مستوى : ثالثة ثانوي　　　دارالشيوخ / ولاية الجلفة　　　إعداد الأستاذ : جيوخ العربي

ملخص شامل في المتتاليات العددية

السنة الدراسية : 2020-2021

1. تعريف المتتالية :

لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة غير خالية. نسمّي متتالية في $\mathcal{E}$ كل تطبيق u منطلقه $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية (أو جزء من $\mathbb{N}$) ومستقره $\mathcal{E}$، ونكتب :

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$n \longmapsto u(n) = u_n$$

↫ نرمز عادة لهذه المتتالية بـ : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) اختصاراً. يدعى العنصر u_n بالحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

↫ إذا كان $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ عندئذ نسمي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالمتتالية العدديّة. إنّها الحالة التي سندرسها طوال هذا الفصل.

2. المتتالية المحدودة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة.

1. نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها محدودة من الأعلى إذا كانت مجموعة قيمها كذلك، أي :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \alpha$$

2. نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها محدودة من الأسفل إذا كانت مجموعة قيمها كذلك، أي :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq \beta$$

3. نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل، أي :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq \gamma$$

3. المتتالية الرتيبة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة.

1. نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها متزايدة إذا حقّقت الشرط التالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$$

إذا كانت المتباينة تامة نقول عندئذ أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها متزايدة تماما.

2. نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها متناقصة إذا حقّقت الشرط التالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$$

إذا كانت المتباينة تامة نقول عندئذ أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها متناقصّة تماما.

ملاحظة هامّة :

1. كل متتالية رتيبة إبتداء من رتبة معيّنة تكون رتيبة.
2. أحيانا دراسة إشارة الفرق لا تكون سهلة فنلجأ إلى فكرة ثانية. إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ذات حدود موجبة لدراسة رتابتها يمكن مقارنة النسبة التالية $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1.

- إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما.
- إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصّة تماما.
- إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة.

4. طبيعة المتتالية :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة. إذا وُجِدَ عدد l يحقّق الشرط $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ فإنّ هذا العدد وحيدٌ ونسمّيه نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من l أو نقول إنّها متقاربة ونهايتها l.

أمّا إذا لم تتقارب متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ فنقول إنّها متباعدة. إنّ تعيين طبيعة متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يعني دراسة تقاربها أو تباعدها.

مبرهنة :

1. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنّها متقاربة.
2. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصّة ومحدودة من الأسفل

فإنّها متقاربة.

فكرة جميلة :

لإثبات أنّ متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي $\mathcal{D}$ (أو محدودة من الأعلى بعدد $\mathcal{G}$) يمكن إتّباع إحدى الطرق الآتّية :

- استعمال الاستدلال بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا : $u_n \geq \mathcal{D}$ (أو لإثبات $u_n \leq \mathcal{G}$).

☜ يمكن تأجيل البرهان بالتراجع في هذه الفقرة إلى قراءة ثانية.

- المقارنة بين u_n و $\mathcal{D}$ (أو u_n و $\mathcal{G}$) بدراسة إشارة الفرق $u_n - \mathcal{D}$ (أو $u_n - \mathcal{G}$).
- إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيّرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

مبرهنة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين متقاربتين، ولنضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$.

1. إنّ المتتالية $(u_n+\lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $l+\lambda l'$ مهما كان العدد λ من $\mathbb{R}$.
2. إنّ المتتالية $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $|l|$.
3. بافتراض أنّ $\forall n\in\mathbb{N} : u_n \leq v_n$ يكون $l \leq l'$.
4. إنّ المتتالية $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $l.l'$.
5. بافتراض أنّ $\forall n\in\mathbb{N} : u_n \neq 0$ وأنّ $l\neq 0$: تكون المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $\frac{1}{l}$.
6. إذا كانت $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

ملاحظة هامّة :

لا تبقى الخاصيّة 3. صحيحة إذا استبدلنا بالمتراجحة $\leq$ متراجحة تامّة $<$. فعلى سبيل المثال إذا تأمّلنا المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتين بالعلاقتين:

$$u_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{n+2}{n+1}$$

وجدنا أنّ :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n < v_n$$

ومع ذلك فإنّ :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$$

مبرهنة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين حقيقيّتين.

1. إنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$.
2. إذا كان $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\neq 0$ كان $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.
3. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة وكانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$.
4. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق الشرط $u_n \geq \alpha > 0$ مهما كان العدد $n_1 \leq n$، وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = +\infty$.
5. إذا كان $u_n \leq v_n$ مهما كان العدد $n_1 \leq n$، وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

مبرهنة وتعريف :

نقول إنّ المتتاليتين الحقيقيّتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتان إذا تحققت الشروط :

- المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة والمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.
- تتقارب المتتالية $(u_n-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من 0.

إنّ أي متتاليتين متجاورتين متقاربتان ولهما النهاية نفسها.

مثال أوّل : المتتاليتان $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ متجاورتان. فعلا :

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متزايدة، لأنّ :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة، لأنّ :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n + \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$$

وكذلك لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n!}\right) = 0$$

مثال ثان : من السهل أن نثبت أنّ المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ و $(\beta_n)_{n\geq 1}$ المعرّفتين كما يأتي :

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2021}} \quad \text{و} \quad \beta_n = \alpha_n + \frac{1}{2020n^{2020}}$$

أنّهما متجاورتان.

مبرهنة :

لتكن المتتاليات الحقيقيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نفترض أنّ :

- المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعيان إلى العنصر α من $\overline{\mathbb{R}}$ [1].
- من أجل كل n من $\mathbb{N}$، لدينا : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

حينئذ يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \alpha$.

مثال مهم :

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرّفة ب: $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k}$.

لدينا :

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\} : \frac{n}{n^3+n} \leq \frac{n}{n^3+k} \leq \frac{n}{n^3+1}$$

بأخذ المجموع نجد :

$$\frac{n^2}{n^3+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k} \leq \frac{n^2}{n^3+1}$$

بما أنّ :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+n} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$$

عملاً بمقتضى مبرهنة السابقة، نجد أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

4. المتتاليات التراجعيّة (أو التدريجيّة)

تعريف :

نسمّي متتالية تراجعية كلّ متتالية يعطى حدها من الرتبة $n+1$ بدلالة حد أو عدة حدود من الرتبة أقل من $n+1$. ويمكن التعبير عن مثل هذه المتتاليات العدديّة عندما يكون الحد من الرتبة $n+1$ معطى بدلالة الرتبة n على النحو التالي :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{B} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

مع $\mathcal{B}$ جزء من $\mathbb{R}$ و $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ دالة.

سنناقش الحالتين التاليتين : 1. إذا كانت الدالة f متزايدة فإنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة. هنا نميّز حالتين وهما :

- متزايدة إذا كان $u_0 \leq u_1$.
- متناقصة إذا كان $u_1 \leq u_0$.

2. إذا كانت الدالة f متناقصة فإنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست رتيبة، المتتاليتان الجزئيّتين الأساسيتان رتيبتان. نميّز حالتين وهما :

- إذا كان $u_0 \leq u_2$ كانت $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة و $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.
- إذا كان $u_2 \leq u_0$ كانت $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.

ملاحظة هامّة :

إذا كانت f دالة مستمرة و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نحو العدد الحقيقي l فإنّ l يحقّق العلاقة : $f(l) = l$.

أيّ أنّ النهاية l تنتمي إلى مجموعة النقاط الصامدة ل f.

تفيد هذه الملاحظة أنّ البحث عن l يعود إلى حل المعادلة $f(l) = l$، إنّ هذه المعادلة تقدم النهايات الممكنة للمتتالية. فعليه إنّ لم تقبل هذه المعادلة حلولا، فإنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير متقاربة. وبالعكس، إذا قبلت المعادلة حلولا عدّة، فإنّ المسألة تعود إلى النظر في إمكانية تمتّع المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ باحداها نهاية لها.

وقد يمكن للمعادلة أنّ تقبل حلولا دون أنّ تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

5. المتتالية الحسابية :

نقول أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n يتحقّق إحدى العلاقتين:

- $u_{n+1} - u_n = r$.
- $u_{n+1} = u_n + r$.

↩ العدد الحقيقي r يسمى أساس هذه المتتالية.

↩ u_0 يسمى الحد الأوّل لهذه المتتالية.

