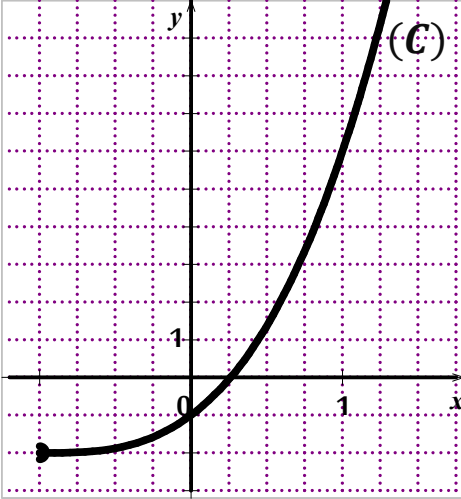
3- نأخذ $\alpha \simeq 0,26$

(أ) عيّن مُدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

(ب) أرسم المنحنى (Γ) .

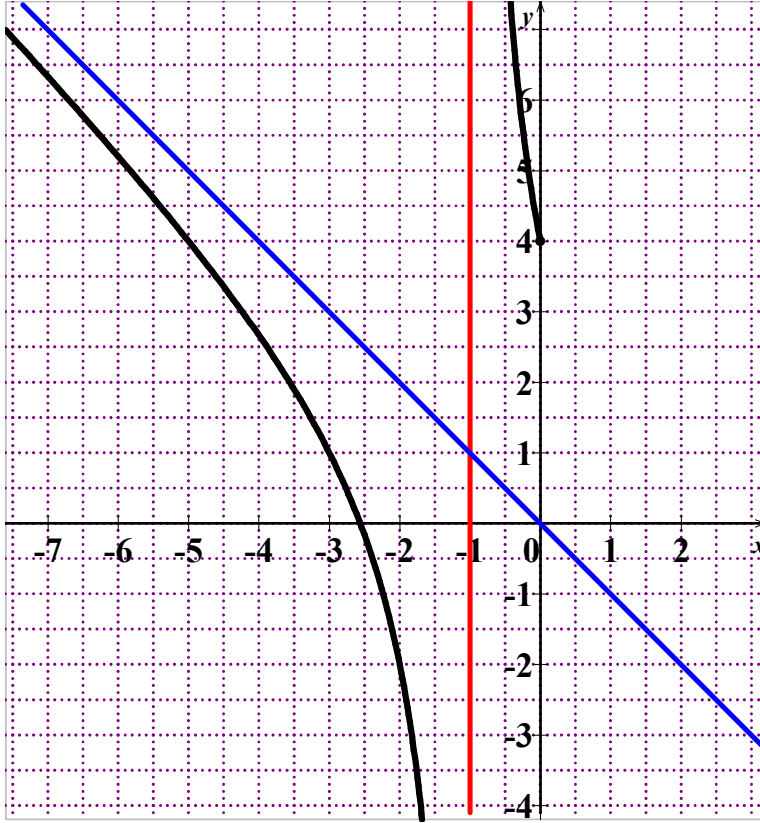
4- (أ) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.

(ب) عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تُحقّق: $F(1) = 2$.



التمرين 02: (07,5 نقطة) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: علوم تجريبية.

(I) f دالة معرفة على $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$: $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$



(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

(1) أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I .
ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها.

(2) g دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي:
 $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

(أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.
(ب) تحقّق من أنّ (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً.
(Δ) عند $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له.
(ج) أدرس تغيرات g .

(II) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:
 $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) أ) أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ماذا تستنتج؟
ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتَي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

(3) أرسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k).

(4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمتين التي معادلاتها: $x = \frac{1}{2}$ ، $y = 0$

و $x = -\frac{1}{2}$.

التمرين 03: (07 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: علوم تجريبية.

(I) -لنكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) -نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$).

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$(2) \text{ أ) بيّن أنّه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

$$(3) \text{ أ) بيّن أنّه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f'(x) = \frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2} \text{ حيث } f' \text{ مشتقة الدّالة } f.$$

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيّرات الدّالة f . (نأخذ $f(\alpha) \simeq -0,1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

$$(6) \text{ لتكن } h \text{ الدّالة المعرّفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي: } h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R} : h(x) = f(x) - 2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h) .

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية - بكالوريا جزائرية)

الحلّ // الشّعبة: علوم تجريبية.

حلّ التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشّعبة: علوم تجريبية.

لدينا: المنحنى (C) هو التمثيل البياني للدّالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يأتي،
 $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

1-أ) بقراءة بيانية:

تشكيل جدول تغيّرات الدّالة g ؛ وتحديد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$:

x	-1	0	α	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	-2	-	-	+	+

$$g(0) = -1 \quad \text{و} \quad g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

ب) تعليل وجود عدد حقيقي α من المجال $0; \frac{1}{2}[$ يُحقّق، $g(\alpha) = 0$:

- g مستمرة ومنتزعة تماماً على المجال $0; \frac{1}{2}[$ (لأنّها منتزعة تماماً على المجال $]-1; +\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} g(0) = -1 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases}$ ، أي: $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد عدد حقيقي α من المجال $0; \frac{1}{2}[$ يُحقّق، $g(\alpha) = 0$.

ج) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$:

نُلخص إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$ في الجدول التالي:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	○	+

2-لدينا: $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$ ؛ و $D_f =]-1; +\infty[$ ؛ التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أ) التحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$:

معرفّة وقابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ ، ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1)^2 - 2(1)(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{[(x+1)^2]^2} \\ &= \frac{(x+1)[(3x^2 + 6x + 3)(x+1) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)]}{(x+1)(x+1)^3} \\ &= \frac{3x^3 + 6x^2 + 3x + 3x^2 + 6x + 3 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 4}{(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

(ب) تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وتفسير النتيجة بيانياً:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = \frac{0}{(\alpha+1)^3} = 0$

التفسير البياني: المنحنى (Γ) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة α ؛ مماساً معامل توجيهه معدوم أي: يوازي حامل محور الفواصل.

