## الاشتقاقية

$f$ دالة معرفة على مجال $\mathbb{I}$ من $\mathbb{R}$ و $a$ و $h$ عددان حقيقيان من $\mathbb{I}$ مع $h \neq 0$ ، نقول ان الدالة $f$. تقبل الاشتقاق عند $a$ إذا كان

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = l, \quad l \in \mathbb{R}$$

( صيغة أخرى لقانون الإشتقاق $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ )

### ✍ التفسيرات الهندسية

- إذا كان $\lim_{h\to 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = l$ الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $a$ والمنحنى $(C_f)$ يقبل مماس عند النقطة $A(a;f(a))$ معادلته : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ مع $f'(a) = l$

- إذا كان

$$\lim_{h\overset{>}{\to}0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = l_1$$

نقول أنّ الدالة $f$ تقبل للاشتقاق على يمين $a$ والمنحنى $(C_f)$ يقبل عند النقطة $A(a;f_d(a))$ نصف مماس معادلته: $y = f'_d(a)(x-a)+f(a)$ مع $f'_d(a) = l_1$

- إذا كان

$$\lim_{h\overset{<}{\to}0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = l_2$$

نقول أنّ الدالة $f$ تقبل للاشتقاق على يسار $a$ والمنحنى $(C_f)$ يقبل عند النقطة $A(a;f_g(a))$ نصف مماس معادلته: $y = f'_g(a)(x-a)+f(a)$ مع $f'_g(a) = l_2$

- إذا كان $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ الدالة $f$ لاتقبل الاشتقاق عند $a$ والمنحنى $(C_f)$ يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ نصفي مماسين حيث $A$ تسمى نقطة زاوية.

- اذا كان

$$\lim_{h\overset{<}{>}0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = \pm\infty$$

الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق على يسار (يمين) $a$ والمنحنى $(C_f)$ يقبل على يسار (يمين) النقطة $A(a;f(a))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الاعلى (الأسفل) معادلته $x = a$

### ✍ المشتقات والعمليات على الدوال

$f$ و $g$ دالتان قابلتان للاشتقاق على كل مجال $\mathbb{I}$ من $\mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{R}$ مع $g \neq 0$ على $\mathbb{I}$

- $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$
- $(f\circ g)'(x) = g'(x)\times f'\Big(g(x)\Big)$
- $(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}$
- $\Big((f(x))^n\Big)' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$
- $\Big(\frac{1}{(f(x))^n}\Big)' = -\frac{nf'(x)}{(f(x))^{n+1}}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

## مفهوم الاستمرارية

تكون الدالة $f$ مستمرة على مجال $\mathbb{I}$ عندما يمكن رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد)

### مـلاحظات هامّة

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها
- الدوال كثيرات الحدود، $\cos$ ، $\sin$ مستمرة على $\mathbb{R}$
- الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها

## مبرهنة القيم المتوسّطة

إذا كانت $f$ دالة مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a;b]$ وكان $f(a)\times f(b) \prec 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ يحقق $f(\alpha) = 0$ حيث $\alpha \in ]a;b[$

الأستاذ بكول وجيه

## ✔ القيمة الحدّية:

إذا انعدمت الدالة المشتقة $f'$ عند $x_0$ مغيرة اشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة $f$ .

## ✔ نقطة انعطاف:

نقول ان $(C_f)$ يقبل النقطة $A(x_0; f(x_0))$ كنقطة انعطاف إذا تحققت إحدى الشروط التالية:

- المشتق الثاني $f''(x)$ ينعدم عند $x_0$ ويغير اشارته عندها
- المشتق الاول $f'(x)$ ينعدم عند $x_0$ ولا يغير اشارته عندها
- المماس عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ يخترق المنحنى $(C_f)$

## ✍ التّفريب التآلفي

$f$ دالة معرفة على مجال مفتوح $\mathbb{I}$ من $\mathbb{R}$ إذا قبلت $f$ الاشتقاق عند $x_0$ من $\mathbb{I}$ نكتب عندئذ:

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

نسمي $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ **التفريب التآلفي** للدالة $f$ بجاور $x_0$