ملاحظتان :

1. تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط إذا كان الفرق بين

[1] $\overline{\mathbb{R}} =]-\infty, +\infty[\cup \{-\infty, +\infty\}$

حدين متتابعين ثابتا وهذه النسبة الثابتة تسمّلا الأساس المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. كل متتالية حسابية تكون معرّفة بعددها الأوّل وأساسها أو بحدّها و أساسها.

خاصية مميّزة :

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حسابية ذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العلاقة الموالية :

$$u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$$

وهذا ما يكافئ : $\forall n\in\mathbb{N}^* : 2u_n = u_{n-1}+u_{n+1}$.

الآن نسمّي هذ الأخير بالقانون الوسيط الحسابي.

ملاحظة مهمة :

تكون الأعداد α ، β و γ في هذا الترتيب ثلاث حدود لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $\alpha+\gamma = 2\beta$.

الحد العام لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدّها الأوّل u_0. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n العلاقة التالية : $u_n = u_0 + nr$.

ملاحظة مهمة :

إذا كان الحد الأوّل هو u_1، يكون لدينا : $u_n = u_1 + (n-1)r$.

بصفة عامّة : إذا كان u_m و u_n حدين من متتالية حسابية أساسها r، فإنّ : $u_n = u_m + (n-m)r$ (ترتيب m و n غير مهم).

اتّجاه تغيّر متتالية حسابيّة :

لنفترض جدلاً أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابيّة. فإنّ اتّجاه تغيّر متتالية حسابيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يتبع إشارة أساسها r، بعبارة أخرى نميّز ثلاث حالات وهي :

1. إذا كان $r>0$، فإنّ المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.
2. إذا كان $r<0$، فإنّ المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.
3. إذا كان $r=0$، فإنّ المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة.

مجموع حدود متتابعة متتالية حسابيّة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابيّة أساسها r وحدّها الأوّل u_0.

لدينا : $S_n = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

↫ u_0 الحد الأوّل للمجموع S_n.

↫ u_n الحد الأخير للمجموع S_n.

↫ $(n+1)$ عدد حدود المجموع S_n.

ملاحظتان :

1. لدينا : $\dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = u_1+u_2+\ldots+u_n$.
2. ليكن m عدد طبيعي، يكون لدينا :

$$u_m+u_{m+1}+\ldots+u_n = \frac{(n-m+1)(u_m+u_n)}{2}$$

5. المتتالية الهندسيّة :

نقول إنّ المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسيّة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي وليكن q بحيث، من أجل كل عدد طبيعي n يحقّق إحدى العلاقتين :

$$u_{n+1} = qu_n \quad \text{أو} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

↫ نسمّي q أساس المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ملاحظات :

1. تكون متتاليّة التي حدودها غير منعدمة هندسيّة إذا وفقط إذا كان حاصل قسمة حدين متتابعين ثابت.
2. تكون المتتاليّة هندسيّة معرّفة بأحد حدودها وأساسها.
3. إذا كان $u_0 = 0$ فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا $u_n = 0$.
4. إذا كان $q = 0$ فإنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يكون لدينا $u_n = 0$.
5. إذا كان $q = 1$ فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون لدينا $u_n = u_0$.

خاصيّة مميّزة :

تكون المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسيّة إذا وفقط إذا كان، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2$$

الآن نسمّي هذ الأخير بالقانون الوسيط الهندسي.

ملاحظة :

تكون الأعداد α ، β و γ في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتاليّة هندسيّة إذا وفقط إذا كان : $\alpha\gamma = \beta^2$.

الحد العام لمتتاليّة هندسيّة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليّة هندسيّة أساسها العدد الحقيقي q

وحدّها الأوّل u_0، من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا : $u_n = u_0 q^n$.

ملاحظة قيّمة :

إذا كان u_1 هو الحد الأوّل، يكون لدينا : $u_n = u_1 q^{n-1}$.

بصفة عامّة : إذا كان u_m و u_n حدين من متتاليّة هندسيّة أساسها q، فإنّ : $u_n = u_m q^{n-m}$ (ترتيب m و n غير مهم).