(ج) حساب، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$ وتفسير النتيجة بيانياً:

■ بمأن: $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 = 0^+$ ، فإن: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ (الموازي لمحور التراتيب) مقارب لـ (Γ) .

■ لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) - (x + 1)(x + 1)^2}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x + 1)^2} = 0$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (Γ) عند $+\infty$.

(د) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$ ومنه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، فإن: $(x + 1)^3 > 0$

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$ ؛ ويكون:

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

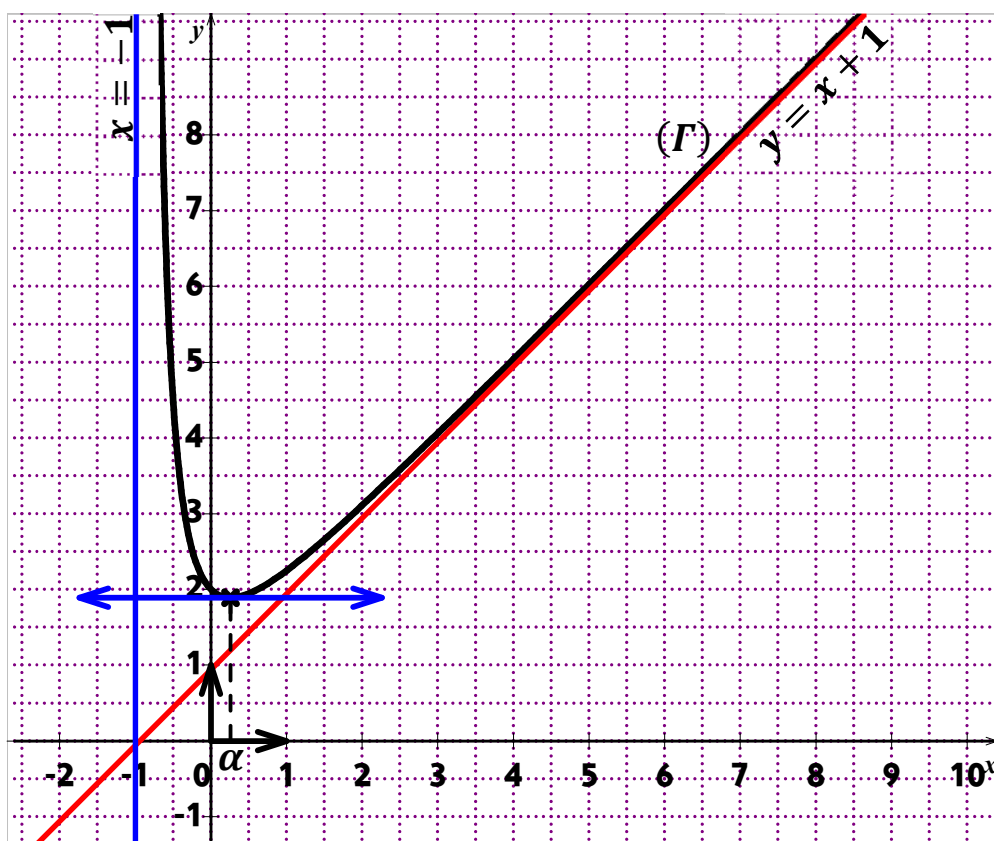
حيث: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

3- بأخذ $\alpha \simeq 0,26$

(أ) تعيين مُدَوْر $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} :

نلاحظ أن: $f(x) = \frac{g(x)+3}{(x+1)^2}$ ، إذن: $f(\alpha) = \frac{g(\alpha)+3}{(\alpha+1)^2} = \frac{3}{(\alpha+1)^2} \simeq 1,89$

(ب) رسم المنحنى (Γ) :



أ-4) كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان:

$$f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{(x+a)(x+1)^2+b}{(x+1)^2} = \frac{(x+a)(x^2+2x+1)+b}{(x+1)^2} = \frac{x^3+(a+2)x^2+(2a+1)x+a+b}{(x+1)^2} \text{ لدينا:}$$

$$\text{ولدينا من جهة أخرى: } f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2} \text{ بالمطابقة نجد: } \begin{cases} a+2=3 \\ 2a+1=3 \\ a+b=2 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}} \text{ إذن:}$$

ب) تعيين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تُحقق، $F(1) = 2$:

$$\text{لدينا: } f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \text{ ومنه: } F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + c \text{ حيث } c \text{ عدد حقيقي ثابت؛}$$

$$F(1) = 2 \text{ معناه: } \frac{1}{2}(1)^2 + 1 - \frac{1}{1+1} + c = 2 \text{ وبالتالي: } c = 1$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + 1} \text{ إذن:}$$

حل التمرين 02: (07,5 نقطة) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: علوم تجريبية.

$$f \text{ دالة معرفة على }]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \text{ بـ } f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

أ) حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I :

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x+1} = +\infty$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4}{x+1} = -\infty$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

(ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f ، تشكيل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	4

g دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$.

(أ) حساب نهاية g عند $+\infty$:

■ بمأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ ، فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

(ب) التحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له:

■ بمأن: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ ، أي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = 0$

فإن: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $[y = x]$ (المنصف الأول) مقارب مائل للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

(ج) دراسة تغيرات g :

g معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$g'(x) = 1 - \frac{4(1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

ومنه: إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-1)$ على المجال $[0; +\infty[$ ؛ لأن: $\frac{(x+3)}{(x+1)^2} > 0$ على $[0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	$\bigcirc$	+

إذن: g متناقصة تماما على المجال $[0; 1]$ ، ومتزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ ؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$g(x)$	4	3	$+\infty$

(II) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$.

