الأستاذ: مسعودي عبد الفاتح	ملخص	الموسم الدراسي: 2025/2024
المستوى: 3 ثانوي	النهايــــات والإستمراريـــة	الشعبة: الشعب العلمية

النهايات والتفسيرات الهندسية

تعريف: النهاية هي المكان الذي تؤول اليه الدالة $f(x)$ ويتم حسابها عند الأطراف المفتوحة في مجموعة التعريف، نرمز لها بـ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ أو $\lim\limits_{x\to\pm l} f(x)$ حيث $l \in \mathbb{R}$.

1) قواعد الإشارات:

أ. الجمع:

- $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$
- $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

ب. الضرب:

- $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$
- $(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$
- $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$
- $(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$

ج. القسمة:

- $\frac{(+\infty)}{(+\infty)}=+\infty$
- $\frac{(-\infty)}{(-\infty)}=+\infty$
- $\frac{(+\infty)}{(-\infty)}=-\infty$
- $\frac{(-\infty)}{(+\infty)}=-\infty$

2) حالات عدم التعيين:

$(+\infty)+(-\infty)$	$0\times(\pm\infty)$	$\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$	$\frac{0}{0}$

3) حالات ليست حالات عدم تعيين: (توضع النتيجة مباشرة).

$\frac{\pm l}{\pm\infty}=0$	$\frac{\pm l}{\pm 0}=\pm\infty$
$\frac{\pm\infty}{\pm 0}=\pm\infty$	$\frac{\pm\infty}{\pm l}=\pm\infty$
$\frac{0}{\pm l}=0$	$\frac{0}{\pm\infty}=0$

ملاحظة:

*إذا كانت الدالة كثير حدود والمطلوب هو حساب نهايتيها عند $+\infty$ و $-\infty$ ، فقط نحسب نهاية: **الحد ذو الأكبر أس**.

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^3+bx^2+cx+d=\lim_{x\to\pm\infty} \boldsymbol{ax^3}$$

*إذا كانت الدالة ناطقة و المطلوب هو حساب نهايتيها عند $+\infty$ و $-\infty$، فقط نحسب نهاية: **الحد ذو الأكبر أس في البسط** على **الحد ذو الأكبر أس في المقام**.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\boldsymbol{ax^3}}{\boldsymbol{ax^2}}$$

4) طرق إزالة حالات عدم التعيين:

أ. العامل المشترك

ب. التحليل والاختزال (المطابقة، القسمة الإقليدية)

ج. المرافق (الجذور التربيعية)

د. العدد المشتق (ويكون فقط عندما تكون النهاية من الشكل $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$).

5) نهاية دالة مركبة:

$$f(x)=v\ o\ u(x)\leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} u(x)=b\\ \lim\limits_{b} v(x)=c\end{cases}$$

اذن: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

6) النهايات باستعمال المقارنة (الحصر والترتيب):

أ. الحصر:

$$\begin{cases}g(x)\le f(x)\le h(x)\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=l\end{cases}$$

اذن: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$

ب. الترتيب: (الحاد من الأعلى والحاد من الأسفل)

A) الحاد من الأعلى :

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty\backslash a} g(x) = +\infty \end{cases} \rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty\backslash a} f(x) = +\infty$$

B) الحاد من الأسفل :

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty\backslash a} g(x) = -\infty \end{cases} \rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty\backslash a} f(x) = -\infty$$

7) المستقيمات المقاربة:

أ. المستقيم المقارب الأفقي:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a}$$

التفسير الهندسي(البياني):

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي موازي لمحور الفواصل معادلته $y = a$ عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب. المستقيم المقارب العمودي (الشاقولي):

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty}$$

التفسير الهندسي(البياني):

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي موازي لمحور التراتيب معادلته $x = a$.

ج. المستقيم المقارب المائل:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0}$$

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ عند $+\infty$ و $-\infty$.

الإستمرارية

1) تعريف:

*f دالة مستمرة عند قيمة a معناه أن $f(a)$ معرفة و

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = f(a)}$$

*f مستمرة على مجال I حيث $I = [a;b]$ من $\mathbb{R}$ معناه أن f مستمرة عند كل قيمة a من هذا المجال.

* كل دالة مستمرة على مجموعة تعريفها، مثلا:

- ✓ الدالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$
- ✓ الدالة الناطقة مستمرة عند كل قيمة من مجموعة تعريفها، فهي ليست مستمرة عند القيم الممنوعة.
- ✓ الدوال المرجعية:

$$\boxed{x^2; \frac{1}{x}; \sqrt{x}; \sin x\,; \cos x\,; \tan x\,; x^3; e^x; \ln x\,; |x|}$$

مستمرة عند كل قيمة من مجموعة تعريفها.

*مجموع دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

* جداء دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

* مركب دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

2) مبرهنة القيم المتوسطة:

حالة1:

$f(x) = A$

- تقبل حلا وحيدا على المجال $[a;b]$
  - *f مستمرة على المجال $[a;b]$
  - *A محصور بين $f(a)$ و $f(b)$
  - *f رتيبة على المجال $[a;b]$
- تقبل حلا على الأقل على المجال $[a;b]$
  - *f مستمرة على المجال $[a;b]$
  - *A محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

حالة2:

$f(x) = 0$

- تقبل حلا وحيدا على المجال $[a;b]$
  - *f مستمرة على المجال $[a;b]$
  - *$f(a) \times f(b) < 0$
  - *f رتيبة على المجال $[a;b]$
- تقبل حلا على الأقل على المجال $[a;b]$
  - *f مستمرة على المجال $[a;b]$
  - *$f(a) \times f(b) < 0$