## ✍ دراسة وضعية منحنى ومستقيم

لدراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ ندرس اشارة الفرق $f(x) - (ax + b)$

- إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ فإنّ $(C_f)$ فوق $(\Delta)$
- إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ فإنّ $(C_f)$ تحت $(\Delta)$
- من أجل $x_0 \in \mathcal{D}_f$ تحقّق:

$$f(x_0) - (ax_0 + b) = 0$$

فإنّ $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(x_0; f(x_0))$

الأستاذ بلكعول وجيه

## التمرين الأول:

يعطى جدول التغيّرات دالة f كما يلي:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $5$ |

بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا موجبا $\alpha$.

## التمرين الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = x^2 + |x-1|$

1. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم h

$$\frac{f(1+h)-1}{h} = h + 2 + \frac{|h|}{h}$$

2. أدرس قابلية إشتقاق الدّالة f عند 1 ، وفسّر النتائج هندسيا.

## التمرين الثالث:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$، ليكن $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y = -2x + 1$ مماس لـ $(C_f)$ عند النقطة $A(0,1)$.

1. حدّد $f(0)$ و $f'(0)$.
2. برّر وجود النّهاية $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$.
3. أكتب معادلة المماس $(\Delta')$ عند النّقطة $B(1,-3)$ والذي يوازي $(\Delta)$.

## التمرين الرابع:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

1. أحسب النّهايات عند أطراف مجال تعريف الدّالة f ، ثمّ فسّر النّتائج هندسيا.
2. بيّن أنّ المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$.
3. أحسب $f'(x)$ ، ثمّ أدرس إشارتها، استنتج عندئذ اتّجاه تغيّر الدّالة f.
4. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.
5. بيّن أنّ النّقطة $\omega(1;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$
6. أرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ في نفس المعلم.
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التّالية

$$x^2 - (1+m)x + 1 + m = 0$$

## التمرين الخامس:

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$،

وليكن $(C)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

– عيّن العددين الحقيقيين a و b حتّى يمر $(C)$ بالنّقطة $A(0.3)$ ويقبل في هذه النّقطة مماسا معامل توجيهه 4.

II) نضع $a = 4$ و $b = 3$

1. عيّن العددين $\alpha$ و $\beta$ بحيث يكون $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x^2+1}$.
2. أدرس تغيّرات الدّالة f.
3. أدرس وضعية $(C)$ بالنّسبة للمستقيم $(\Delta) : y = 4x + 3$.
4. أثبت أن $(C)$ يقبل ثلاث نقط انعطاف يطلب تعيينها.
5. بيّن أنّ النّقطة $A(0;3)$ مركز تناظر للمنحنى $(C)$.
6. أثبت أن $(C)$ يقبل مماسين معامل توجيههما 2.
7. أنشيء المنحنى $(C)$
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة:

$$f(x) = 4x + m$$

## التمرين السادس:

**الجزء الأول** نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

1. أدرس تغيرات الدالة g
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha \in ]2,19;2,20[$
3. ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

**الجزء الثاني** نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} - 2$$

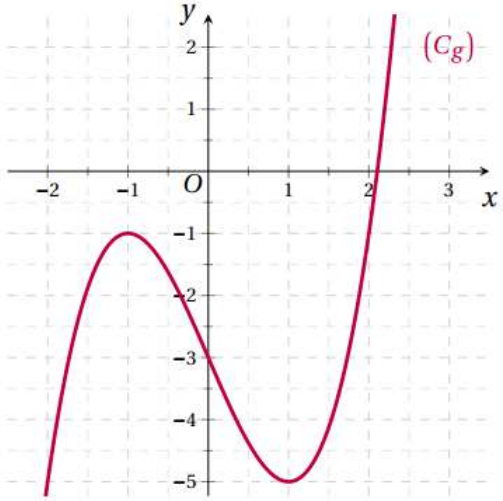
$(C_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $(\mathcal{D}_f)$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها .
3. بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{3(\alpha+2)}{\alpha^2-1}$، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب $10^{-1}$.
4. ا) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$
   ب) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ ثمّ ارسمهما
5. استنتج في نفس المعلم رسم $(C_h)$ المنحنى الممثّل للدّالة $h$ المعرّفة على $(\mathcal{D}_f)$ بالعبارة $h(x) = f(|x|)$