(1) حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(h-4)(h+1)+4}{h+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h - 4h - 4 + 4}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-3}{h+1} = -3$$

ومنه: الدالة k قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين وعددها المشتق من اليمين عند 0 هو $k'_d(0) = -3$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-(h+4)(h+1)+4}{h+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - h - 4h - 4 + 4}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-5}{h+1} = -5$$

ومنه: الدالة k قابلة للاشتقاق عند 0 من اليسار وعددها المشتق من اليسار عند 0 هو $k'_g(0) = -5$.

الاستنتاج:

بمّا: $k'_g(0) \neq k'_d(0)$ ، فإنّ الدّالة k غير قابلة للاشتقاق عند 0.

ب) التفسير الهندسي:

النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية؛ والمنحنى (C_k) يقبل نصفي مماسين.

2) كتابة معادلتى المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:

■ معادلة (Δ_1) من الشكل $y = k'_g(0)(x - 0) + k(0)$ ومنه: $(\Delta_1): y = -5x + 4$.

■ معادلة (Δ_2) من الشكل $y = k'_d(0)(x - 0) + k(0)$ ومنه: $(\Delta_2): y = -3x + 4$.

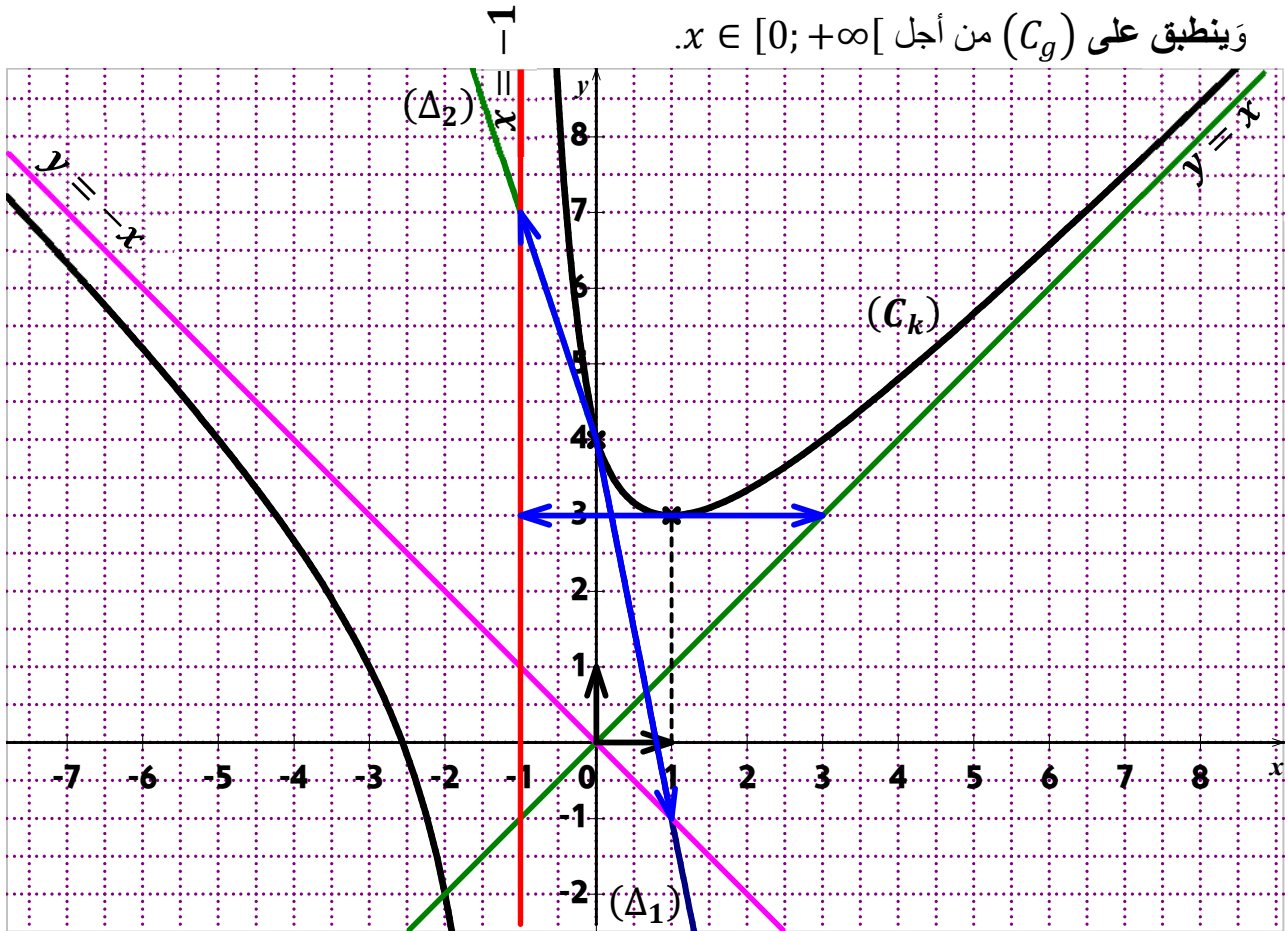
3) رسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) :

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1} = \begin{cases} x + \frac{4}{x+1}; & x \geq 0 \\ -x + \frac{4}{x+1}; & x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$k(x) = \begin{cases} g(x); & x \in [0; +\infty[\\ f(x); & x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \end{cases} \quad \text{أي:}$$

إذن: (C_k) ينطبق على (C_f) من أجل $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$ ؛

و ينطبق على (C_g) من أجل $x \in [0; +\infty[$.



4) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمتين التي معادلاتها $x = \frac{1}{2}$ ، $y = 0$

و $x = -\frac{1}{2}$:

$$\text{لدينا: } A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx$$

$$.A = \left[-\frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[\frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4} + 4 \ln 3 \right) ua \text{ ومنه:}$$

حل التمرين 03: (07 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: علوم تجريبية.