اتّجاه تغيّر متتاليّة هندسيّة :

لنفترض أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليّة هندسيّة. الآن لنلخص اتّجاه تغيّر متتالية هندسيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونرمز للأساس المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$، بالرمز : q، ولنفترض أيضاً $u_0 \neq 0$ (تم مناقشة حالة $u_0 = 0$ سابقاً)

ولنناقش معاً الحالات التي تصادفنا :

1. إذا كان $q = 0$، من هذا الأخير نلزم بأنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مستقرّة.
2. إذا كان $q < 0$، وهذا ما يوحي لنا بأنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير رتيبة.
3. إذا كان $q > 0$، فاتّجاه تغيّر المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يتبع إشارة المقدار $u_0(q-1)$ في هذه الحالة سنناقش معا ثلاث حالات وهي :

- إذا كان $u_0(q-1) > 0$، هذا يلزم بأنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.
- إذا كان $u_0(q-1) < 0$، هذا يلزم بأنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصّة.
- إذا كان $u_0(q-1) = 0$، هذا يلزم بأنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة.

مجموع حدود متتابعة لمتتاليّة هندسيّة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليّة هندسيّة أساسها q وحدّها الأوّل u_0.

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \begin{cases} u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, si \ : \ q \neq 1 \\ (n+1)\, u_0, si \ : \ q = 1 \end{cases}$$

$\looparrowleft$ u_0 : الحد الأوّل للمجموع S_n.

$\looparrowleft$ $(n+1)$: عدد حدود المجموع S_n.

ملاحظتان :

لنفترض أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليّة هندسيّة أساسها $q \neq 1$.

1. لدينا دوما : $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
2. ليكن m عدد طبيعي ويحقّق أيضا $n < m$، عندئذ يكون لدينا العلاقة التاليّة :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

6. مبدأ الاستدلال بالتراجع :

مسلمة : $P(n)$ خاصيّة متعلقة بعدد طبيعي n.

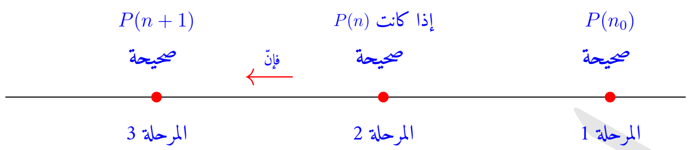
ليكن n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصيّة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0، يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصيّة من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أنّ الخاصيّة صحيحة من أجل كل عدد طبيعي k أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(k)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصيّة من أجل $k+1$ أي $P(k+1)$.

ملاحظتان :

1. عند الانتهاء من المرحلتين نقر أنّ الخاصيّة صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.
2. نترجم الشرط الثاني بالقول أنّ الخاصيّة وراثية أي أنّها تنتقل من عدد طبيعي n إلى العدد الذي يتبعه $n+1$.
3. التأكد من صحة الخاصيّة من أجل n_0 ضروري جدا لأنّه يمكن أن تكون خاصيّة وراثية دون أن تكون صحيحة.



متى يُستعمل الاستدلال بالتراجع :

يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع على صحة خاصية متعلقة بمجموعة الأعداد الطبيعيّة.

تداريب في المتتاليات العددية

تمرين رقم : 01

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة على النحو التالي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \,,\ et\ \ u_1 = \beta, \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ 3u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \,,\ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$.

1. أحسب القيمة العددية للحدين u_2 و u_3 بدلالة α و β.
2. من أجل كل عدد طبيعي n، نضع : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ- أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة الفرق $(\beta-\alpha)$.

ب- بيّن أنّ المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية هندسية أساسها $-\dfrac{2}{3}$.

ج- عيّن عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة $(\beta-\alpha)$.

د- أحسب المجموع S_n بدلالة n، مع : $S_n = v_2 + v_4 + \cdots + v_{n-1}$.

3.أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون لدينا : $u_n = u_0 + v_0 + v_1 + S_n$.

ب- استنتج حينئذٍ عبارة u_n بدلالة n.