## التمرين السابع:

I) يمثل الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax^3 + bx + c$ حيث $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية




1. باستعمال $(C_g)$ عيّن كلا من $a$ ، $b$ و $c$. ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $g$.
2. بيّن أنّ المعادلة $x^3 - 3x - 3 = 0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha \in \left]2; \frac{5}{2}\right[$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1} + 1$$

$(C_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

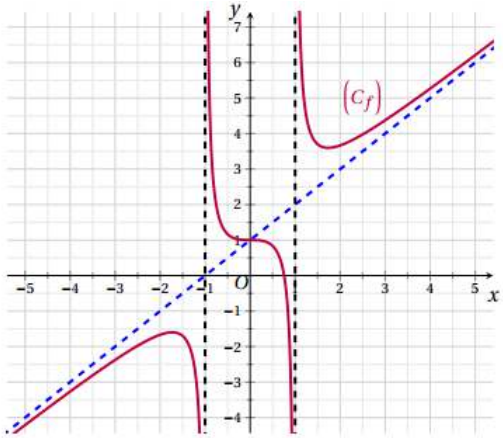
1. تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ ، $f'(x) = \frac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$ .
2. عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ ، وفسّر النّتيجة هندسيا.
3. أحسب نهايات الدّالة $f$ عند حدود مجال تعريفها.
4. شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.
5. بيّن أن $f(\alpha) = 3\alpha + 1$، ثمّ استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
6. بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$ ثمّ أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ و ارسمهما في نفس المعلم.

## التمرين الثامن:

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كما في الشّكل المقابل :




1. ا) بقراءة بيانية أحسب النّهايات التّالية $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\<}1} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\<}-1} f(x)$.
   ب) عيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(C_f)$.
2. أحسب $f'(x)$ ثم أدرس اتّجاه تغير الدّالة $f$ وشكّل جدول تغيّراتها.
3. من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$ أحسب $f(-x) + f(x)$، ماذا تستنتج؟
4. نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ $g(x) = f(|x|)$.
   ا) أدرس قابلية الإشتقاق عند القيمة 0.
   ب) تحقّق أن $g$ دالة زوجية، اشرح كيف يتم الإستعانة بـ $(C_f)$ لرسم $(C_g)$ وارسمهما في نفس المعلم.
   ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول العادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التّالية: $g(x) = |m|$.

الأستاذ بكول رجيم

## التمرين التاسع:

ليكن $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O\vec{i},\vec{j})$

حيث: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+2x-1}{1-2x}, & x\le 0\\ 2x-\dfrac{1}{(x+1)^2}, & x>0\end{cases}$

1. أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $0$ ، وفسّر النتيجة هندسيا.
2. أدرس تغيرات الدالة $f$.
3. بيّن أنّ $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $x_1=-1$ و $x_2$ حيث: $0<x_2<1$ ثم أرسم المنحنى $(C_f)$.
4. لتكن $g$ الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$$g(x)=\frac{3x^2-2|x|-1}{2|x|+1}$$
ا) بيّن أن $g$ دالة زوجية.
ب) باستعمال الدراسة السابقة ،أنشئ $(C_g)$ بيان الدالة $g$ في معلم آخر.
ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:
$$3x^2-m|x|-m=0$$

## التمرين العاشر:

نعتبر $f$ الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=x\sqrt{|x^2-4|}$، $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب $f(x)+f(-x)$ واستنتج خاصة مميزة للمنحنى $(C_f)$
2. أحسب $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}$ ماذا تستنتج؟
3. أدرس تغيرات الدالة $f$.
4. أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة $(x_0,\sqrt{3})$
5. أثبت أنّ $(C_f)$ يقبل ثلاث نقط انعطاف يطلب تعيينها.
6. أرسم $(C_f)$ والمماس $(T)$.
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=-2x-m$
8. لتكن $g$ دالة عددية حيث: $g(x)=|f(x)|$ وَ $(C_g)$ تمثيلها البياني.