(I) - لدينا: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ و $D_g =]-\infty; +\infty[$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$

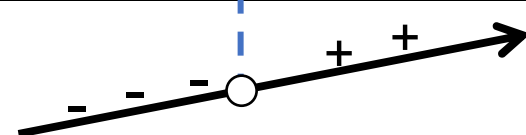
(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

ولدينا: $6x^2 - 8x + 7 > 0$ (لأن مميزه سالب تماما $\Delta = (-8)^2 - 4(6)(7) = -104 < 0$)

وبالتالي: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.

إذن: الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$:

لدينا: g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $[0,7; 0,8]$ (لأنها متزايدة تماماً على المجال $\mathbb{R}$)

ولدينا: $\begin{cases} g(0,7) = -0,374 \\ g(0,8) = +0,064 \end{cases}$ أي: $g(0,7) \times g(0,8) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0,7; 0,8]$.

(ب) استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات وحسب السؤال (2) أ) نجد:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-		+

(II) - لدينا: $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$ ، $D_f =]-\infty, +\infty[$

و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

▪ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} x \right) = -\infty$

▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} x \right) = +\infty$

(2) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$:

لدينا: $\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{x+1}{2} + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} &= \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)} + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1} = f(x) \end{aligned}$$

ومنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

إذن:

(ب) استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{4x} = 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{4x} = 0$

إذن: المستقيم $(\Delta): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ مُقارب

مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ولدينا: $2x^2 - 2x + 1 > 0$ (لأن مميزه سالب تماما $\Delta = (-2)^2 - 4(2)(1) = -4 < 0$)

وبالتالي: إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة البسط $(1-3x)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$1-3x$	+	○	-
$f(x) - y$	+	○	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

(3) أ) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

لدينا: $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1) - (4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2} = \frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2} = \frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2} \end{aligned}$$

إذن: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

(ب) استنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f : $f(\alpha) \simeq -0,1$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$ وهي ملخصة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	-	$\circ$	+	
$g(x)$		-	$\circ$	+
$f'(x)$	+	$\circ$	-	+

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\circ$	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) حساب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$:

لدينا: $f(1) = \frac{(1)^3 - 2(1) + 1}{2(1)^2 - 2(1) + 1} = \frac{0}{1} = 0$ ■

■ $f(x) = 0$ معناه: $\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1} = 0$

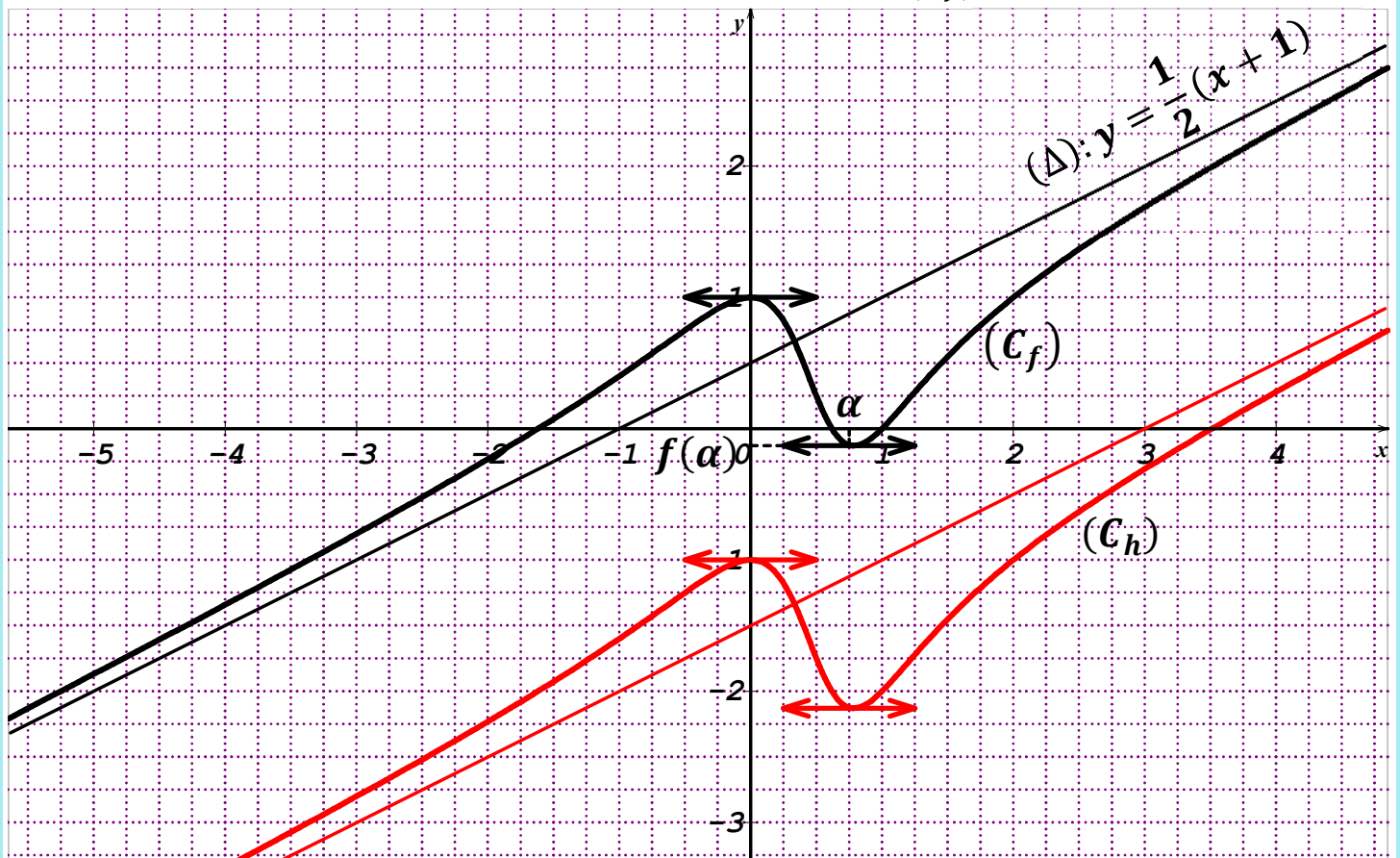
ومنه: $(x-1)(x^2+x-1) = 0$

وعليه: $x-1 = 0$ أو $x^2+x-1 = 0$

وبالتالي: $x = 1$ أو $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ أو $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

إذن: حلول المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ هي: $x = 1$ ؛ $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ؛ $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(5) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) والمنحنى (C_h) :



(6) لدينا: $D_h = \mathbb{R}$ ، $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(أ) التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) = f(x) - 2$:

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2 \\ &= \frac{x^3 - 2x + 1 - 2(2x^2 - 2x + 1)}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x) \end{aligned}$$

إذن: $h(x) = f(x) - 2$.