ج- أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

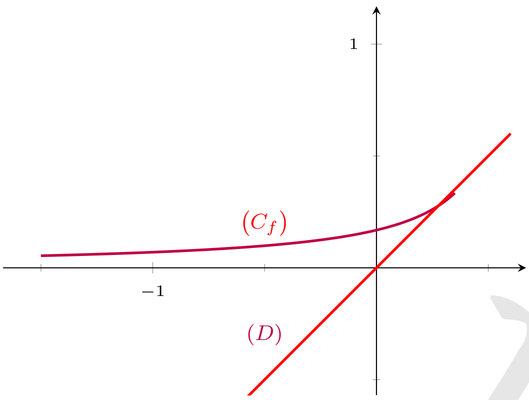
تمرين رقم : 02

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال: $\left[-1, \dfrac{7}{20}\right]$ كما يلي : $f(x) = -\dfrac{15}{126x-89}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة على بحدّها الأول $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.أ- أنقل الشكل ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_3 دون حسابها.

ب- ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و تقاربها.



2.أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \le u_n \le \dfrac{5}{18}$.

ب- بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما.

3. لتكن المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n = 1 + \dfrac{19}{35-126u_n}$.

أ- برهن أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0.

ب- أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n، واستنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج- من أجل كل عدد طبيعي n، نضع :

$$S_n = \frac{10}{10-36u_0} + \frac{10}{10-36u_1} + \cdots + \frac{10}{10-36u_{2021n}}$$

. أحسب S_n، ثمّ أوجد النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين رقم : 03

نعتبر المتتالية العددية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة التراجعية التالية : $\begin{cases} a_0 = 0 \,,\ et\ \ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \dfrac{2}{3}a_{n+1} - \dfrac{1}{9}a_n \,,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

من أجل كل عدد طبيعي n، نعرّف المتتاليتين العدديتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتين بالعلاقتين التاليتين :

$$\omega_n = 3^n \times a_n \quad \text{و} \quad v_n = a_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

1. أحسب الحدود التالية : a_2 ، v_0 و ω_0.
2. أ- بيّن أنّ المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية يطلب تعيّين أساسها.
   ب- حدّد عبارة v_n بدلالة n.
3. أ- أثبت أنّ المتتالية $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية يطلب تعيّين أساسها.
   ب- أوجد عبارة ω_n بدلالة n.
4. أحسب بدلالة n المجموعين :

$$S'_n = 3a_1 + 3^2a_2 + \cdots + 3^n a_n \quad \text{و} \quad S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

5. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا : $0 < a_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.
6. أحسب النهاية الموالية : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

تمرين رقم : 04

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة كما يلي : $\begin{cases} u_1 = 1 \,,\ et\ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \,,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

1. أحسب الحدين u_3 و u_4.
2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يكون لدينا : $u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n - \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n\right]$.
3. نعتبر المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرّفتين بما يلي :

$$y_n = \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n \quad \text{و} \quad x_n = \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n$$

   - أدرس تقارب المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$.
4. لتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بالعلاقة : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   - بيّن أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو العدد الحقيقي $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

تمرين رقم : 05

ليكن n عددا طبيعيّاً غير معدوماً. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $f_n(x) = x^{n+1} + x^n + +3x - 2$.

1. ادرس رتابة الدالة f_n على $\mathbb{R}_+$.
2. بين أنّ المعادلة $f_n(x) =$ قبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0, +\infty[$.
3. بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا : $\alpha_n < \frac{2}{3}$.
4. أ- أدرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   ب- بين أنّ المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متزايدة، و استنتج أنّها متقاربة.
5. أ- تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا : $\alpha_n = \frac{2-\alpha_n^n}{3+\alpha_n^n}$.
   ب- استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يكون لدينا : $\frac{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq \alpha_n \leq \frac{2}{3}$ ثم حدد نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

تمرين رقم : 06

لتكن المتتالية u_n معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n على النحو التالي : $u_n = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.

1. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا : $2 - \frac{2}{n+1} \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{u_n}$.
2. أ- تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يكون لدينا : $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

   ب- استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يكون لدينا : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.
3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا : $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$، ثمّ أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

تمرين رقم : 07

لتكن $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة غير معدومة ولنفترض أنّ أساسها q.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، و نكتب للإشارة إلى ذلك (أو كترميز) أنّ :

$$S = \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1 + \cdots + \mathcal{X}_{n-1} \quad ، \quad P = \mathcal{X}_0\mathcal{X}_1\cdots\mathcal{X}_{n-1} \quad و \quad T = \frac{1}{\mathcal{X}_0} + \frac{1}{\mathcal{X}_1} + \cdots + \frac{1}{\mathcal{X}_{n-1}}$$

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا العلاقة التالية $\frac{S}{T} = \mathcal{X}_0^2 q^{n-1}$.
2. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا : $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$.