ا) بيّن أنّ $g$ دالّة زوجية، ماذا تستنتج؟
ب) استنتج ممّا سبق طريقة رسم $(C_g)$ ثمّ ارسمه في نفس المعلم.

## التمرين الحادي عشر (خاص بشعبة الرّياضيات):

$f$ دالة عددية معرفة في المجال $]-\pi;\pi[$ حيث:

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}, & x\neq 0\\ f(0)=0.\end{cases}$، $(C_f)$ المنحنى البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أثبت أنّ الدّالة $f$ مستمرة عند $0$.
2. هل الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عند $0$
3. بيّن أنّ $f$ دالة فردية، ثم أثبت أنّ: $f(x+2\pi)=f(x)$ ماذا تستنتج؟
4. أدرس تغيّرات الدالة $f$.
5. أثبت أنّ $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.
6. عيّن إحداثيي النقطة $A$ التي يكون فيها المماس لـ $(C_f)$ موازيًا للمُنصّف الأوّل.
7. نعرّف في المجال $]0;\pi[$ الدالة $g$ حيث: $g(x)=f(x)-x$
- أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدًا $\alpha$ في المجال $]\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4}[$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.
8. أرسم بدقة البيان $(C_f)$.

## التمرين الثاني عشر:

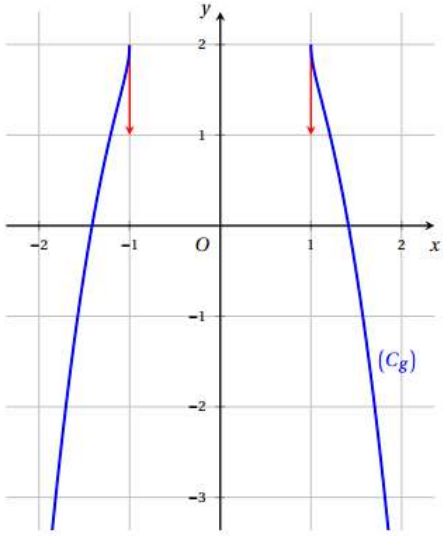
لتكن $f$ الدّالة عددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ والمعرفة بـ : $f(x)=|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

1. ا) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
ب) أحسب عبارة الدالة المشتقة $f'(x)$ وأدرس إشارتها.
2. ا) شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.
ب) بيّن أنّ المستقيمين: $(\Delta):y=x+1$
و $(\Delta'):y=-x-1$ مقاربين للمنحنى $(C_f)$.
ج) أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$.
3. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدًا $\alpha$ على المجال $]-1;1[$ وأعط حصرًا لـ $\alpha$ سعته $10^{-1}$
4. أنشئ كلا من $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ و $(C_f)$
5. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة التالية:
$$(x^2-1)(|x+1|-m)+x=0$$

## التمرين الثالث عشر:

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=2-x^2\sqrt{x^2-1}$

$(C_g)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المقابل:




1. أحسب $g(\sqrt{2})$ و $g(-\sqrt{2})$
2. بقراءة بيانية :
   ا) عيّن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
   ب) هل الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟
   ج) هل الدالة g قابلة للإشتقاق عند 1 من اليمين ؟ برّر .
   د) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x}-x+1$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ا) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 1 من اليمين وعند القيمة $-1$ من اليسار. فسّر النتائج بيانيا.
   ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .
   ج) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta): y=-x+3$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ والمستقيم $(\Delta'): y=-x-1$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $-\infty$
2. بيّن أنّه من أجل كل x من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$
3. أنشئ جدول تغيرات الدالة f.
4. بيّن أنّ النّقطة $I(0,1)$ هي مركز تناظر لـ $(C_f)$.