(ب) استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثم إنشاء (C_h) :
 بمأن $h(x) = f(x) - 2$ فإن (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j} - 2$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية - بكالوريا جزائرية)

التمارين // الشعبة: تقني رياضي.

التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني رياضي.

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
(1) أثبت أن الدالة f فردية.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

ج- ادرس تغيرات الدالة f .

(2) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.

ج- بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مُقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر.

د- أرسم (d) ؛ (d') و (C_f) في المعلم السابق.

(3) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$.

أ- بين أن الدالة g زوجية.

ب- انطلاقاً من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق.

التمرين 02: (07 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني رياضي.

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha \in]-1,48; -1; 47[$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$.

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مُقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) بين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

5) نرمز بـ S إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ ، $x = \alpha$ و $y = 0$.

أثبت أنّ: من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$ ، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ثمّ بيّن أنّ: $-\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدوال العددية - بكالوريا جزائرية)

الحلول // الشعبة: تقني رياضي.

حل التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني رياضي.

لدينا: $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$ و $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- أثبات أن الدالة f فردية:

لدينا: $D_f = \mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر،

ولدينا: $f(-x) = (-x) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}} \right) = -x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = -f(x)$ إذن: f دالة فردية.

ب- أثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

لدينا: $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f(x) = 1 + \frac{1 \times \sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times x}{\sqrt{x^2+1}^2}$$

ومنه:

$$= 1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = 1 + \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{x^2+1} = 1 + \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

ج- دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = +\infty$

وبما أن f دالة فردية و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا من جهة أخرى: من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$

إذن: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2- كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 + \frac{1}{(0^2+1)\sqrt{0^2+1}} = 2 \\ f(0) = 0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{0^2+1}} \right) = 0 \end{cases}$$

معادلة (T) من الشكل $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ وبما أن:

$$(T): y = 2x$$

ب-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها:

(ندرس إشارة الفرق $f(x) - 2x$)

$$f(x) - 2x = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) - 2x = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \right) = x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right)$$

■ من أجل كل عدد حقيقي x ، $x^2 \geq 0$ ومنه: $x^2 + 1 \geq 1$

وعليه: $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$

$$\text{وبالتالي: } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \text{ إذن: } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \leq 0$$

إذن: إشارة الفرق $f(x) - 2x$ عكس إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	○	+
$f(x) - 2x$	+	○	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) يقع تحت (T)

استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها:

نلاحظ أن (C_f) غير وضعيته بالنسبة إلى مماسه (T) في نقطة التماس وهي النقطة O ، أي (C_f) يخترق المماس (T) في المبدأ O ، إذن: المبدأ O هو نقطة انعطاف لـ (C_f) .

ج-تبيان أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مُقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) - (x + 1) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 \text{ لأن:}$$

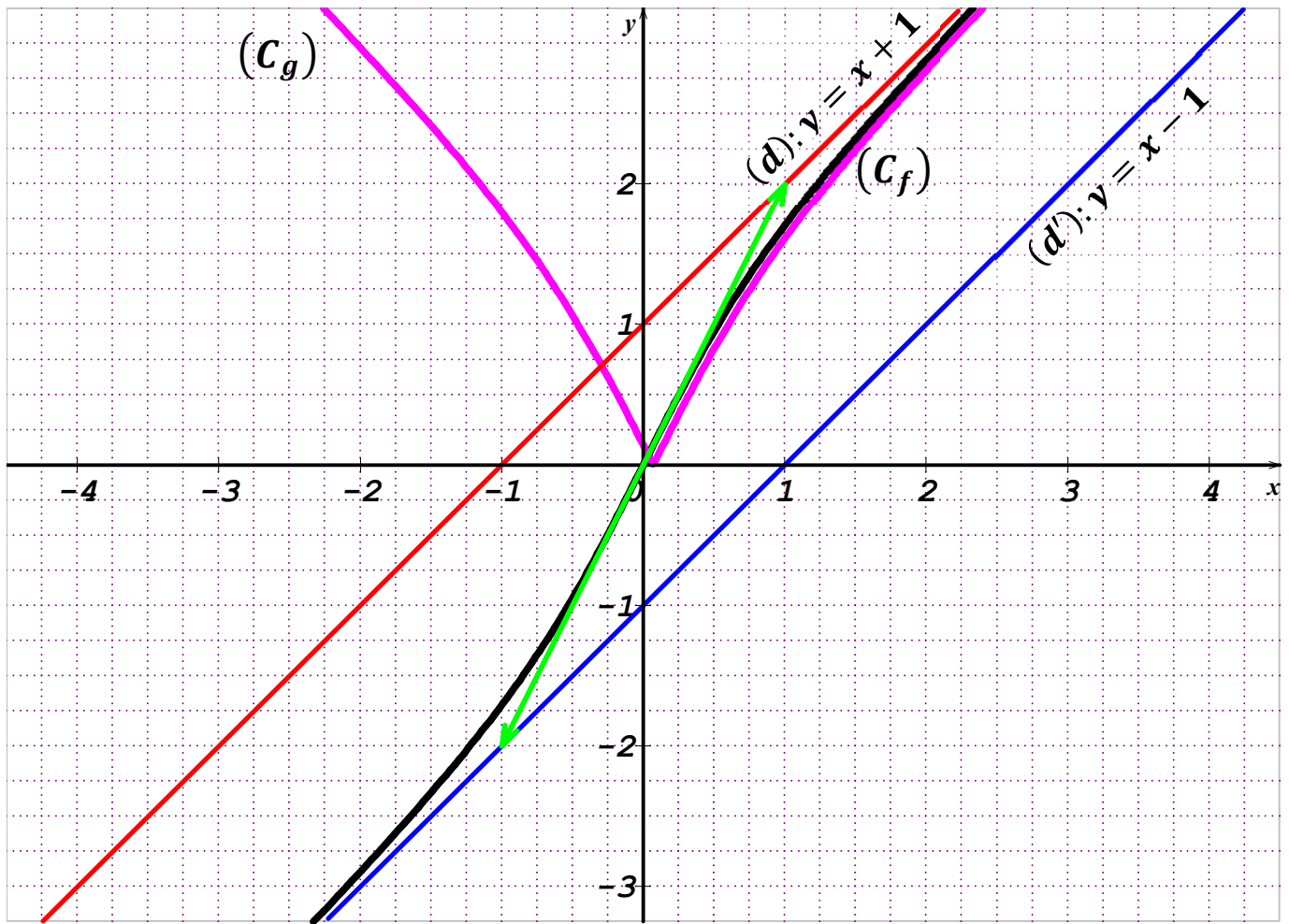
إذن: المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مُقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$.