تمرين رقم : 08

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$، نضع : $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$ وهذا من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+$.

1. بيّن أنّ المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين u_n و v_n، حيث أنّ : $u_n < 1 < v_n$.
2. أ- أدرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

   ب- أدرس رتابة " متزايدة ، متناقصة " المتتالية $(u_n)_{n\geq3}$ واستنتج حينئذٍ تقاربها.

   ج- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أوْ يساوي 3، لدينا العلاقة : $-\frac{1}{n} < u_n - 1 < -\frac{2}{n}$، ثمّ حدّد النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. أ- أدرس رتابة المتتالية $(v_n)_{n\geq3}$ واستنتج أنّها متقاربة.

   ب- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أوْ يساوي 3، لدينا : $1 + \frac{1}{n} < v_n$.

   إرشاد بسيط : من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أوْ يساوي 3، لدينا : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

   ج- برهن أنّ : $(\forall a > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N}^*) : (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$.

   د- أحسب $f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$، واستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أوْ يساوي 3، لدينا : $v_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   هـ- حسب، ما سبق أوجد نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq3}$.

تمرين رقم : 09

المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرّفة بـ : $u_0 = 1$، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$، وبيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.
2. أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq 2 + u_{n+1} - u_n$.

ب- استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n - 1 + u_n$، وعيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا : $1 - \frac{1}{u_n^2} \leq \frac{2n}{u_n} \leq 1 - \frac{1}{u_n}$، ثمّ استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n}}{u_n}$.

تمرين رقم : 10

ليكن α عدد حقيقي من المجال $]0,1[$، و n عدد طبيعي غير معدوم. نعتبر الدالة f_n المعرّفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) - \alpha$$

1. بيّن أنّ المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_n وأنّ : $0 < x_n < 1$.

2. برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب x، لدينا دوماً العلاقة : $(x-1) f_n(x) = x^{n+1} - (\alpha+1)x + \alpha$.

3.أ- برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,1[$: $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

ب- استنتج أنّ المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة وأنّها متقاربة.

ج- بيّن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n$ وحدّد نهاية المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بدلالة α.

تمرين رقم : 11

لنفترض n عدد طبيعي. نعتبر التكاملات التالية : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$ و $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\,dt$.

1. أحسب a_0 و b_0.

2. باستعمال مكاملة بالتجزئة بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$.

3.أ- بيّن أنّه من أجل عدد حقيقي t من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$، يكون لدينا : $t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$.

ب- استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < b_n \leq \frac{\pi^2}{4}(a_{2n} - a_{2n+2})$.

ج- بيّن أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.

4.أ- باستعمال مكاملة بالتجزئة. بيّن أنّ : $a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos^{2n+1} t dt$.

ب- استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1) b_n - (2n+2) b_{n+1}$.

ج- استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{(n+1)^2} = 2\left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)$.

5.أ- بيّن أنّ المتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ متقاربة و أنّ نهايتها هي $\frac{\pi^2}{6}$.

ب- استنتج أنّ $\frac{\pi^2}{8} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

قسم الحلول بالتفصيل

حل تمرين رقم : 01

1. حساب القيمة العددية للحدين u_2 و u_3 بدلالة α و β :

حسب العلاقة التراجعية المذكورة في نص التمرين، وبتعويض المباشر، نجد ما يلي :

$$\left| \begin{array}{l} u_2 = \dfrac{u_1 + 2u_0}{3} = \dfrac{2\alpha + \beta}{3} \\ u_3 = \dfrac{u_2 + 2u_1}{3} = \dfrac{2\alpha + 7\beta}{9} \end{array} \right.$$

2.أ- حساب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة الفرق $(\beta - \alpha)$:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا العلاقة المعطاة في نص التمرين $v_n = u_{n+1} - u_n$.