## التمرين الرابع عشر:

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3-3x-4$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدًا $\alpha$ حيث $2<\alpha<2,25$
3. عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.
2. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
3. أدرس تغيّرات الدّالة f وشكّل جدول تغيراتها.
4. برهن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
5. أدرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$
6. بيّن أنّ: $f(\alpha)=1+\dfrac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$ ثم استنتج حصرًا لـ $f(\alpha)$ بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha'$ حيث $-1,5<\alpha'<-1,25$.
7. أرسم $(C_f)$ و $(\Delta)$.
8. k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{\alpha'\}$ بـ: $k(x)=\dfrac{1}{f(x)}$
   • أدرس تغيرات الدالة k ثم أرسم منحناها البياني.
9. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة: $f(x)=|m-1|$.

**(خاص بشعبة الرياضيات)**

10. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة: $f(\cos(\theta))=\dfrac{1}{m}$ حيث $0\le\theta\le2\pi$
11. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط $\theta$ حلول المعادلة: $f(x)=\sin(\theta)$

## التمرين الخامس عشر:

I) $f_m$ الدّالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{m\}$ بـ: $f_m(x)=\dfrac{mx^2-8}{x-m}$ حيث $m\in\mathbb{R}$ و $(C_m)$ المنحنى الممثل للدالة $f_m$.

الأستاذ بكول وليد

1. أحسب $f'_m x$.
2. عيّن مجموعة قيم $m$ بحيث لا تقبل الدالة $f_m$ أيّة قيمة حدية.
3. عيّن مجموعة قيم $m$ بحيث $(C_m)$ يقبل مماسًا في النّقطة ذات الفاصلة 2 معامل توجيهه 3.
4. بيّن أنّ جميع المنحنيات $(C_m)$ تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

II) نضع في هذه الحالة $m = 1$.

1. أدرس تغيرات الدالة $f_1$.
2. ا) عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث: $f_1(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$
   ب) استنتج أن المنحنى $(C_1)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ يُطلب تعيينه ثم أدرس وضعيته بالنسبة إلى $(C_1)$.
   ج) أثبت أنّ النّقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر للمنحنى $(C_1)$
3. أنشئ $(\Delta)$ و $(C_1)$.
4. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $\alpha$ عدد وإشارة حلول المعادلة : $y = x + \alpha$.

III)

لتكن الدالة $g$ ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة كما يلي: $g(x) = \dfrac{x^2-8}{|x|-1}$

1. أدرس قابيلة اشتقاق الدالة $g$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 ثم فسّر النتيجة هندسيا.
2. بيّن أنّ $g$ دالة زوجية ،ماذا تستنتج؟
3. اشرح كيف يمكن إنشاء المنحنى $(C_g)$ للدالة $g$ باستعمال المنحنى $(C_1)$ ثم أنشئ $(C_g)$

## التمرين السّادس عشر (خاص بشعبة الرّياضيات):

لتكن $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{2x-1}}{x}$$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $\dfrac{1}{2}$ ، وفسّر النّتيجة هندسيا.
2. أدرس تغيّرات الدّالة $f$ والفروع اللانهائية لـ $(C_f)$ منحنى الدالة $f$.
3. أثبت أنّه من أجل كلّ $x$ من $]1;2[$ فإنّ: $|f'(x)| < 1$.
4. ا) برهن أنّه من أجل كل $x$ من $]1;2[$ : $f''(x) = \dfrac{3x^2-6x+2}{x^3\sqrt{(2x-1)^3}}$

ب) استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها.

5. أرسم بدقة البيان $(C_f)$

6. ا) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة التالية :
$$x + \sqrt{2x-1} - mx = 0$$
ب) نضع : $\theta \in [0;\pi]$
– استنتج حلول المعادلة ذات المجهول $\theta$ المعرّفة بـ
$$\sin(\theta) + \sqrt{2\sin(\theta)-1} - m\sin(\theta) = 0$$

7. لتكن الدالة العددية $g$ ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة كما يلي:
$$g(x) = \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x}.$$
ا) استنتج كيف نرسم البيان $(C_g)$ انطلاقا من $(C_f)$ ثم أرسم $(C_g)$.
ب) لتكن $(S)$ مجموعة النقط ذات المعادلة:
$$x^2y^2 - 2x^2y + x^2 - 2x + 1 = 0.$$
• أثبت أنّ: $(S) = (C_f) \cup (C_g)$ ثم أرسم المجموعة $(S)$.

الأستاذ بكحول وجيه