استنتاج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر:

الدالة f فردية، فالمنحنى (C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ O ؛ وبما أن (C_f) يقبل (d) كمستقيم مُقارب مائل بجوار $+\infty$ فإنه يقبل مستقيم مُقارب مائل آخر (d') بجوار $-\infty$ وهو نظير (d) بالنسبة إلى المبدأ O .

$$\text{لدينا: } y = x + 1 \text{ وبالتالي: } -y = -x + 1 \text{ إذن: } (d'): y = x - 1$$

درسم (d) ؛ (d') و (C_f) في المعلم السابق:



تذكير: $|x| = |-x|$
 $|x|^2 = x^2$ و
 $\sqrt{x^2} = |x|$

3) لدينا: $D_g = \mathbb{R}$ و $g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$

أ- تبيان أن الدالة g زوجية:

لدينا: $D_g = \mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر،

ولدينا: $g(-x) = |-x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}} \right) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = g(x)$

إذن: g دالة زوجية.

ب- انطلاقاً من (C_f) رسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق:

نلاحظ أن: $g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|^2+1}} \right) = f(|x|)$

ومنه: من أجل $x \in [0; +\infty[$ يكون $g(x) = f(x)$ وعليه: (C_g) ينطبق على (C_f) ، وهو متناظر إلى محور الترتيب لأن g دالة زوجية.

حل التمرين 02: (07 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني ر.

1) لدينا: $D_g = \mathbb{R}$ و $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ ، إذن: الدالة g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

2) (تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ (1) تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha \in]-1, 47; -1, 48]$)

■ لدينا: g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $[-1, 47; -1, 48]$ لأنها متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$

■ ولدينا: $\begin{cases} g(-1,48) = -0,121792 \\ g(-1,47) = +0,003477 \end{cases}$ أي: $g(-1,48) \times g(-1,47) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha \in]-1,48; -1,47[$.
استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	$\bigcirc$	+

(II) لدينا: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$ و $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

(ب) تبين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2) - (2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4+6x^2-2x^4+6x}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+6x}{(x^2+2)^2} = \frac{x(x^3+6x+6)}{(x^2+2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f وتشكيل جدول تغيّراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$ وهي ملخصة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x		-	$\bigcirc$	+
$g(x)$	-	$\bigcirc$	+	
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	+

الدّالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $[0; +\infty[$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $[\alpha; 0]$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-3	$+\infty$

(2) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3-6}{x^2+2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-6}{x^2+2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$

إذن: المستقيم $(\Delta): y = x$ مُقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$)

لدينا: $f(x) - x = \frac{-2x-6}{x^2+2} = \frac{-2(x+3)}{x^2+2}$

وبالتالي: إشارة الفرق $f(x) - x$ من إشارة البسط $-2(x+3)$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x + 3$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x) - y$	$+$	$\circ$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

(3) تبيان أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$:

لدينا: $f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2}$

ومنه: $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha = \frac{2(\alpha^3 - 6) - 3\alpha(\alpha^2 + 2)}{2(\alpha^2 + 2)} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha - 12}{2(\alpha^2 + 2)} = \frac{-g(\alpha)}{2(\alpha^2 + 2)} = 0$