حسب العلاقة السابقة يمكننا أن نستنتج جميع حدود المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة حدود المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. من هذا، نجد أنّ :

$$\left| \begin{array}{l} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_3 = u_3 - u_2 \end{array} \right.$$

وبعد التعويض المباشر والتبسيط، نحصّل على : $\boxed{v_0 = \beta - \alpha}$ ، $\boxed{v_1 = -\dfrac{2}{3}(\beta - \alpha)}$ و $\boxed{v_3 = \dfrac{4}{9}(\beta - \alpha)}$.

ب- إثبات أنّ المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $-\dfrac{2}{3}$:

قبل البدأ في حل هذا السؤال، لا بأس أن نذكر بالمعلومة التالية: لدينا التكافؤ التالي (ناتج من تعريف المتتالية الهندسية) دوماً صحيحاً :

$$\forall n \in \mathbb{R}, \exists q \in \mathbb{R} \quad : \quad v_{n+1} = qv_n \iff \text{متتالية هندسية أساسها } q \ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

من التكافؤ السابق، يكفي أن نثبت أنّه يُوجد عدد حقيقي " $-\dfrac{2}{3}$ " يحقّق الشرط $v_{n+1} = -\dfrac{2}{3}v_n$، وهذا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

لنبدأ على بركة الله في الإثبات معاً.

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 2u_n}{3} - u_{n+1}$، بعد توحيد المقامات وتبسيط الحدود المتشابهة، نحصّل على : $v_{n+1} = -\dfrac{2}{3}(u_{n+1} - u_n)$، ولمّا كان : $v_n = u_{n+1} - u_n$، نجد : $v_{n+1} = -\dfrac{2}{3}v_n$.

بهذا فقط نكون قد أثبتنا أنّ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = -\dfrac{2}{3}}$.

ج- تعيّن عبارة الحد العام المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة $(\beta - \alpha)$:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا العبارة التالية $v_n = v_0 q^n$، مع : v_0 هو الحد الأوّل للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و q أساس للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

لمّا كان لدينا قيمة الحد الأوّل $v_0 = \beta - \alpha$ والأساس $q = -\dfrac{2}{3}$، إذن، نجد أنّ عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُكتب على الشكل التالي : $\boxed{v_n = (\beta - \alpha)\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n}$.

د- حساب المجموع $S_n = v_2 + v_3 + \cdots + v_{n-1}$ بدلالة n :

لدينا، مما سبق بأنّ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسيّة أساسها $q = -\frac{2}{3}$ $n \geq 2$,$S_n = v_2 + v_3 + \cdots + v_{n-1} = v_2\frac{1-q^{n-2}}{1-q}$.

ومنه نجد : $S_n = \frac{4}{9}(\beta-\alpha)\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{1+\frac{2}{3}}$ وأخيرا : $\boxed{S_n = \frac{4}{15}(\beta-\alpha)\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]}$.

3.أ- تبيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا : $u_n = u_0 + v_0 + v_1 + S_n$:

• من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا العبارة التي تجمع جميع حدود المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معاً، هي العلاقة : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
وعليه، نجد :

$$\begin{array}{|l}
v_0 = u_1 - u_0 \\
v_1 = u_2 - u_1 \\
v_2 = u_3 - u_2 \\
\vdots \\
v_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2} \\
v_{n-1} = u_n - u_{n-1}
\end{array}$$

بالجمع طرفاً لطرف، نجد أنّ :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_{n-1} - u_{n-2} + u_n - u_{n-1}$$

وبعد حذف الحدود المتشابهة، نجد العلاقة المرجوة، وهي : $\boxed{u_n = u_0 + v_0 + v_1 + S_n}$.

ب- استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

نعلم أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا : $u_n = u_0 + v_0 + v_1 + S_n$، ومنه، نجد :

$$\boxed{u_n = \alpha + \frac{1}{3}(\beta-\alpha) + \frac{4}{15}(\beta-\alpha)\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]}.$$

ج- استنتاج $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

نرى مباشرة : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\alpha + \frac{1}{3}(\beta-\alpha) + \frac{4}{15}(\beta-\alpha)\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]\right] = \alpha + \frac{1}{3}(\beta-\alpha) + \frac{4}{15}(\beta-\alpha)$.

ومنه : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha + \frac{9}{15}(\beta-\alpha)}$.

﴿لا تنسوني بالدعاء لي ولوالدي الكريمين - حفظهما الله -﴾