لأنّ: $g(\alpha) = 0$

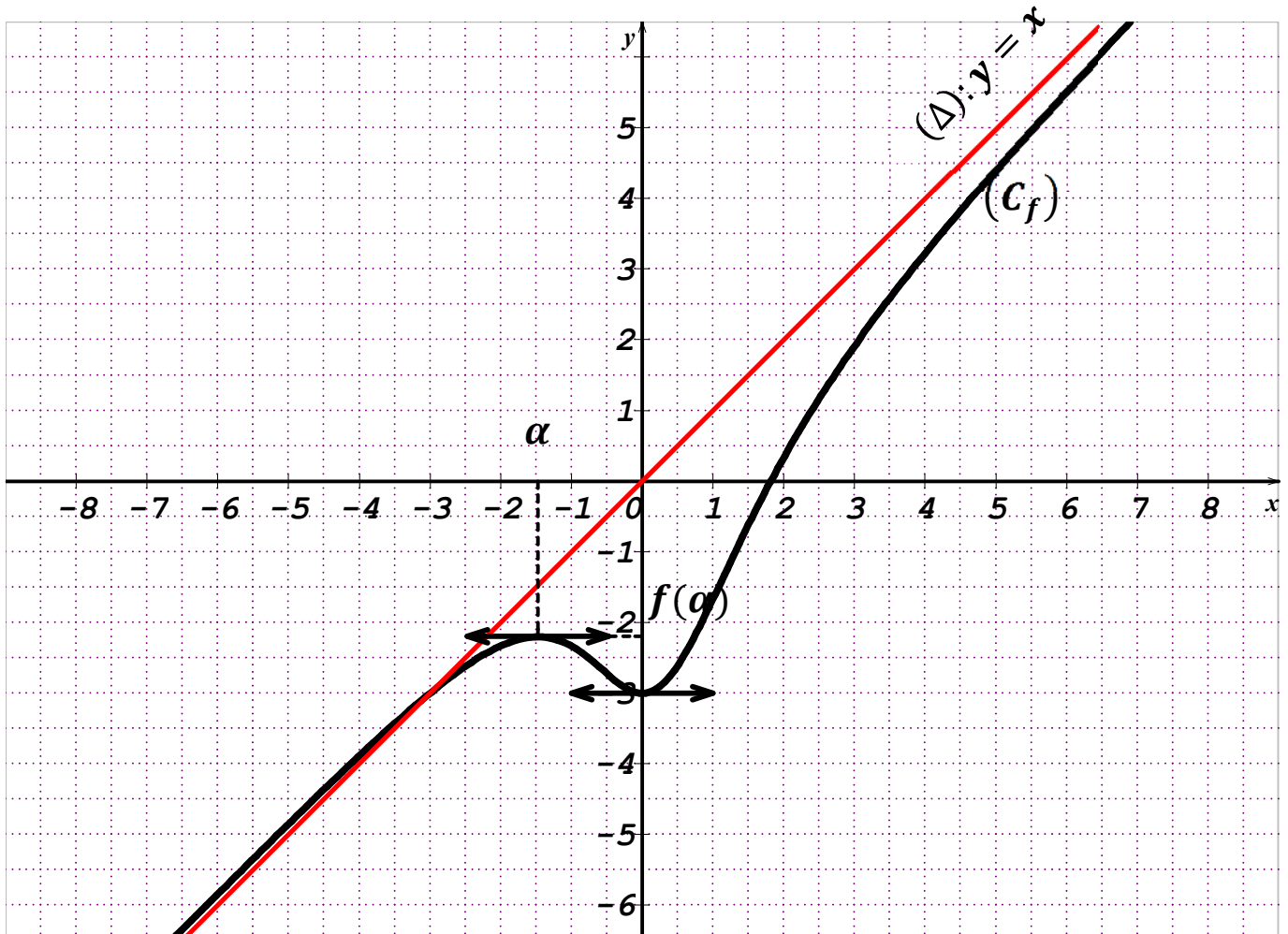
إذن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $-1,48 < \alpha < -1,47$ و $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ وبالتالي: $-1,48 \times \frac{3}{2} < \frac{3}{2}\alpha < -1,47 \times \frac{3}{2}$

إذن: $-2,22 < f(\alpha) < -2,205$

(4) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :



(5) مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = \alpha$ ، $x = 0$ و $y = 0$.

لدينا: $S = \int_{\alpha}^0 -f(x)dx$ لأنّ (C_f) يقع تحت محور الفواصل على المجال $[\alpha; 0]$.

اثبات أن: من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$ ، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ، ثمّ تبيان أن: $-\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$:

من جدول تغيّرات الدّالة f ، إذا كان: $\alpha \leq x \leq 0$ ،

فإنّ: $f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$ (لأنّها متناقصة تماماً على المجال $[\alpha; 0]$)

وبالتالي: $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

ومنه: $3 \leq -f(x) \leq -f(\alpha)$ وعليه: $\int_{\alpha}^0 3dx \leq \int_{\alpha}^0 -f(x)dx \leq \int_{\alpha}^0 -f(\alpha)dx$

وبالتالي: $- \left[\frac{3}{2} \alpha x \right]_{\alpha}^0 \leq S \leq [3x]_{\alpha}^0$

إذن: $-\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية - بكالوريا جزائرية)

التمارين // الشعبة: رياضيات.

التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: رياضيات.

- 1) f الدّالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يأتي: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$.
 (C_f) منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 ادرس تغيّرات الدّالة f .
- 2) أ- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y = x$.
 ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D) .
- 3) أ- بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.
 ب- عيّن معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.
 ج- أرسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.
- 4) أوجد الدّالة الأصلية للدّالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x .
- 5) g الدّالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعبارة: $g(x) = |f(x)|$.
 (C_g) منحنى الدّالة g في المعلم السابق.
 - بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثمّ ارسمه في نفس المعلم السابق.
- 6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x: g(x) = m^2$.

التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: رياضيات.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدوال العددية - بكالوريا جزائرية)

الحلول // الشعبة: رياضيات.

حل التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: رياضيات.

لدينا: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و $D_f =]-1; +\infty[$. (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.1) دراسة تغيرات الدالة f :

- لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.
- و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$.
- ولدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$,

$$f'(x) = 1 - 2 \left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}^2} \right) = 1 + \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$$

إذن: الدالة f متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$ ، ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	-1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$			$+\infty$

2) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته، $y = x$:بما أن $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ ، فإن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ (الموازي لمحور الترتيب) مُقارب لـ (C_f) .لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$ إذن: المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مُقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.بدراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D) : (ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$)لدينا: $f(x) - x = \frac{-2}{\sqrt{x+1}} < 0$ إذن: من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، (C_f) يقع تحت المستقيم (D) .3) أبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$:لدينا: f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]1,3; 1,4[$ (لأنها متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$)ولدينا: $\begin{cases} f(1,3) = -0,01 \\ f(1,4) = +0,10 \end{cases}$ أي: $f(1,3) \times f(1,4) < 0$ إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.أي: (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.

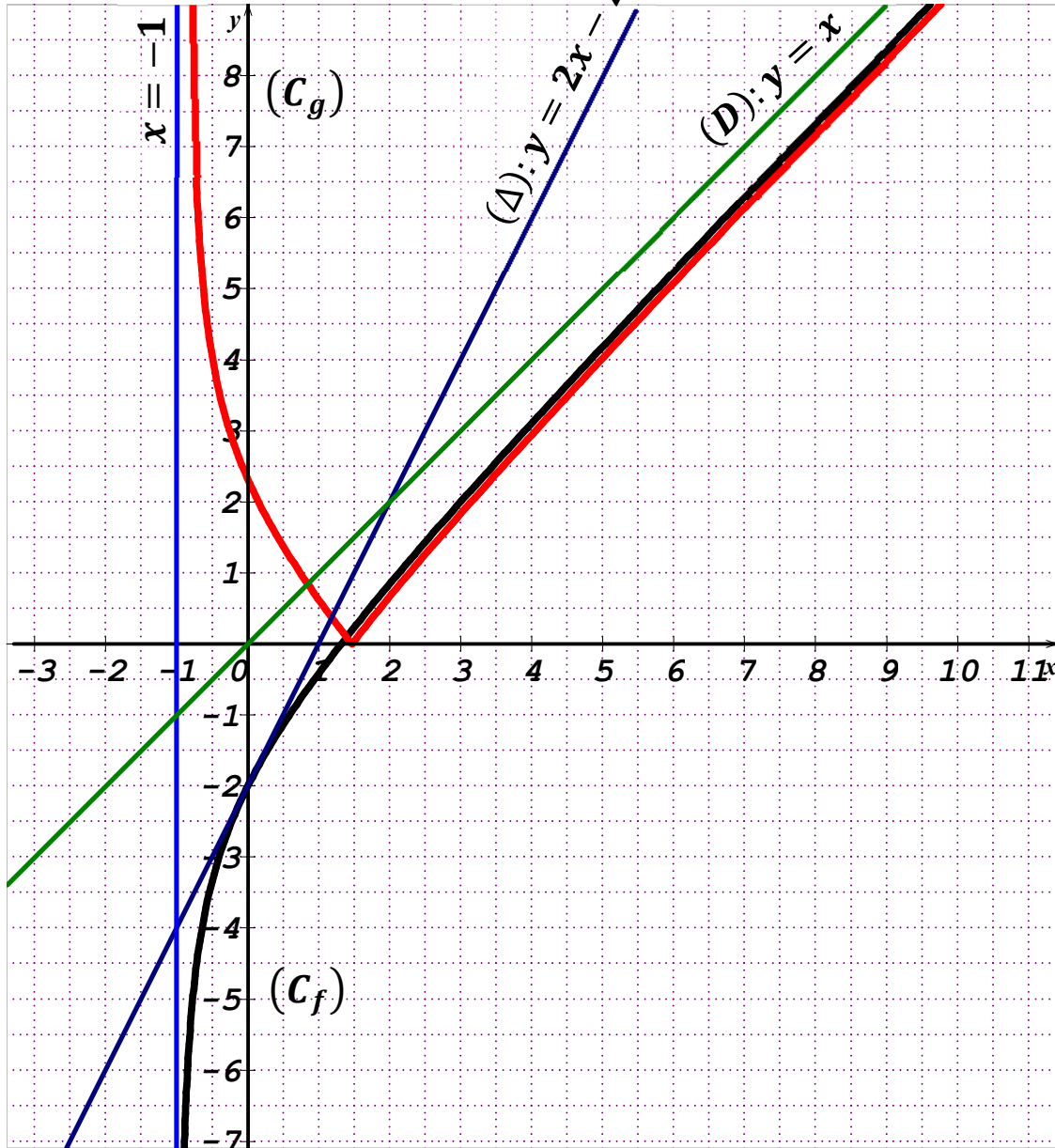
ب-تعيّن معادلة (Δ) مماساً للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب:

نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الترتيب فاصلتها 0 إذن: (Δ) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة

$$\begin{cases} f'(0) = 1 + \frac{1}{(0+1)\sqrt{0+1}} = 2 \\ f(0) = 0 - \frac{2}{\sqrt{0+1}} = -2 \end{cases} \quad 0, \text{ معادلته من الشكل } y = f'(0)(x - 0) + f(0), \text{ وبمّا:}$$

$$\text{فإن: } (\Delta): y = 2x - 2.$$

ج-رسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم:



4) إيجاد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير x :

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ هي الدوال:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + c, \text{ حيث } c \text{ ثابت حقيقي، ونعلم أن } F(0) = 0 \text{ ومنه: } c = 4$$

$$\text{إذن: } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + 4$$

5) لدينا: $g(x) = |f(x)|$ و $D_g =]-1; +\infty[$ منحنى الدالة g في المعلم السابق.

تبين كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم رسمه في نفس المعلم السابق:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [x_0; +\infty[\\ -f(x) & ; x \in]-1; x_0] \end{cases} \text{ أي: } g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

إذن: من أجل $x \in [x_0; +\infty[$ ، فإن $g(x) = f(x)$ وبالتالي: (C_g) ينطبق على (C_f) ،

ومن أجل $x \in]-1; x_0]$ ، فإن $g(x) = -f(x)$ وبالتالي: (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

(6) مناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x ، $g(x) = m^2$:

إذا كان $m^2 = 0$ أي: $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا.

إذا كان $0 < m^2 < 2$ أي: $m \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين.

إذا كان $m^2 = 2$ أي: $m = \sqrt{2}$ أو $m = -\sqrt{2}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم.

إذا كان $m^2 > 2$ أي: $m \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: رياضيات.